Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 362, 2008 г.

И. В. Денисова, Ш. Нечасова

ДВИЖЕНИЕ ДВУХ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ В ПРИБЛИЖЕНИИ ОБЕРБЕКА–БУССИНЕСКА

**Дорогому Всеволоду Алексеевичу Солонникову
в честь юбилея**

1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

В работе изучается неустановившееся движение двух несжимаемых жидкостей разделённых замкнутой неизвестной поверхностью Γ_t в приближении Обербека–Буссинеска (см., например, [1]). Жидкости занимают ограниченный объём с твёрдой границей S, на которой задано условие прилипания. На границе раздела Γ_t мы учитываем силу поверхностного натяжения.

Дадим математическую формулировку задачи о движении двух жидкостей.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ жидкость с вязкостью $\nu^+ > 0$ и плотностью $\rho^+ > 0$ занимает ограниченную область $\Omega_0^+ \subset \mathbb{R}^3$. Обозначим $\partial\Omega_0^+$ через Γ_0, а жидкость с вязкостью $\nu^- > 0$ и плотностью $\rho^- > 0$ находится в области Ω_0^-, окружающей Ω_0^+. Граница $S \equiv \partial(\Omega_0^+ \cup \Gamma_0 \cup \Omega_0^-)$ – заданная замкнутая поверхность, $S \cap \Gamma_0 = \emptyset$.

При $t > 0$ необходимо найти границу раздела Γ_t между областями Ω_t^+ и Ω_t^-, а также поле скоростей $\mathbf{v}(x,t) = (v_1, v_2, v_3)$, функцию p, отклонение от гидростатического давления P_0, и функцию θ', отклонение от среднего значения температуры, для обеих жидкостей, ко-

---

Работа первого автора была поддержана Фондом И. Нечаса Чешской академии наук и грантом РФФИ No. 08-01-00372a. Работа второго автора была выполнена в рамках гранта Чешской академии наук, No. IAA100190804, научный план Института математики Чешской академии наук No. AVOZ10190503 .

торые удовлетворяют следующей начально-краевой задаче:

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\mathbf{v} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} - \nu^{\pm}\nabla^2\mathbf{v} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla p = \mathbf{f}(x,t) - \beta^{\pm}\mathbf{g}\theta', \quad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0,\\
&\mathcal{D}_t\theta' + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\theta' - k^{\pm}\nabla^2\theta' = 0 \ \text{ в } \ \Omega_t^-\cup\Omega_t^+, \ \ t>0,\\
&\mathbf{v}|_S = 0, \quad \theta'|_S = a,\\
&\mathbf{v}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \ \ \theta'|_{t=0} = \theta_0 \ \text{ в } \ \Omega_0^-\cup\Omega_0^+, \qquad\qquad (1.1)\\
&[\mathbf{v}]|_{\Gamma_t} \equiv \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t,\\ x\in\Omega_t^+}} \mathbf{v}(x) - \lim_{\substack{x\to x_0\in\Gamma_t,\\ x\in\Omega_t^-}} \mathbf{v}(x) = 0, \quad [\mathbb{T}\mathbf{n}]|_{\Gamma_t} = \sigma H\mathbf{n},\\
&[\theta]|_{\Gamma_t} = 0, \quad \left[k^{\pm}\frac{\partial\theta'}{\partial\mathbf{n}}\right]\Big|_{\Gamma_t} = 0 \ \text{ на } \ \Gamma_t.
\end{aligned}
$$

Здесь $\mathcal{D}_t = \partial/\partial t$, $\nabla = (\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3)$, $\nu^{\pm}, \rho^{\pm}$ – ступенчатые функции вязкости и плотности, соответственно, $\mathbf{f}(x,t)$ – заданное поле массовых сил, $\beta^{\pm} > 0$ – ступенчатая функция коэффициента температурного расширения, $\mathbf{g} = g(0,0,1)$, где g – ускорение свободного падения, $\mathbf{v}_0$ – начальное распределение скоростей, θ_0 – начальное распределение температуры, $\mathbb{T}$ – это тензор напряжений с элементами

$$T_{ik} = -\delta_i^k p + \mu^{\pm}(\partial v_i/\partial x_k + \partial v_k/\partial x_i), \quad i,k = 1,2,3;$$

$\mu^{\pm} = \nu^{\pm}\rho^{\pm}$, δ_i^k – символ Кронекера, $\sigma \geq 0$ – коэффициент поверхностного натяжения, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к Ω_t^+, $H(x,t)$ – удвоенная средняя кривизна Γ_t ($H < 0$ в точках выпуклости Γ_t в сторону Ω_t^-), $k^{\pm}$ – ступенчатая функция термопроводимости. Мы предполагаем, что в $\mathbb{R}^3$ введена декартовая система координат $\{x\}$. Точка означает декартово скалярное произведение.

Будем подразумевать суммирование от 1 до 3 по повторяющимся индексам. Мы будем обозначать вектора и векторные пространства полужирным шрифтом.

Чтобы исключить перенос массы через поверхность Γ_t, мы считаем, что частицы жидкости не покидают Γ_t. Это означает, что Γ_t состоит из таких точек $x(\xi,t)$, радиус-вектор которых $\mathbf{x}(\xi,t)$ является решением задачи Коши

$$\mathcal{D}_t\mathbf{x} = \mathbf{v}(x(t),t), \quad \mathbf{x}|_{t=0} = \boldsymbol{\xi}, \quad \xi\in\Gamma_0, \ t>0. \qquad (1.2)$$

Значит, $\Gamma_t = \{x(\xi,t)|\ \xi\in\Gamma_0\}$, $\Omega_t^{\pm} = \{x(\xi,t)|\ \xi\in\Omega_0^{\pm}\}$.

Перейдём от эйлеровых координат к лагранжевым по формуле

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} + \int\limits_0^t \mathbf{u}(\xi,\tau)\mathrm{d}\,\tau \equiv X_{\mathbf{u}}(\xi,t) \tag{1.3}$$

(здесь $\mathbf{u}(\xi,t)$ – поле скоростей в лагранжевых координатах) и воспользуемся хорошо известным соотношением

$$H\mathbf{n} = \Delta(t)\mathbf{x},$$

где $\Delta(t)$ обозначает оператор Бельтрами–Лапласа на Γ_t. В результате мы придём к задаче для $\mathbf{u}$, $q = p(X_{\mathbf{u}},t)$ и $\hat\theta = \theta'(X_{\mathbf{u}},t)$ с заданной поверхностью $\Gamma \equiv \Gamma_0$. Если угол между $\mathbf{n}$ и внешней нормалью $\mathbf{n}_0$ к Γ острый, то полученная система эквивалентна следующей:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\mathbf{u} - \nu^{\pm}\nabla_{\mathbf{u}}^2\mathbf{u} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla_{\mathbf{u}}q = \mathbf{f}(X_{\mathbf{u}},t) - \beta^{\pm}\hat\theta\mathbf{g}(X_{\mathbf{u}}), \quad \nabla_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u} = 0,\\
&\mathcal{D}_t\hat\theta - k^{\pm}\nabla_{\mathbf{u}}^2\hat\theta = 0 \ \text{ в } \ Q_T^{\pm} = \Omega^{\pm}\times(0,T), \quad \Omega^{\pm}\equiv\Omega_0^{\pm},\\
&\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \quad \hat\theta|_{t=0} = \theta_0 \ \text{ в } \ \Omega^-\cup\Omega^+,\\
&[\mathbf{u}]|_{G_T} = 0, \quad [\hat\theta]|_{G_T} = 0, \quad \mathbf{u}|_S = 0, \quad \hat\theta|_S = a,\\
&[\Pi_0\Pi\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u})\mathbf{n}]|_{G_T} = 0,\\
&[\mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{u},q)\mathbf{n}]|_{G_T} - \sigma\mathbf{n}_0\cdot\Delta(t)\int\limits_0^t \mathbf{u}\big|_{\Gamma}\mathrm{d}\,\tau = \sigma H_0(\xi) + \sigma\mathbf{n}_0\cdot\int\limits_0^t \dot\Delta(\tau)\boldsymbol{\xi}\big|_{\Gamma}\mathrm{d}\,\tau,\\
&[k^{\pm}\mathbf{n}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\hat\theta]|_{G_T} = 0 \ \text{ на } G_T = \Gamma\times(0,T).
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь мы использовали следующее обозначение: $\nabla_{\mathbf{u}} = \mathbb{A}\nabla$, $\mathbb{A}$ – матрица алгебраических дополнений A_{ij} к элементам

$$a_{ij}(\xi,t) = \delta_i^j + \int\limits_0^t \frac{\partial u_i}{\partial\xi_j}\mathrm{d}\,t'$$

якобиевой матрицы преобразования (1.3), вектор $\mathbf{n}$ связан с $\mathbf{n}_0$ соотношением $\mathbf{n} = \mathbb{A}\mathbf{n}_0/|\mathbb{A}\mathbf{n}_0|$; $\Pi\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\omega})$, $\Pi_0\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{n}_0(\mathbf{n}_0\cdot\boldsymbol{\omega})$ – проекции вектора $\boldsymbol{\omega}$ на касательные плоскости к Γ_t и к Γ, соответственно; $\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w},q)$ – это тензор с элементами

$$(\mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w},q))_{ij} = -\delta_j^i q + \mu^{\pm}(A_{jk}\partial w_i/\partial\xi_k + A_{ik}\partial w_j/\partial\xi_k);$$

$H_0(\xi) = \mathbf{n}_0 \cdot \Delta(0)\boldsymbol{\xi}$ – удвоенная средняя кривизна Γ; $\dot{\Delta}(t)$ – оператор, получающийся из оператора Бельтрами–Лапласа дифференцированием его коэффициентов по t.

Результатом исследования является локальная по времени разрешимость в гёльдеровских классах функций. Основой доказательства служит терема существования для задачи в случае постоянной температуры [2–4].

Напомним определение функциональных пространств Гёльдера. Пусть Ω –область в $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$; для $T > 0$ положим $\Omega_T = \Omega \times (0,T)$; наконец, пусть $\alpha \in (0,1)$. Обозначим через $C^{\alpha,\alpha/2}(\Omega_T)$ множество функций f, заданных в Ω_T, с нормой

$$|f|_{\Omega_T}^{(\alpha,\alpha/2)} = |f|_{\Omega_T} + \langle f\rangle_{\Omega_T}^{(\alpha,\alpha/2)},$$

где

$$\begin{aligned}
&|f|_{\Omega_T} = \sup_{t\in(0,T)}\sup_{x\in\Omega}|f(x,t)|, \quad \langle f\rangle_{\Omega_T}^{(\alpha,\alpha/2)} = \langle f\rangle_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} + \langle f\rangle_{t,\Omega_T}^{(\alpha/2)},\\
&\langle f\rangle_{x,\Omega_T}^{(\alpha)} = \sup_{t\in(0,T)}\sup_{x,y\in\Omega}|f(x,t)-f(y,t)||x-y|^{-\alpha},\\
&\langle f\rangle_{t,\Omega_T}^{(\mu)} = \sup_{x\in\Omega}\sup_{t,\tau\in(0,T)}|f(x,t)-f(x,\tau)||t-\tau|^{-\mu}, \quad \mu\in(0,1).
\end{aligned}$$

Введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} = \partial^{|\mathbf{r}|}/\partial x_1^{r_1}\ldots\partial x_n^{r_n}, \quad \mathbf{r} = (r_1,\ldots r_n), \quad r_i \geqslant 0, \quad |\mathbf{r}| = r_1+\cdots+r_n,\\
&\mathcal{D}_t^s = \partial^s/\partial t^s, \quad s\in\mathbb{N}\cup\{0\}.
\end{aligned}$$

Пусть $k \in \mathbb{N}$. По определению пространство $C^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\Omega_T)$ состоит из функций f с конечной нормой

$$|f|_{\Omega_T}^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})} = \sum_{|\mathbf{r}|+2s\leqslant k}|\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}}\mathcal{D}_t^s f|_{\Omega_T} + \langle f\rangle_{\Omega_T}^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})},$$

где

$$\langle f\rangle_{\Omega_T}^{(k+\alpha,\frac{k+\alpha}{2})} = \sum_{|\mathbf{r}|+2s=k}\langle\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}}\mathcal{D}_t^s f\rangle_{\Omega_T}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})} + \sum_{|\mathbf{r}|+2s=k-1}\langle\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}}\mathcal{D}_t^s f\rangle_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha}{2})}.$$

Символ $C_0^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\Omega_T)$ обозначает подпространство пространства $C^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\Omega_T)$, элементы которого f обладают свойством: $\mathcal{D}_t^i f\big|_{t=0} = 0$, $i = 0, \dots, \left[\frac{k+\alpha}{2}\right]$.

Определим $C^{k+\alpha}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, как пространство функций $f(x)$, $x \in \Omega$, с нормой

$$|f|_\Omega^{(k+\alpha)} = \sum_{|\mathbf{r}| \leqslant k} |\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} f|_\Omega + \langle f \rangle_\Omega^{(k+\alpha)}.$$

Здесь

$$\langle f \rangle_\Omega^{(k+\alpha)} = \sum_{|\mathbf{r}|=k} \langle \mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} f \rangle_\Omega^{(\alpha)} = \sum_{|\mathbf{r}|=k} \sup_{x,y\in\Omega} |\mathcal{D}_x^{\mathbf{r}} f(x) - \mathcal{D}_y^{\mathbf{r}} f(y)||x-y|^{-\alpha}.$$

Нам понадобится следующая полунорма с $\alpha, \gamma \in (0,1)$:

$$\| f \|_{\Omega_T}^{(\gamma,1+\alpha)} = \langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{\Omega_T}^{(\gamma,1+\alpha)} + \langle f \rangle_{t,\Omega_T}^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})},$$

где

$$\langle\!\langle f \rangle\!\rangle_{\Omega_T}^{(\gamma,1+\alpha)} = \max_{t,\tau\in(0,T)} \max_{x,y\in\Omega} \frac{|f(x,t) - f(y,t) - f(x,\tau) + f(y,\tau)|}{|x-y|^\gamma |t-\tau|^{(1+\alpha-\gamma)/2}}.$$

Известна оценка

$$\langle f \rangle_{\Omega_T}^{(\gamma,1+\alpha)} \le c_1 \langle f \rangle_{\Omega_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}.$$

Будем считать, что $f \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(\Omega_T)$, если

$$|f|_{\Omega_T} + \| f \|_{\Omega_T}^{(\gamma,1+\alpha)} < \infty.$$

Наконец, если функция f имеет конечную норму

$$|f|_{\Omega_T}^{(\gamma,\mu)} \equiv \langle f \rangle_{x,\Omega_T}^{(\gamma)} + |f|_{t,\Omega_T}^{(\mu)}, \quad \gamma \in (0,1), \quad \mu \in [0,1),$$

где

$$|f|_{t,\Omega_T}^{(\mu)} = \begin{cases} |f|_{\Omega_T} + \langle f \rangle_{t,\Omega_T}^{(\mu)}, & \text{если } \mu > 0, \\ |f|_{\Omega_T}, & \text{если } \mu = 0, \end{cases}$$

мы полагаем, что она принадлежит гёльдеровскому пространству $C^{\gamma,\mu}(\Omega_T)$.

Мы считаем, что векторнозначная функция является элементом гёльдеровского пространства, если все её компоненты принадлежат этому пространству, и её норма определяется как максимум норм её компонент.

Положим: $\cup Q_T^{\pm} = Q_T^- \cup Q_T^+$ и

$$|f|_{\cup Q_T^{\pm}}^{(k+\alpha)} = |f|_{Q_T^-}^{(k+\alpha)} + |f|_{Q_T^+}^{(k+\alpha)},$$

$$|f|_{\cup \Omega^{\pm}}^{(k+\alpha)} = |f|_{\Omega^-}^{(k+\alpha)} + |f|_{\Omega^+}^{(k+\alpha)}.$$

Сформулируем теперь основной результат работы.

Теорема 1.1. *Допустим, что* $\Gamma \in C^{3+\alpha}$, $S \in C^{2+\alpha}$, $\mathbf{f}$, $D_x\mathbf{f} \in \mathbf{C}^{\alpha,(\alpha+\varepsilon)/2}(\mathbb{R}^3 \times (0,T))$, $\mathbf{v}_0 \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\Omega^- \cup \Omega^+)$, $a \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(S_T)$, $\theta_0 \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\Omega^- \cup \Omega^+)$ *для некоторого* $\alpha \in (0,1)$, $\varepsilon \in (0, 1-\alpha)$, $0 < T < \infty$. *Кроме того, пусть выполнены условия согласования*

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \mathbf{v}_0 = 0, \quad [\mathbf{v}_0]|_\Gamma = 0, \quad [\theta_0]|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{v}_0|_S = 0, \quad \theta_0|_S = a|_{t=0},\\
&[\Pi_0 \mathbb{T}(\mathbf{v}_0)\mathbf{n}_0]|_\Gamma = 0,\\
&[\Pi_0(\nu^{\pm}\nabla^2\mathbf{v}_0 - \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla q_0)]|_\Gamma = -[\beta^{\pm}\theta_0\Pi_0\mathbf{g}]|_\Gamma, \quad k^-\nabla^2\theta_0|_S = \mathcal{D}_t a\big|_{t=0},\\
&\Pi_S(\nu^-\frac{\partial^2\mathbf{v}_0}{\partial\mathbf{n}_S^2} - \frac{1}{\rho^-}\nabla q_0)\big|_S = \Pi_S(\mathbf{f} - \beta^- a\mathbf{g})\big|_{S,t=0},\\
&[k^{\pm}\nabla^2\theta_0]\big|_\Gamma = 0, \quad \left[k^{\pm}\frac{\partial\theta_0}{\partial\mathbf{n}_0}\right]\bigg|_\Gamma = 0 \quad \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_0} = \mathbf{n}_0 \cdot \nabla\right),
\end{aligned} \tag{1.5}$$

где $q_0(\xi) \equiv q(\xi, 0)$ *– решение задачи дифракции*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla^2 q_0(\xi) = \nabla \cdot \big(\mathbf{f}(\xi,0) - \beta^{\pm}\theta_0\mathbf{g} - \mathcal{D}_t\mathbb{B}^*\big|_{t=0}\mathbf{v}_0(\xi)\big), \quad \xi \in \Omega^{\pm},\\
&[q_0]|_\Gamma = \left[2\mu^{\pm}\frac{\partial\mathbf{v}_0}{\partial\mathbf{n}_0} \cdot \mathbf{n}_0\right]\bigg|_\Gamma - \sigma H_0,\\
&\left[\frac{1}{\rho^{\pm}}\,\frac{\partial q_0}{\partial\mathbf{n}_0}\right]\bigg|_\Gamma = \big[\nu^{\pm}\mathbf{n}_0 \cdot \nabla^2\mathbf{v}_0\big]\big|_\Gamma - \big[\mathbf{n}_0 \cdot \beta^{\pm}\theta_0\mathbf{g}\big]\big|_\Gamma,\\
&\frac{1}{\rho^-}\frac{\partial q_0}{\partial\mathbf{n}_S}\bigg|_S = \nu^-\mathbf{n}_S \cdot \nabla^2\mathbf{v}_0\big|_S + \mathbf{n}_S \cdot (\mathbf{f} - \beta^- a\mathbf{g})\big|_{S,\, t=0} \quad \left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{n}_S} = \mathbf{n}_S \cdot \nabla\right).
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь $\mathbb{B} = \mathbb{A} - \mathbb{I}$, $\mathbb{I}$ *– единичная матрица,* $\mathbb{B}^*$ *– транспонированная матрица к* $\mathbb{B}$, $\mathbf{n}_S$ *– вектор внешней нормали к* S, $\Pi_S\boldsymbol{\omega} \equiv \boldsymbol{\omega} - \mathbf{n}_S(\mathbf{n}_S \cdot \boldsymbol{\omega})$.

Тогда существует положительная константа $T^* \leq T$ такая, что задача (1.4) имеет решение $(\mathbf{u}, q, \hat{\theta})$ со следующими свойствами: $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\cup Q_{T^*}^{\pm})$, $q \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(\cup Q_{T^*}^{\pm})$ $(\gamma = 1 - \varepsilon > \alpha)$, $\nabla q \in \mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}(\cup Q_{T^*}^{\pm})$, $\hat{\theta} \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\cup Q_{T^*}^{\pm})$, при этом $\mathbf{u}$ и $\hat{\theta}$ определяются однозначно, а давление q – с точностью до ограниченной функции времени. Величина T^* зависит от норм заданных функций и кривизны поверхности Γ.

Доказательство этой теоремы основано на разрешимости вспомогательных линеаризованных задач.

2. Линеаризованные задачи

Во-первых, мы рассмотрим следующую линейную задачу:

$$\mathcal{D}_t\mathbf{w} - \nu^{\pm}\nabla_{\mathbf{u}}^2\mathbf{w} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla_{\mathbf{u}}s = \mathbf{f}, \quad \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} = r \quad \text{в} \quad Q_T^{\pm},$$

$$\mathbf{w}|_{t=0} = \mathbf{w}_0 \quad \text{в} \quad \Omega^- \cup \Omega^+, \tag{2.1}$$

$$[\mathbf{w}]|_{G_T} = 0, \quad \mathbf{w}|_S = 0, \quad [\mu^{\pm}\Pi_0\Pi\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})\mathbf{n}]|_{G_T} = \Pi_0\mathbf{b},$$

$$[\mathbf{n}_0 \cdot \mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}, s)\mathbf{n}]|_{G_T} - \sigma\mathbf{n}_0 \cdot \Delta(t)\int_0^t \mathbf{w}\big|_{\Gamma} \mathrm{d}\,\tau = b + \int_0^t B \mathrm{d}\,\tau \quad \text{на} \quad G_T,$$

где

$$(\mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}))_{ij} = (A_{jk}\partial w_i/\partial\xi_k + A_{ik}\partial w_j/\partial\xi_k).$$

Задача (2.1) изучалась в [2–4]. В [4] (теорема 3.1) была доказана однозначная разрешимость для неё на любом конечном интервале времени в случае, когда поверхность S отсутствовала и цилиндр $\cup Q_T^{\pm}$ совпадал со всем пространством $\mathbb{R}^3$. Этот результат был получен в гёльдеровских пространствах со степенным весом на бесконечности, однако он справедлив также и в нашем случае. Во-первых, весовые пространства эквивалентны обычным гёльдеровским пространствам в ограниченной области. Во-вторых, есть соответствующие оценки для модельной задачи с условием прилипания на границе [7].

Приведём формулировку теоремы существования для задачи (2.1).

Теорема 2.1. *Допустим, что для некоторых* $\alpha, \gamma \in (0,1)$, $\gamma > \alpha$, $0 < T < \infty$, *поверхности* Γ, $S \in C^{2+\alpha}$, *функция* $\sigma \in C^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\sigma \geqslant \sigma_0 > 0$, *а вектор* $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\cup Q_T^{\pm})$, *такой, что* $[\mathbf{u}]|_{G_T} = 0$, *подчиняется неравенству*

$$(T + T^{\gamma/2})|\mathbf{u}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\cup Q_T^{\pm}} \leqslant \delta \tag{2.2}$$

для достаточно малого $\delta > 0$.

Предположим, кроме того, что выполнены четыре группы условий:

(1) *существует вектор* $\mathbf{h} \in \mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}(\cup Q_T^{\pm})$ *и тензор* $\mathbb{G} = \{G_{ik}\}_{i,k=1}^3$, $G_{ik} \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(\cup Q_T^{\pm}) \cap C^{\gamma,0}(\cup Q_T^{\pm})$ *такие, что имеют место представления*

$$\mathcal{D}_t r - \nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{f} = \nabla \cdot \mathbf{h}, \quad \mathbf{h} = \nabla \cdot \mathbb{G} \quad (h_i = \partial G_{ik}/\partial \xi_k, \quad i = 1,2,3),$$

(эти равенства понимаются в обобщённом смысле) и, помимо того,

$$[(\mathbf{h} + \mathbb{A}^* \mathbf{f}) \cdot \mathbf{n}_0]|_{G_T} = 0;$$

(2) $\mathbf{f} \in \mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}(\cup Q_T^{\pm})$, $r \in C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\cup Q_T^{\pm})$, $\mathbf{w}_0 \in \mathbf{C}^{2+\alpha}(\Omega^- \cup \Omega^+)$, $\mathbf{b} \in \mathbf{C}^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(G_T)$, $b \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(G_T)$, $B \in C^{\alpha,\alpha/2}(G_T)$;

(3)

$$\nabla \cdot \mathbf{w}_0(\xi) = r(\xi,0) = 0, \quad [\mathbf{w}_0]|_\Gamma = 0, \quad \mathbf{w}_0|_S = 0,$$
$$[\Pi_0 \mathbb{T}(\mathbf{w}_0(\xi))\mathbf{n}_0]|_{\xi\in\Gamma} = \Pi_0 \mathbf{b}(\xi,0), \quad \xi \in \Gamma,$$
$$\Big[\Pi_0\Big(\mathbf{f}(\xi,0) - \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla s(\xi,0) + \nu^{\pm}\nabla^2\mathbf{w}_0(\xi)\Big)\Big]\Big|_{\xi\in\Gamma} = 0,$$
$$\Pi_S\Big(\mathbf{f}(\xi,0) - \frac{1}{\rho^{-}}\nabla s(\xi,0) + \nu^{-}\nabla^2\mathbf{w}_0(\xi)\Big)\Big|_{\xi\in S} = 0;$$

(4) $s_0(\xi) = s(\xi,0)$ *является решением задачи*

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla^2 s_0(\xi) = \nabla \cdot (\mathcal{D}_t \mathbb{B}^*|_{t=0}\mathbf{w}_0(\xi) - \mathbf{h}(\xi,0)) \equiv \nabla \cdot \mathbf{d} \ \text{ в } \ \Omega^- \cup \Omega^+,\\
&[s_0]|_\Gamma = \Big[2\mu^{\pm}\frac{\partial \mathbf{w}_0}{\partial \mathbf{n}_0} \cdot \mathbf{n}_0\Big]\Big|_\Gamma - b|_{t=0} \equiv p_{00},\\
&\Big[\frac{1}{\rho^{\pm}}\frac{\partial s_0}{\partial \mathbf{n}_0}\Big]\Big|_\Gamma = [\mathbf{n}_0 \cdot (\mathbf{f}|_{t=0} + \nu^{\pm}\nabla^2\mathbf{w}_0)]|_\Gamma \equiv p_{01},\\
&\frac{1}{\rho^-}\frac{\partial s_0}{\partial \mathbf{n}_S}\Big|_S = \nu^- \mathbf{n}_S \cdot \nabla^2 \mathbf{w}_0|_S + \mathbf{n}_S \cdot \mathbf{f}\big|_{S,\, t=0} \equiv p_{02}.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

При этих предположениях задача (2.1) имеет единственное решение $(\mathbf{w}, s)$, $\mathbf{w} \in \mathbf{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\cup Q_T^{\pm})$, $s \in C^{(\gamma,1+\alpha)}(\cup Q_T^{\pm})$, $\nabla s \in \mathbf{C}^{\alpha,\alpha/2}(\cup Q_T^{\pm})$ *(давление определяется с точностью до ограниченной функции времени). Для него верно неравенство*

$$N_{t'}[\mathbf{w}, s] \equiv |\mathbf{w}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_{t'}} + |\nabla s|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_{t'}} + |s|^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{t,\cup Q^{\pm}_{t'}} + \langle\!\langle s \rangle\!\rangle^{(\gamma,1+\alpha)}_{\cup Q^{\pm}_{t'}}$$

$$\leqslant c_1(t')\Big\{|\mathbf{f}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_{t'}} + |r|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_{t'}} + |\mathbf{w}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^{\pm}} + |\mathbf{h}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_{t'}} + \|\mathbb{G}\|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\cup Q^{\pm}_{t'}}$$

$$+|\mathbb{G}|^{(\gamma,0)}_{\cup Q^{\pm}_{t'}} + |\mathbf{b}|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{G_{t'}} + |b|_{G_{t'}} + \|b\|^{(\gamma,1+\alpha)}_{G_{t'}} + |B|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G_{t'}} + P_{t'}[\mathbf{u}]|\mathbf{w}_0|^{(1)}_{\cup\Omega^{\pm}}\Big\}$$

$$\equiv c_1(t')\big\{F(t') + P_{t'}[\mathbf{u}]|\mathbf{w}_0|^{(1)}_{\cup\Omega^{\pm}}\big\},$$

где $c_1(t')$ *– неубывающая функция* $t' \leqslant T$, $\nabla_\Gamma = \Pi_0\nabla$, *а*

$$P_t[\mathbf{u}] = t^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\mathbf{u}|_{\cup Q_t^{\pm}} + |\nabla\mathbf{u}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q_t^{\pm}}.$$

Замечание 2.2. Оценка давления s_0 в начальный момент времени для ограниченной области проводится в §3.

Замечание 2.3. Отметим, что теорема 2.1 верна и для случая $\sigma = 0$. Это следует из недавних результатов одного из авторов, связанных с оценками решения модельной задачи с плоской границей раздела жидкостей при $\sigma = 0$ [5].

Рассмотрим теперь задачу для неизвестной функции температуры ψ:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\psi - k^{\pm}\nabla^2_{\mathbf{u}}\psi = f \quad \text{в} \quad Q_T^{\pm},\\
&\psi|_{t=0} = \psi_0 \quad \text{в} \quad \Omega^- \cup \Omega^+,\\
&[\psi]|_{G_T} = 0, \quad \psi|_{S_T} = \varphi,\\
&[k^{\pm}\mathbf{n}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\psi]|_{G_T} = d \quad \text{на} \quad G_T.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Теорема 2.4. *Предположим, что поверхности* $\Gamma, S \in C^{2+\alpha}$, *а вектор-функция* $\mathbf{u} \in \mathbf{C}^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\cup Q_T^{\pm})$, $[\mathbf{u}]|_\Gamma = 0$, *и удовлетворяет неравенству (2.2). Тогда для любых* $f \in C^{\alpha,\alpha/2}(\cup Q_T^{\pm}), \psi_0 \in C^{2+\alpha}(\Omega^- \cup \Omega^+)$, $\varphi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(S_T)$, $d \in C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(G_T)$, *для которых выполнены условия согласования*

$$[\psi_0]|_\Gamma = 0, \quad \psi_0|_S = \varphi|_{t=0}, \quad -[k^{\pm}\nabla^2\psi_0]|_\Gamma = [f|_{t=0}]|_\Gamma,$$

$$[k^{\pm}\frac{\partial\psi_0}{\partial\mathbf{n}_0}]|_\Gamma = d(\xi,0),\quad \xi\in\Gamma,\quad \mathcal{D}_t\varphi|_{t=0} - k^-\nabla^2\psi_0|_S = f|_{S,\,t=0},\tag{2.5}$$

задача (2.4) *имеет единственное решение* $\psi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\cup Q_T^{\pm})$ *и верна оценка*

$$|\psi|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\cup Q_T^{\pm}} \leqslant c_2(T)\{|f|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q_T^{\pm}} + |\psi_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^{\pm}} + |\varphi|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{S_T} + |d|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{G_T} + T^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\mathbf{u}|_{\cup Q_T^{\pm}}|\psi_0|^{(1)}_{\cup\Omega^{\pm}}\}.\tag{2.6}$$

Здесь c_2 *– неубывающая функция* T.

Доказательство. Перепишем систему (2.4) в виде

$$\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\psi - k^{\pm}\nabla^2\psi = f + h_1(\psi,\mathbf{u}) \ \text{ в } \ Q_T^{\pm},\\
&\psi|_{t=0} = \psi_0 \ \text{ в } \ \Omega^-\cup\Omega^+,\\
&[\psi]|_{G_T} = 0,\quad \psi|_{S_T} = \varphi,\\
&[k^{\pm}\mathbf{n}_0\cdot\nabla\psi]|_{G_T} = d + h_2(\psi,\mathbf{u}),
\end{aligned}\tag{2.7}$$

где

$$\begin{aligned}
&h_1(\psi,\mathbf{u}) = k^{\pm}(\nabla^2_{\mathbf{u}}\psi - \nabla^2\psi),\\
&h_2(\psi,\mathbf{u}) = [k^{\pm}(\mathbf{n}_0\cdot\nabla\psi - \mathbf{n}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\psi)]\big|_\Gamma.
\end{aligned}\tag{2.8}$$

Известно, что при выполнении условий (2.5) задача (2.7) с $h_1(\psi) = h_2(\psi) = 0$ разрешима в $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\cup Q_T^{\pm})$ [6].

Запишем задачу (2.7) в операторном виде

$$\psi = \mathcal{L}[f + h_1(\psi,\mathbf{u}),\psi_0,\varphi,d + h_2(\psi,\mathbf{u})] \equiv \mathcal{L}[f,\psi_0,\varphi,d] + \mathcal{K}_{\mathbf{u}}(\psi).\tag{2.9}$$

Здесь $\mathcal{L}$ – линейный непрерывный оператор из подпространства $C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\cup Q_T^{\pm})\times C^{2+\alpha}(\Omega^-\cup\Omega^+)\times C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(S_T)\times C^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\Gamma)$, элементы которого (f,ψ_0,d) удовлетворяют (2.5), в пространство Гёльдера $C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\cup Q_T^{\pm})$; $\mathcal{K}_{\mathbf{u}}(\psi) = \mathcal{L}[h_1(\psi),0,0,h_2(\psi,\mathbf{u})]$. Каждой четвёрке (f,ψ_0,φ,d) оператор $\mathcal{L}$ ставит в соответствие решение задачи (2.7) с $h_1(\psi,\mathbf{u}) = h_2(\psi,\mathbf{u}) = 0$.

Примем во внимание, что

$$h_1(\psi) = k^{\pm}(\mathbb{A}\nabla\cdot\mathbb{B}\nabla)\psi + k^{\pm}\mathbb{B}\nabla\cdot\nabla\psi,$$

$$h_2(\psi) = [k^{\pm}((\mathbf{n}_0 - \mathbf{n})\cdot\nabla\psi - \mathbf{n}\cdot\mathbb{B}\nabla\psi)]\big|_\Gamma,$$

где $\mathbb{B} = \mathbb{A} - \mathbb{I}$. Тогда лемма 5.2 из [8] (см. также [4, §3]) даёт нам неравенство

$$
\begin{aligned}
&|h_1(\psi)|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} + |h_2(\psi)|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{G_T} \\
&\leqslant c\{\delta|\psi|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} + T^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla \mathbf{u}|_{\cup Q^{\pm}_T}|\nabla\psi|_{\cup Q^{\pm}_T}\} \\
&\leqslant c_1\{\delta|\psi|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} + T^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla \mathbf{u}|_{\cup Q^{\pm}_T}|\psi_0|^{(1)}_{\cup\Omega^{\pm}}\}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Значит, оператор $\mathcal{K}_{\mathbf{u}}(\psi)$ является оператором сжатия при достаточно малом δ, т.е. для любых ψ, $\psi' \in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\cup Q^{\pm}_T)$ таких, что $\psi - \psi'|_{t=0} = 0$, $\psi - \psi'|_{S_T} = 0$, верна оценка

$$
|\mathcal{K}_{\mathbf{u}}(\psi) - \mathcal{K}_{\mathbf{u}}(\psi')|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} \leqslant \varepsilon|\psi - \psi'|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T}, \quad \varepsilon < 1.
$$

Следовательно, уравнение (2.9), а значит, и задача (2.7) однозначно разрешимы. Неравенство (2.6) следует из (2.10) и ограниченности оператора $\mathcal{L}$. □

Лемма 2.5. *Пусть* $\psi \in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\cup Q^{\pm}_T)$, $[\psi]|_\Gamma = 0$. *Для операторных разностей*

$$
\begin{aligned}
h_1(\psi) - h_1'(\psi) &= k^{\pm}(\nabla^2_{\mathbf{u}}\psi - \nabla^2_{\mathbf{u}'}\psi) = \\
&= k^{\pm}\Big\{\mathbb{A}\nabla\cdot(\mathbb{B} - \mathbb{B}')\nabla\psi + (\mathbb{B} - \mathbb{B}')\nabla\cdot\mathbb{A}'\psi\Big\}, \\
h_2(\psi) - h_2'(\psi) &= \Big[k^{\pm}(\mathbf{n}'\cdot\nabla_{\mathbf{u}'}\psi - \mathbf{n}\cdot\nabla_{\mathbf{u}}\psi)\Big]\Big|_\Gamma \\
&= \Big[k^{\pm}\big\{(\mathbf{n}' - \mathbf{n})\cdot\mathbb{A}\nabla\psi + \mathbf{n}\cdot(\mathbb{B} - \mathbb{B}')\nabla\psi\big\}\Big]\Big|_\Gamma
\end{aligned}
$$

верны оценки

$$
\begin{aligned}
&|h_1(\psi) - h_1'(\psi)|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_T} \leq c_2|\psi|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_T} M_T[\mathbf{u} - \mathbf{u}'], \\
&|h_2(\psi) - h_2'(\psi)|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{G_T} \leq c_3|\psi|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_T} M_T[\mathbf{u} - \mathbf{u}'] \\
&\qquad + c_4 T^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\psi|_{\cup Q^{\pm}_T}|\nabla(\mathbf{u} - \mathbf{u}')|_{\cup Q^{\pm}_T},
\end{aligned}
$$

где

$$
M_T[\mathbf{v}] = \int_0^T |\mathbf{v}|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^{\pm}}\,\mathrm{d}\,t + \sup_{0<\tau<t<T}\tau^{-\alpha/2}\int_{t-\tau}^{t}(|\nabla\mathbf{v}|_{\cup\Omega^{\pm}} + |\nabla\nabla\mathbf{v}|_{\cup\Omega^{\pm}})\mathrm{d}\,\tau'.
$$

3. Оценки решений задач (2.3) и (1.6)

Покажем существование решения s_0 задачи (2.3) и получим его оценки в C^α и $C^{1+\alpha}$. Представим s_0 в виде суммы $s_0 = s_{00} + \rho^\pm s_1 + s_2$, где s_{00} – решение уравнения Пуассона

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho^+}\nabla^2 s_{00} = \nabla\cdot\mathbf{d} \quad \text{в } \Omega^+,\\
&\frac{1}{\rho^-}\nabla^2 s_{00} = \nabla\cdot\mathbf{d} \quad \text{в } \mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega^+},
\end{aligned}\tag{3.1}$$

причём вектор $\mathbf{d}$ продолжен во всё пространство $\mathbb{R}^3$ с сохранением класса и нормы и имеет вид: $\mathbf{d} = \nabla\cdot\mathbb{D}$, а s_1, s_2 – решения задач дифракции с однородными уравнениями:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho^+}\nabla^2 s_1 = 0 \quad \text{в } \Omega^+,\\
&\frac{1}{\rho^-}\nabla^2 s_1 = 0 \quad \text{в } \mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega^+},\\
&[s_1]|_\Gamma = p_{00},\\
&\left[\frac{1}{\rho^\pm}\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{v} n_0}\right]\Bigg|_\Gamma = 0, \quad s_1 \xrightarrow[|x|\to\infty]{} 0
\end{aligned}\tag{3.2}$$

и

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\rho^\pm}\nabla^2 s_2 = 0 \quad \text{в } \Omega^\pm,\\
&[s_2]|_\Gamma = 0,\\
&\left[\frac{1}{\rho^\pm}\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{n}_0}\right]\Bigg|_\Gamma = p_{01} - \left[\frac{1}{\rho^\pm}\frac{\partial s_{00}}{\partial \mathbf{n}_0}\right]\Bigg|_\Gamma \equiv q_1,\\
&\frac{1}{\rho^-}\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{n}_S}\bigg|_S = p_{02} - \frac{1}{\rho^-}\frac{\partial s_1}{\partial \mathbf{n}_S}\bigg|_S - \frac{1}{\rho^-}\frac{\partial s_{00}}{\partial \mathbf{n}_S}\bigg|_S \equiv q_2.
\end{aligned}\tag{3.3}$$

Функции s_{00}, s_1 были найдены и оценены в [3 (см. §2]). Там для них были получены оценки:

$$\begin{aligned}
|s_{00}|^{(\gamma)}_{\cup\Omega^\pm} + |\nabla s_{00}|_{\cup\Omega^\pm} &\le c\{\langle\mathbb{D}\rangle^{(\gamma)}_{\cup\Omega^\pm} + |d|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm}\}, \quad \gamma\in(0,1),\\
\langle\nabla s_{00}\rangle^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} &\le c|d|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm},\\
|s_1|^{(\gamma)}_{\cup\Omega^\pm} &\le c|p_{00}|^{(\gamma)}_\Gamma,\\
|\nabla s_1|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} &\le c|p_{00}|^{(1+\gamma)}_\Gamma.
\end{aligned}\tag{3.4}$$

Следуя книге Н. М. Гюнтера [9], где изучается разрешимость внутренней задачи Неймана и получены оценки её решения, исследуем аналогичные вопросы для задачи (3.3).

Будем искать решение этой задачи в виде потенциала простого слоя

$$s_2(x) = \int\limits_\Gamma \mathcal{E}(x,y)\omega_1(y)\mathrm{d}\,\Gamma(y) + \int\limits_S \mathcal{E}(x,y)\omega_1(y)\mathrm{d}\,S(y),$$

где $\mathcal{E}(x,y) = -\frac{1}{4\pi|x-y|}$ – это фундаментальное решение уравнения Лапласа.

Для плотностей ω_1, ω_2 выполняется система уравнений

$$-\frac{\rho^+ - \rho^-}{\rho^+\rho^-}\left\{\int\limits_\Gamma \frac{\partial\mathcal{E}(x,y)}{\partial\mathbf{n}_0(x)}\omega_1(y)\mathrm{d}\,\Gamma(y) + \int\limits_S \frac{\partial\mathcal{E}(x,y)}{\partial\mathbf{n}_0(x)}\omega_2(y)\mathrm{d}\,S(y)\right\}$$
$$+\frac{\rho^+ + \rho^-}{2\rho^+\rho^-}\omega_1(x) = q_1(x), \quad x\in\Gamma, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{\rho^-}\left\{\int\limits_\Gamma \frac{\partial\mathcal{E}(x,y)}{\partial\mathbf{n}_S(x)}\omega_1(y)\mathrm{d}\,\Gamma(y) + \int\limits_S \frac{\partial\mathcal{E}(x,y)}{\partial\mathbf{n}_S(x)}\omega_2(y)\mathrm{d}\,S(y)\right\}$$
$$+\frac{1}{2\rho^-}\omega_2(x) = q_2(x), \quad x\in S.$$

Так как ядра в интегральных операторах в (3.5) содержат только слабые особенности, то матричный оператор системы является Фредгольмовым и условием разрешимости системы (3.5) является ортогональность правой части (q_1, q_2) ядру сопряжённого оператора. Найдём это ядро.

Запишем систему (3.5) в операторном виде

$$\begin{aligned} K_{11}\omega_1 + K_{12}\omega_2 + \frac{\rho^+ + \rho^-}{2\rho^+\rho^-}\omega_1 = q_1 \ \text{ на }\ \Gamma,\\ K_{21}\omega_1 + K_{22}\omega_2 + \frac{2}{\rho^-}\omega_2 = q_2 \ \text{ на }\ S. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Нам надо найти все решения Ψ_1, Ψ_2 сопряжённой к (3.6) однородной системы

$$\mathbb{K}^*\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\rho^+ + \rho^-}{2\rho^+\rho^-}\Psi_1\\ -\frac{1}{-2\rho^-}\Psi_2\end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

где матрица

$$\mathbb{K}^* = \begin{pmatrix} K_{11}^T & K_{21}^T \\ \\ K_{12}^T & K_{22}^T \end{pmatrix},$$

и

$$(K_{11}^T \Psi_1)(x) = \frac{\rho^+ + \rho^-}{\rho^+ \rho^-} \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{E}(x,y)}{\partial \mathbf{n}_0(y)} \Psi_1(y) \mathrm{d}\,\Gamma(y), \qquad x \in \Gamma,$$

$$(K_{21}^T \Psi_1)(x) = -\frac{1}{\rho^-} \int\limits_{S} \frac{\partial \mathcal{E}(x,y)}{\partial \mathbf{n}_S(y)} \Psi_2(y) \mathrm{d}\,S(y), \qquad x \in \Gamma,$$

$$(K_{12}^T \Psi_1)(x) = \frac{\rho^+ + \rho^-}{\rho^+ \rho^-} \int\limits_{\Gamma} \frac{\partial \mathcal{E}(x,y)}{\partial \mathbf{n}_0(y)} \Psi_1(y) \mathrm{d}\,\Gamma(y), \qquad x \in S,$$

$$(K_{22}^T \Psi_2)(x) = -\frac{1}{\rho^-} \int\limits_{S} \frac{\partial \mathcal{E}(x,y)}{\partial \mathbf{n}_S(y)} \Psi_2(y) \mathrm{d}\,S(y), \qquad x \in S.$$

Будем искать решение системы (3.7) в виде двух констант: $(\Psi_1, \Psi_2) = (c_1, c_2)$. Подставив эту пару в (3.7) и воспользовавшись формулами Гаусса, получаем систему для определения (c_1, c_2):

$$\frac{\rho^+ - \rho^-}{\rho^+ \rho^-} \frac{c_1}{2} - \frac{c_2}{\rho^-} = -\frac{\rho^+ + \rho^-}{2\rho^+ \rho^-} c_1, \quad 0 - \frac{1}{\rho^-} \frac{c_2}{2} = -\frac{1}{2\rho^-} c_2,$$

откуда находим $c_1 = 1$, $c_2 = 1$.

Покажем теперь, что других решений у системы (3.7) нет. Это равносильно по теореме Фредгольма тому, что ядро оператора $\mathbb{K}$ одномерно, то есть любые два решения однородной системы (3.6) будут линейно зависимы.

Рассмотрим задачу (3.3), которая эквивалентна (3.6), при $q_1 = 0$, $q_2 = 0$. Проинтегрируем по частям уравнение в (3.3) по $\Omega^- \cup \Omega^+$, умножив его на s_2:

$$0 = -\int\limits_{\Omega^- \cup \Omega^+} \frac{1}{\rho^\pm} |\nabla s_2|^2 dx + \int\limits_{\Gamma} \Big[\frac{1}{\rho^\pm} \frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{n}_0}\Big]\Big|_{\Gamma} s_2 \mathrm{d}\,\Gamma + \frac{1}{\rho^-} \int\limits_{S} \frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{n}_S} s_2 \mathrm{d}\,S.$$

Отсюда следует, что $|\nabla s_2| = 0$ на $\Omega^- \cup \Omega^+$ и, по непрерывности, s_2 равно константе $\Omega^- \cup \overline{\Omega^+}$. Обозначим её через b. Пусть ей соответствуют плотности $(\omega_1, \omega_2) \equiv \omega$. Допустим теперь, что $\overline{s_2} = \overline{b}$ – другое решение однородной задачи (3.3). Ему соответствует $\overline{\omega} = (\overline{\omega_1}, \overline{\omega_2})$. Покажем, что $\widetilde{\omega} \equiv \overline{b}\omega - b\overline{\omega} = 0$. С этой целью рассмотрим функцию

$$\widetilde{s}_2 = \int_\Gamma \mathcal{E}\widetilde{\omega}_1 \mathrm{d}\,\Gamma + \int_S \mathcal{E}\widetilde{\omega}_2 \mathrm{d}\,S.$$

Очевидно, что $\widetilde{s}_2 = \overline{b}s_2 - b\bar{s}_2 = 0$ внутри $\overline{\Omega^-} \cup \overline{\Omega^+}$. Следовательно,

$$\widetilde{\omega}_1 = \Big[\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{n}_0}\Big]\Big|_\Gamma = 0.$$

Вне S $s_2 \to 0$ как сумма потенциалов простого слоя, и поэтому по непрерывности $s_2 = 0$ вне S. Значит, и

$$\widetilde{\omega}_2 = \Big[\frac{\partial s_2}{\partial \mathbf{n}_S}\Big]\Big|_S = 0.$$

Таким образом, $\widetilde{\omega} = 0$, откуда следует, что ω и $\overline{\omega}$ линейно зависимы.

Итак, мы получили, что правая часть системы (3.6) (q_1, q_2) должна быть ортогональна $(1,1)$, то есть

$$\int_\Gamma q_1 \mathrm{d}\,\Gamma = -\int_S q_2 \mathrm{d}\,S. \tag{3.8}$$

Это является необходимым и достаточным условием разрешимости (3.6), при этом два решения системы (3.3) могут отличаться только на константу.

Фиксируем функцию s_2 тем, что соответствующие ей плотности (ω_1, ω_2) ортогональны ядру сопряжённого оператора, то есть тоже будут удовлетворять (3.8):

$$\int_\Gamma \omega_1 \mathrm{d}\,\Gamma = -\int_S \omega_2 \mathrm{d}\,S.$$

Для такого решения задачи (3.3), аналогично внутренней задаче Неймана, верны оценки

$$|s_2|^{(\gamma)}_{\cup\Omega^\pm} \le c(|q_1|_\Gamma + |q_2|_S) \tag{3.9}$$

(см. [9]),

$$|\nabla s_2|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} \le c(|q_1|^{(\alpha)}_\Gamma + |q_2|^{(\alpha)}_S) \tag{3.10}$$

(см. [10]).

Суммируя соответствующие неравенства в (3.4) и (3.9), (3.10), получаем

$$|s_0|^{(\gamma)}_{\cup\Omega^\pm} + |\nabla s_0|_{\cup\Omega^\pm} \le c\{\langle\mathbb{D}\rangle^{(\gamma)}_{\cup\Omega^\pm} + |d|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |p_{00}|^{(1)}_\Gamma + |p_{01}|_\Gamma + |p_{02}|_S\}, \tag{3.10$'$}$$

$$\langle\nabla s_0\rangle^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} \le c\{|d|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |p_{00}|^{(!+\alpha)}_\Gamma + |p_{01}|^{(\alpha)}_\Gamma + |p_{02}|^{(\alpha)}_S\} \le cF(0).$$

Из (3.8) вытекает условие разрешимости задачи (2.3)

$$\int\limits_\Gamma p_{01}\,\mathrm{d}\,\Gamma - \int\limits_{\Omega^-\cup\Omega^+} \nabla\cdot\mathbf{d}\,\mathrm{d}\,x = -\int\limits_S p_{02}\,\mathrm{d}\,S. \tag{3.11}$$

Здесь мы использовали интегрирование по частям и учли уравнения (3.1), (3.2).

Принимая во внимание соотношения

$$\mathcal{D}_t r = \mathcal{D}_t(\nabla_{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{w}) = \nabla\cdot(\mathcal{D}_t\mathbb{B}^*\mathbf{w} + \mathbb{A}^*\mathcal{D}_t\mathbf{w})$$

и

$$[\mathcal{D}_t\mathbf{w}]|_\Gamma = 0, \quad \mathcal{D}_t\mathbf{w}|_S = 0,$$

не трудно проверить, что (3.11) сводится к равенству

$$\int\limits_\Gamma \mathbf{n}_0\cdot[\nu^\pm\nabla^2\mathbf{w}_0]|_\Gamma\,\mathrm{d}\,\Gamma = -\int\limits_S \mathbf{n}_S\cdot\nu^-\nabla^2\mathbf{w}_0\,\mathrm{d}\,S, \tag{3.12}$$

которое верно в силу того, что $\nabla\cdot\mathbf{w}_0 = 0$ в $\Omega^-\cup\Omega^+$.

Из аналогичных соображений равенство (3.11) выполняется и для системы (1.6). Действительно, учитывая (3.12) для $\mathbf{v}_0$, имеем

$$-\int\limits_\Gamma [\mathbf{n}_0\cdot\beta^\pm\theta_0\mathbf{g}]|_\Gamma\,\mathrm{d}\,\Gamma - \int\limits_{\Omega^-\cup\Omega^+} \nabla\cdot(\mathbf{f} - \beta^\pm\theta_0\mathbf{g} - \mathcal{D}_t\mathbb{B}^*|_{t=0}\mathbf{v}_0)\,\mathrm{d}\,x$$

$$= -\int\limits_S \mathbf{n}_S \cdot (\mathbf{f} - \beta^- \theta_0 \mathbf{g}) \mathrm{d}\, S.$$

Выполним интегрирование по частям в объёмном интеграле и сократим одинаковые члены в граничных интегралах. Помня, что здесь мы считаем $\mathbf{f}$ непрерывной вектор-функцией при переходе через Γ, получаем

$$\int\limits_\Gamma [\mathbf{n}_0 \cdot \mathcal{D}_t \mathbb{B}^*|_{t=0} \mathbf{v}_0]|_\Gamma \mathrm{d}\, \Gamma = -\int\limits_S \mathcal{D}_t \mathbb{B}^*|_{t=0} \mathbf{v}_0 \mathrm{d}\, S.$$

Правая часть этого равенства равна нулю ввиду того, что $\mathbf{v}_0|_S = 0$. В интеграле слева мы воспользуемся равенством

$$[\mathbf{n}_0 \cdot \mathcal{D}_t \mathbb{B}^*|_{t=0} \mathbf{v}_0]|_\Gamma = \mathbf{v}_0 [\mathcal{D}_t \mathbb{B}|_{t=0} \mathbf{n}_0]|_\Gamma.$$

Последний скачок равен нулю, так как вектор $\mathbb{B}\mathbf{n}_0$ непрерывен при переходе через Γ при любом $t > 0$. Это было показано в [4].

Таким образом, мы приходим к выводу, что задача (1.6) разрешима однозначно с точностью до константы и существует её решение, для которого верны оценки

$$|q_0|^{(\gamma)}_{\cup\Omega^\pm} + |\nabla q_0|_{\cup\Omega^\pm} \le c\{\langle \mathbb{D} \rangle^{(\gamma)}_{\cup\Omega^\pm} + |f|_{t=0}|^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3} + |\theta_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |\mathcal{D}_t \mathbb{B}^*|_{t=0} \mathbf{v}_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |\mathbf{v}_0|^{(2)}_{\cup\Omega^\pm} + |H_0|^{(1)}_\Gamma + |a|_S\}, \quad (3.13)$$

$$\langle \nabla q_0 \rangle^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} \le c\{|\mathbf{f}|_{t=0}|^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3} + |\theta_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |\mathcal{D}_t \mathbb{B}^*|_{t=0} \mathbf{v}_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |H_0|^{(1+\alpha)}_\Gamma + |a|^{(\alpha)}_S\}, \quad (3.14)$$

где $\mathbb{D} = \{D_k\}_{k=1}^3$, $D_k = \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial \xi_k}$,

$$\mathbf{W} = \int\limits_{\Omega^+ \cup \Omega^-} \mathcal{E}(\xi, \eta)(\mathbf{f}|_{t=0} - \beta^\pm \theta_0 \mathbf{g} - \mathcal{D}_t \mathbb{B}^*|_{t=0} \mathbf{v}_0)(\eta) \mathrm{d}\, \eta.$$

Из оценки градиента ньютонова потенциала для ограниченной области следует, что

$$\langle \mathbb{D} \rangle^{(\gamma)}_{\cup\Omega^\pm} \le c\{|\mathbf{f}|_{\mathbb{R}^3} + |\theta_0|_{\cup\Omega^\pm} + |\mathcal{D}_t \mathbb{B}^*|_{t=0} \mathbf{v}_0|_{\cup\Omega^\pm}\}.$$

Так как

$$|\mathcal{D}_t\mathbb{B}^*|_{t=0}\mathbf{v}_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} \le |\mathcal{D}_t\mathbb{B}^*|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm}|\mathbf{v}|_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} \le c|\nabla\mathbf{v}_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm}|\mathbf{v}_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm},$$

то окончательно выводим

$$\begin{aligned}|q_0|^{(\gamma)}_{\cup\Omega^\pm} + |\nabla q_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} \le c\{|\mathbf{f}(\cdot,0)|^{(\alpha)}_{\mathbb{R}^3} + |\theta_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm}\\ + |H_0|^{(1+\alpha)}_{\Gamma} + |a|^{(\alpha)}_{S} + (1+|\nabla\mathbf{v}_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm})|\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^\pm}\}.\end{aligned} \tag{3.15}$$

В заключение этого параграфа заметим в качестве пояснения к доказательству теоремы 2.1, что оценки типа $(3.10')$ выполнены для давления s при каждом значении времени t. Рассматривая приращения функции давления по t из $(3.10')$ можно вывести оценку $\|s\|^{(\gamma,1+\gamma)}_{\cup Q_T^\pm}$ через слабую норму вектора скорости $\mathbf{w}$ (см. [3]).

4. Локальная разрешимость задачи (1.4)

В этом параграфе мы докажем теорему 1.1.

Доказательство. Положим $(\mathbf{u}^{(0)}, q^{(0)}, \theta^{(0)}) = (\mathbf{v}_0, q_0, \theta_0)$, где q_0 – решение задачи (1.6). Определим последующее приближение $(\mathbf{u}^{(m+1)}, q^{(m+1)})$, $m = 0, 1, ...$, как решение задачи

$$\begin{gathered}\mathcal{D}_t\mathbf{u}^{(m+1)} - \nu^\pm\nabla^2_m\mathbf{u}^{(m+1)} + \frac{1}{\rho^\pm}\nabla_m q^{(m+1)} = \mathbf{f}(X_m,t) - \beta^\pm\mathbf{g}\hat{\theta}^{(m)},\\ \nabla_m\cdot\mathbf{u}^{(m+1)} = 0 \ \text{ в } \ Q_T^\pm,\\ \mathbf{u}^{(m+1)}\big|_{t=0} = \mathbf{v}_0 \ \text{ в } \ \Omega^-\cup\Omega^+,\\ [\mathbf{u}^{(m+1)}]\big|_{G_T} = 0, \quad \mathbf{u}^{(m+1)}\big|_{S_T} = 0,\\ [\mu^\pm\Pi_0\Pi_m\mathbb{S}_m(\mathbf{u}^{(m+1)})\mathbf{n}_m]\big|_{G_T} = 0, \qquad (4.1)\\ [\mathbf{n}_0\cdot\mathbb{T}_m(\mathbf{u}^{(m+1)},q^{(m+1)})\mathbf{n}_m]|_{G_T} - \sigma\mathbf{n}_0\cdot\Delta_m(t)\int_0^t \mathbf{u}^{(m+1)}\big|_\Gamma\,\mathrm{d}\tau\\ = \sigma H_0(\xi) + \sigma\mathbf{n}_0\cdot\int_0^t \dot{\Delta}_m(\tau)\boldsymbol{\xi}\big|_\Gamma\mathrm{d}\tau \ \text{ на } \ G_T.\end{gathered}$$

Здесь $\nabla_m = \nabla_{\mathbf{u}^{(m)}}$, $\Pi_m\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} - \mathbf{n}_m(\mathbf{n}_m\cdot\boldsymbol{\omega})$, $\mathbf{n}_m$ – внешняя нормаль к $\Gamma_m = \{\mathbf{x} = \mathbf{X}_m(\xi,t), \xi\in\Gamma\}$, $\mathbf{X}_m = \mathbf{X}_{\mathbf{u}^{(m)}}$; $\mathbb{S}_m = \mathbb{S}_{\mathbf{u}^{(m)}}$, $\mathbb{T}_m = \mathbb{T}_{\mathbf{u}^{(m)}}$; $\Delta_m(t)$ – это оператор Бельтрами–Лапласа на Γ_m.

Определим температурное приближение $\hat{\theta}^{(m+1)}$, $m=0,1,\dots$, как решение задачи

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}_t\hat{\theta}^{(m+1)} - k^{\pm}\nabla_m^2\hat{\theta}^{(m+1)} = 0 \quad \text{в} \quad Q_T^{\pm},\\
&\hat{\theta}^{(m+1)}|_{t=0} = \theta_0 \quad \text{в} \quad \Omega^- \cup \Omega^+,\\
&[\hat{\theta}^{(m+1)}]|_{G_T} = 0, \quad \hat{\theta}^{(m+1)}|_{S_T} = a,\\
&[k^{\pm}\mathbf{n}_m\cdot\nabla_m\hat{\theta}^{(m+1)}]|_{G_T} = 0 \quad \text{на } G_T.
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Предположим, что $\mathbf{u}^{(m)}$ существует и удовлетворяет неравенству (2.2) на промежутке $(0,T_m]\subset(0,T]$. Чтобы применить теорему 2.1 к задаче (4.1), проверим её условия. Что касается первого предположения, то мы можем положить

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{h}\equiv\mathbf{h}_m = -\mathbb{A}^{(m)*}\big(\mathbf{f}-\beta^{\pm}\mathbf{g}\hat{\theta}^{(m)}\big), \qquad (4.3)\\
&\mathbb{G}\equiv\mathbb{G}_m(\xi,t) = -\nabla\int\limits_{\cup\Omega^{\pm}}\mathcal{E}(\xi,\eta)\mathbb{A}^{(m)*}\big(\mathbf{f}(\eta,t)-\beta^{\pm}\mathbf{g}\hat{\theta}^{(m)}\big)\,\mathrm{d}\,\eta,
\end{aligned}
$$

где $\mathbb{A}^{(m)}=\mathbb{A}(\mathbf{u}^{(m)})$. Первое равенство в (4.3) следует из соотношения $\mathbb{A}^{(m)}\nabla\cdot\mathbf{w}=\nabla\cdot\mathbb{A}^{(m)*}\mathbf{w}$, которое вытекает из равенства $\frac{\partial A_{ij}^{(m)}}{\partial\xi_j}=0$, верного для матрицы алгебраических дополнений матрицы Якоби любого преобразования. Кроме того, очевидно, что $\big[\mathbf{n}_0\cdot\big(\mathbf{h}_m +\mathbb{A}^{(m)*}\big(\mathbf{f}-\beta^{\pm}\hat{\theta}^{(m)}\mathbf{g}\big)\big)\big]\big|_{\Gamma}=0$. Третья и четвёртая группы предположений теоремы 2.1 следуют из гипотез (1.5), (1.6).

Оценим потенциалы $\mathbf{h}_m$, $\mathbb{G}_m$ на основании результатов работ [4, 8]:

$$
\begin{aligned}
&|\mathbf{h}_m|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}} + \|\mathbb{G}_m\|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}} + |\mathbb{G}_m|^{(\gamma,0)}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}} \le\\
&c(T_m)\Big(1+(T_m+T_m^{\gamma/2})|\mathbf{u}^{(m)}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}}\Big)\Big(|\mathbf{f}|^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{t,\cup Q^{\pm}_{T_m}} + \|\hat{\theta}^{(m)}\|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}}\Big).
\end{aligned}
$$

Далее

$$
\begin{aligned}
&|\sigma H_0(\xi)|^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}_{G_{T_m}} \le c|H_0|^{(1+\alpha)}_{\Gamma},\\
&|\sigma\mathbf{n}_0\cdot\dot{\Delta}_m(\tau)\boldsymbol{\xi}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G_{T_m}} \le c|\nabla\mathbf{u}^{(m)}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G_{T_m}} \le c_3|\mathbf{u}^{(m)}|^{(2+\alpha,1+\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}}.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Таким образом, из теоремы 2.1 и неравенств (4.4), (4.5) следует, что существует единственное решение $(\mathbf{u}^{(m+1)}, q^{(m+1)})$ задачи (4.1) на интервале $(0, T_m]$ и для него верна оценка

$$N_{T_m}[\mathbf{u}^{(m+1)}, q^{(m+1)}] \le c_4(T_m)\Big\{\Big(1 + (T_m + T_m^{\frac{\gamma}{2}})|\mathbf{u}^{(m)}|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}}\Big)$$

$$\times\Big(|\mathbf{f}|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}} + |\mathbf{f}|^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{t,\cup Q^{\pm}_{T_m}} + |\hat{\theta}^{(m)}|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}} + \|\hat{\theta}^{(m)}\|^{(\gamma,1+\alpha)}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}}\Big) + |H_0|^{(1+\alpha)}_{\Gamma}$$

$$+|\mathbf{u}^{(m)}|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}} + \Big(1 + T_m^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\mathbf{u}^{(m)}|_{\cup Q^{\pm}_{T_m}} + |\nabla\mathbf{u}^{(m)}|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}}\Big)|\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^{\pm}}\Big\}.$$

Значит, при $m = 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} N_{T_0}[\mathbf{u}^{(1)}, q^{(1)}] \le c_4(T_0)\Big\{&\big(1 + (T_0 + T_0^{\frac{\gamma}{2}})|\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^{\pm}}\big) \\ &\times\Big(|\mathbf{f}|^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}} + |\mathbf{f}|^{(\frac{1+\alpha-\gamma}{2})}_{t,\cup Q^{\pm}_{T_m}} + |\theta_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^{\pm}}\Big) + |H_0|^{(1+\alpha)}_{\Gamma} \\ &+ \big(2 + T_0^{\frac{1-\alpha}{2}}|\mathbf{v}_0|^{(1)}_{\cup\Omega^{\pm}} + |\mathbf{v}_0|^{(1+\alpha)}_{\cup\Omega^{\pm}}\big)|\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^{\pm}}\Big\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Условия согласования (2.5) для задачи (4.2) следуют из соотношений (1.5), поэтому теорема 2.4 обеспечивает нам при каждом $m = 0, 1, 2, ..$ оценку

$$\begin{aligned} |\hat{\theta}^{(m+1)}|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_{T_m}} \le c_5(T_m)\Big\{&|a|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{S_{T_m}} \\ &+ \big(1 + \delta + T_m^{\frac{1-\alpha}{2}}|\mathbf{v}_0|^{(1)}_{\cup\Omega^{\pm}}\big)|\theta_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^{\pm}}\Big\} \equiv \Theta[T_m]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

По индукции мы можем заключить таким образом, что для любого $m \ge 0$ системы (4.1), (4.2) имеют решения $(\mathbf{u}^{(m+1)}, q^{(m+1)})$, $\hat{\theta}^{(m+1)}$ на временном интервале $(0, T_{m+1}] \subset (0, T]$ таком, что предыдущее приближение $(\mathbf{u}^{(m)}, q^{(m)})$, $\hat{\theta}^{(m)}$ тоже определено на нем и $\mathbf{u}^{(m)}$ удовлетворяет (2.2) с некоторым малым δ.

Теперь нам надо показать, что существует такое $T^* > 0$, что для $\forall m \in \mathbb{N}$ $T_m \ge T^*$, нормы $N_{T^*}[\mathbf{u}^{(m)}, q^{(m)}, \hat{\theta}^{(m)}] \equiv N_{T^*}[\mathbf{u}^{(m)}, q^{(m)}] + |\hat{\theta}^{(m)}|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_{T^*}}$ равномерно ограничены и последовательность $\{\mathbf{u}^{(m)}$, $q^{(m)}$, $\hat{\theta}^{(m)}\}$, $m > 0$, сходится к решению задачи (1.4).

С этой целью мы составим разности систем (4.1), соответствующих $m = j$ и $m = j-1$. Функции $\mathbf{w}^{(j+1)} = \mathbf{u}^{(j+1)} - \mathbf{u}^{(j)}$, $s^{(j+1)} = q^{(j+1)} - q^{(j)}$, $j = 1, 2...$, являются решением следующей задачи:

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_t \mathbf{w}^{(j+1)} - \nu^{\pm}\nabla_j^2 \mathbf{w}^{(j+1)} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla_j s^{(j+1)} = \mathbf{f}(X_j,t) - \mathbf{f}(X_{j-1},t) \\
-\beta^{\pm}\mathbf{g}\psi^{(j)} + \mathbf{l}_1^{(j)}(\mathbf{u}^{(j)},q^{(j)}) - \mathbf{l}_1^{(j-1)}(\mathbf{u}^{(j)},q^{(j)}) \equiv \mathbf{f}^{(j)}, \\
\nabla_j \cdot \mathbf{w}^{(j+1)} = l_2^{(j)}(\mathbf{u}^{(j)}) - l_2^{(j-1)}(\mathbf{u}^{(j)}) \equiv r^{(j)} \quad \text{в} \quad Q^{\pm}_{T_{m+1}}, \\
\mathbf{w}^{(j+1)}|_{t=0} = 0 \ \text{ в } \ \Omega^- \cup \Omega^+, \quad \big[\mathbf{w}^{(j+1)}\big]\big|_{G_{T_{m+1}}} = 0, \quad \mathbf{w}^{(j+1)}\big|_{S_{T_{m+1}}} = 0, \\
\big[\mu^{\pm}\Pi_0\Pi_j\mathbb{S}_j(\mathbf{w}^{(j+1)})\mathbf{n}_j\big]\big|_{G_{T_{m+1}}} = \mathbf{l}_3^{(j)}(\mathbf{u}^{(j)}) - \mathbf{l}_3^{(j-1)}(\mathbf{u}^{(j)}), \\
[\mathbf{n}_0 \cdot \mathbb{T}_j(\mathbf{w}^{(j+1)}, s^{(j+1)})\mathbf{n}_j]\big|_{G_{T_{m+1}}} - \sigma\mathbf{n}_0 \cdot \Delta_j(t)\int_0^t \mathbf{w}^{(j+1)}\big|_{\Gamma} \mathrm{d}\,\tau \\
= l_4^{(j)}(\mathbf{u}^{(j)},q^{(j)}) - l_4^{(j-1)}(\mathbf{u}^{(j)},q^{(j)}) + \int_0^t \big(l_5^{(j)}(\mathbf{u}^{(j)}) - l_5^{(j-1)}(\mathbf{u}^{(j)})\big)\mathrm{d}\,\tau \\
+\sigma\mathbf{n}_0 \cdot \int_0^t \big(\dot{\Delta}_j(\tau) - \dot{\Delta}_{j-1}(\tau)\big)\boldsymbol{\xi}\big|_{\Gamma}\mathrm{d}\,\tau \quad \text{на} \quad G_{T_{m+1}}.
\end{gathered}
\tag{4.8}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
\mathbf{l}_1^{(j)}(\mathbf{w},s) &= \nu^{\pm}(\nabla_j^2 - \nabla^2)\mathbf{w} + \frac{1}{\rho^{\pm}}(\nabla - \nabla_j)s \equiv \frac{\partial L_{1k}^{(j)}(\mathbf{w},s)}{\partial \xi_k}, \\
l_2^{(j)}(\mathbf{w}) &= (\nabla - \nabla_j)\cdot\mathbf{w} = -\mathbb{B}^{(j)}\nabla\cdot\mathbf{w} \equiv \nabla \cdot L_2^{(j)}(\mathbf{w}), \\
\mathbf{l}_3^{(j)}(\mathbf{w}) &= \big[\mu^{\pm}\Pi_0(\mathbb{S}(\mathbf{w})\mathbf{n}_0 - \Pi_j\mathbb{S}_j(\mathbf{w})\mathbf{n}_j)\big]\big|_{\Gamma}, \\
l_4^{(j)}(\mathbf{w},s) &= \big[\mathbf{n}_0\cdot(\mathbb{T}(\mathbf{w},s)\mathbf{n}_0 - \mathbb{T}_j(\mathbf{w},s)\mathbf{n}_j)\big]\big|_{\Gamma} \\
&= \big[\mathbf{n}_0\cdot(\mathbf{n}_j - \mathbf{n}_0)s + \mathbf{n}_0\cdot(\mathbb{S}(\mathbf{w})\mathbf{n}_0 - \mathbb{S}_j(\mathbf{w})\mathbf{n}_j)\big]\big|_{\Gamma}, \\
l_5^{(j)}(\mathbf{w}) &= \sigma\mathbf{n}_0\cdot\mathcal{D}_t\Big\{(\Delta_j(t) - \Delta(0))\int_0^t \mathbf{w}|_{\Gamma}\mathrm{d}\,t'\Big\} \\
&= \sigma\mathbf{n}_0\cdot\Big\{(\Delta_j(t) - \Delta(0))\mathbf{w} + \dot{\Delta}_j(t)\int_0^t \mathbf{w}|_{\Gamma}\,\mathrm{d}\,t'\Big\},
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

где

$$
\begin{aligned}
L_{1k}^{(j)}(\mathbf{w},s) &= \nu^{\pm}\big(B_{ik}^{(j)}A_{im}^{(j)} + B_{km}^{(j)}\big)\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial \xi_m} - \mathbb{B}^{(j)}\mathbf{e}_k\frac{s}{\rho^{\pm}},\\
L_2^{(j)}(\mathbf{w}) &= -\mathbb{B}^{(j)*}\mathbf{w},\\
(\mathbb{S}(\mathbf{w}))_{ik} &= \frac{\partial w_i}{\partial \xi_k} + \frac{\partial w_k}{\partial \xi_i},
\end{aligned}
$$

$\mathbf{e}_k$ – это орт в направлении ξ_k.

Кроме того, заметим, что функция $\psi^{(j+1)} = \hat{\theta}^{(j+1)} - \hat{\theta}^{(j)}$, $j = 1, ...$, есть решение задачи, которая получается в результате вычитания систем (4.2) с индексами $j+1$ и j:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_t\psi^{(j+1)} - k^{\pm}\nabla_j^2\psi^{(j+1)} &= k^{\pm}\nabla_j^2\hat{\theta}^{(j)} - k^{\pm}\nabla_{j-1}^2\hat{\theta}^{(j)}\\
&\equiv h_1^{(j)}(\hat{\theta}^{(j)}) - h_1^{(j-1)}(\hat{\theta}^{(j)}) \quad \text{в} \quad Q_{T_{m+1}}^{\pm},
\end{aligned}
$$

$$
\psi^{(j+1)}|_{t=0} = 0 \ \text{ в } \ \Omega^- \cup \Omega^+, \quad [\psi^{(j+1)}]|_{\Gamma} = 0, \quad \psi^{(j+1)}|_S = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
[k^{\pm}\mathbf{n}_j\cdot\nabla_j\psi^{(j+1)}]|_{\Gamma} &= -[k^{\pm}\mathbf{n}_j\cdot\nabla_j\hat{\theta}^{(j)}]|_{\Gamma} + [k^{\pm}\mathbf{n}_{j-1}\cdot\nabla_{j-1}\hat{\theta}^{(j)}]|_{\Gamma}\\
&\equiv h_2^{(j)}(\hat{\theta}^{(j)}) - h_2^{(j-1)}(\hat{\theta}^{(j)}) \ \text{ на } \ G_{T_{m+1}}. \qquad (4.10)
\end{aligned}
$$

Здесь $h_i^{(j)}$ вычисляются по формулам (2.8), где $\mathbf{u}$ заменено на $\mathbf{u}^{(j)}$.

Оценим решение (4.10), используя теорему 2.4 и лемму 2.5:

$$
\begin{aligned}
|\psi^{(j+1)}|_{\cup Q_T^{\pm}}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} &\le |h_1^{(j)}(\hat{\theta}^{(j)}) - h_1^{(j-1)}(\hat{\theta}^{(j)})|_{\cup Q_T^{\pm}}^{(\alpha,\frac{\alpha}{2})}\\
&\quad + |h_2^{(j)}(\hat{\theta}^{(j)}) - h_2^{(j-1)}(\hat{\theta}^{(j)})|_{G_T}^{(1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2})}\\
&\le c_5\Big\{|\hat{\theta}^{(j)}|_{\cup Q_T^{\pm}}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}M_T[\mathbf{w}^{(j)}] + T^{\frac{1-\alpha}{2}}|\nabla\hat{\theta}^{(j)}|_{\cup Q_T^{\pm}}|\nabla\mathbf{w}^{(j)}|_{\cup Q_T^{\pm}}\Big\},\\
&\qquad j = 1,2,..., \quad T \le T_{m+1}. \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

При $j = 0$ ввиду неравенства (4.7) имеем:

$$
|\psi^{(1)}|_{\cup Q_{T_0}^{\pm}}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} \le |\hat{\theta}^{(1)}|_{\cup Q_{T_0}^{\pm}}^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})} + |\theta_0|_{\cup\Omega^{\pm}}^{(2+\alpha)} \le 2\Theta[T_0]. \qquad (4.12)
$$

Чтобы применить теорему 2.1 к задаче (4.8), нам нужно проверить только первые два предположения этой теоремы. Операторы (4.9) и их разности при разных j были оценены в [4, §4]. Следуя этой работе, в тождестве

$$\mathcal{D}_t r^{(j)} - \nabla_j \cdot \mathbf{f}^{(j)} = \nabla \cdot \mathbf{h}^{(j)}$$

положим

$$\mathbf{h}^{(j)} = (\mathbb{B}^{(j-1)*} - \mathbb{B}^{(j)*})\mathcal{D}_t \mathbf{u}^{(j)} + \mathcal{D}_t(\mathbb{B}^{(j-1)*} - \mathbb{B}^{(j)*})\mathbf{u}^{(j)} - \mathbb{A}^{(j)*}\mathbf{f}^{(j)}.$$

Легко видеть, что

$$[(\mathbf{h}^{(j)} + \mathbb{A}^{(j)*}\mathbf{f}^{(j)}) \cdot \mathbf{n}_0]|_{G_t} = 0.$$

Поскольку

$$\mathbf{f}^{(j)} = \partial\big(\mathbf{L}_{1k}^{(j)}(\mathbf{u}^{(j)}, q^{(j)}) - \mathbf{L}_{1k}^{(j-1)}(\mathbf{u}^{(j)}, q^{(j)})\big)/\partial\xi_k \\ - \beta^{\pm}\mathbf{g}\psi^{(j)} + \mathbf{f}(X_j, t) - \mathbf{f}(X_{j-1}, t)$$

и

$$\mathcal{D}_t \mathbf{u}^{(j)} = \partial \mathbf{M}_k^{(j)}/\partial\xi_k + \mathbf{f}(X_{j-1}, t) - \beta^{\pm}\mathbf{g}_{j-1}\hat{\theta}^{(j-1)},$$

где

$$\mathbf{M}_k^{(j)} = \nu^{\pm}(\mathbb{A}^{(j-1)*}\mathbf{e}_k \cdot \nabla_{j-1})\mathbf{u}^{(j)} - \mathbb{A}^{(j-1)*}\mathbf{e}_k q^{(j)}/\rho^{\pm},$$

мы можем написать

$$\mathbf{h}^{(j)} = \nabla \cdot \mathbb{G}^{(j)} \equiv \partial \mathbf{G}_k^{(j)}/\partial\xi_k$$

с потенциалами

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_k^{(j)} &= (\mathbb{B}^{(j-1)*} - \mathbb{B}^{(j)*})\mathbf{M}_k^{(j)} - \mathbb{A}^{(j)*}\big(\mathbf{L}_{1k}^{(j)}(\mathbf{u}^{(j)}, q^{(j)}) \\
&\qquad - \mathbf{L}_{1k}^{(j-1)}(\mathbf{u}^{(j)}, q^{(j)})\big) + \frac{\partial \mathbf{W}^{(j)}}{\partial\xi_k}, \\
\mathbf{W}^{(j)} &= \int\limits_{\Omega^-\cup\Omega^+} \mathcal{E}(\xi,\eta)\Big\{\frac{\partial}{\partial\eta_i}(\mathbb{B}^{(j-1)*} - \mathbb{B}^{(j)*})\mathbf{M}_i^{(j)} \\
&\qquad - (\mathbb{B}^{(j-1)*} - \mathbb{B}^{(j)*})\Big(\mathbf{f}(X_{j-1}, t) - \beta^{\pm}\mathbf{g}\hat{\theta}^{(j-1)}\Big)
\end{aligned}$$

$$-\mathcal{D}_t(\mathbb{B}^{(j-1)*} - \mathbb{B}^{(j)*})\mathbf{u}^{(j)} - \frac{\partial \mathbb{A}^{(j)*}}{\partial\eta_i}\big(\mathbf{L}_{1i}^{(j)}(\mathbf{u}^{(j)}, q^{(j)}) - \mathbf{v}L_{1i}^{(j-1)}(\mathbf{u}^{(j)}, q^{(j)})\big) \\ + \mathbb{A}^{(j)*}\Big(\mathbf{f}(X_j, t) - \mathbf{f}(X_{j-1}, t) - \beta^{\pm}\mathbf{g}\psi^{(j)}\Big)\Big\}\, d\eta.$$

Предположим, что $(\mathbf{u}^{(j)}, q^{(j)})$, $\hat{\theta}^{(j)}$, $j = 0, \dots, m$, удовлетворяют неравенству

$$(T + T^{\gamma/2}) N_T[\mathbf{u}^{(j)}, q^{(j)}, \hat{\theta}^{(j)}] < \delta, \quad T \leqslant T_{m+1}, \tag{4.13}$$

которое является более сильным, чем (2.2).

Заметим, что

$$|\beta^{\pm} \mathbf{g} \psi^{(j)})|^{(\alpha, \frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_T} \le c |\psi^{(j)}|^{(2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_T}. \tag{4.14}$$

Для оценки правых частей системы (4.8) воспользуемся леммами 4.1–4.4 из [4], учитывая (4.14):

$$\begin{gathered}
|\mathbf{f}^{(j)}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} + |r^{(j)}|^{(1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_T} + |\mathbf{h}^{(j)}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} + \| \mathbb{G}^{(j)} \|^{(\gamma, 1+\alpha)}_{\cup Q^{\pm}_T} \\
+ |\mathbb{G}^{(j)}|^{(\gamma,0)}_{\cup Q^{\pm}_T} + |\mathbf{l}^{(j)}_3 - \mathbf{l}^{(j-1)}_3|^{(1+\alpha, \frac{1+\alpha}{2})}_{G_T} + |l^{(j)}_4 - l^{(j-1)}_4|_{G_T} \\
+ |\nabla_\Gamma (l^{(j)}_4 - l^{(j-1)}_4)|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G_T} + \| l^{(j)}_4 - l^{(j-1)}_4 \|^{(\gamma,1+\alpha)}_{G_T} + |l^{(j)}_5 - l^{(j-1)}_5|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G_T} \\
+ |\mathbf{n}_0 \cdot (\dot{\Delta}_j - \dot{\Delta}_{j-1}) \boldsymbol{\xi}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{G_T} \leqslant \\
c_6 \Big\{ (T + T^{\gamma/2}) N_T[\mathbf{u}^{(j)}, q^{(j)}, \hat{\theta}^{(j)}] |\mathbf{w}^{(j)}|^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} + (T + T^{\gamma/2}) |\mathbf{w}^{(j)}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} \\
+ |\nabla \mathbf{w}^{(j)}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} + P_T[\mathbf{w}^{(j)}] |\mathbf{u}^{(j)}(\cdot, 0)|^{(1)}_{\Omega^- \cup \Omega^+} + |\psi^{(j)}|^{(2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_T} \\
+ (T + T^{\gamma/2}) |\hat{\theta}^{(j-1)}|^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} |\mathbf{w}^{(j)}|^{(2+\alpha, 1+\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} \Big\}.
\end{gathered} \tag{4.15}$$

Здесь мы оценили нормы $\nabla \mathbf{W}^{(j)}$ с помощью леммы 3.3 из [4], применяя её к ограниченной области.

Так как $\mathbf{w}^{(j)}|_{t=0} = 0$, $\nabla \mathbf{w}^{(j)}|_{t=0} = 0$, то

$$\begin{aligned}
P_T[\mathbf{w}^{(j)}] |\mathbf{v}_0|^{(1)}_{\cup \Omega^{\pm}} &\le c_7 (T + T^{1/2}) |\mathbf{w}^{(j)}|^{(2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_T} |\mathbf{v}_0|^{(1)}_{\cup \Omega^{\pm}} \\
&\le c_7 \delta |\mathbf{w}^{(j)}|^{(2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_T}.
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$|\mathbf{w}^{(j)}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} + |\nabla \mathbf{w}^{(j)}|^{(\alpha,\alpha/2)}_{\cup Q^{\pm}_T} \leqslant \varepsilon |\mathbf{w}^{(j)}|^{(2+\alpha, 1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q^{\pm}_T} + c_1(\varepsilon) |\mathbf{w}^{(j)}|_{\cup Q^{\pm}_T}.$$

Значит, нормы правых частей системы (4.8) ограничены, и по теореме 2.1 мы можем заключить, что её решение $(\mathbf{w}^{(j+1)}, s^{(j+1)})$ удовлетворяет неравенству

$$N_T[\mathbf{w}^{(j+1)}, s^{(j+1)}] \le c_8(T)\Big\{(\delta+\varepsilon)N_T[\mathbf{w}^{(j)}, s^{(j)}] + c_1(\varepsilon)|\mathbf{w}^{(j)}|_{\cup Q_T^\pm}\Big\} + c_9|\psi^{(j)}|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q_T^\pm}, \quad T \le T_{m+1} \tag{4.16}$$

с неубывающей функцией c_8 по T.

Учитывая оценку (4.11) и то, что

$$M_T[\mathbf{w}^{(j)}] \le 2(T+T^{1/2})|\mathbf{w}^{(j)}|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q_T^\pm},$$

и

$$|\nabla\mathbf{w}^{(j-1)}|_{\cup Q_T^\pm} \le T^{\frac{1+\alpha}{2}}\langle\nabla\mathbf{w}^{(j-1)}\rangle^{(\frac{1+\alpha}{2})}_{t,\cup Q_T^\pm}, \quad j\ge 2,$$

заключаем

$$|\psi^{(j)}|^{(2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2})}_{\cup Q_T^\pm} \le 3c_5\delta N_T[\mathbf{w}^{(j-1)}, s^{(j-1)}]. \tag{4.17}$$

Суммируя неравенства (4.16) и (4.11) и имея ввиду (4.17), приходим к выводу, что

$$\begin{aligned} N_T^{(j+1)} \equiv N_T[\mathbf{w}^{(j+1)}, s^{(j+1)}, \psi^{(j+1)}] &\\ \le c_{14}(T)\big\{(\delta+\varepsilon)N_T^{(j)} + c_1(\varepsilon)|\mathbf{w}^{(j)}|_{\cup Q_T^\pm}\big\}&\\ + 3c_5\delta\big\{N_T^{(j-1)} + N_T^{(j)}\big\}, \quad j\ge 2, \quad T\le T_{m+1}.& \end{aligned} \tag{4.18}$$

Воспользуемся следующим неравенством

$$|\mathbf{w}^{(j)}|_{\cup Q_T^\pm} \le \int_0^T |\mathcal{D}_t\mathbf{w}^{(j)}(\cdot,t)|_{\cup\Omega^\pm}\,dt \le \int_0^T N_t[\mathbf{w}^{(j)}, s^{(j)}]\,dt \tag{4.19}$$

для окончательной оценки

$$N_T^{(j+1)} \le \kappa_1 N_T^{(j)} + \kappa_2 N_T^{(j-1)} + c_{15}\int_0^T N_t^{(j)}\,dt, \quad j=2,3..., \tag{4.20}$$

где $\kappa_1(T) = c_{14}(T)(\delta+\varepsilon) + 3c_5\delta$, $\kappa_2(T) = 3c_5\delta$.

При $j = 1$ из (4.16), (4.17), (4.12) (4.19) выводим:

$$N_T^{(2)} \le \kappa_1 N_T^{(1)} + c_{16}\Theta[T_0] + c_{15}\int\limits_0^T N_t^{(1)}\,dt. \qquad (4.21)$$

Просуммируем неравенства (4.20) по j от 2 до m, прибавим (4.21) и $N_T^{(1)}$, тогда сумму

$$\Sigma_{m+1}(T) = \sum_{j=1}^{m+1} N_T^{(j)}$$

можно оценить так:

$$\Sigma_{m+1}(T) \leqslant \kappa_1\Sigma_m(T) + \kappa_2\Sigma_{m-1}(T) + c_{15}\int\limits_0^T \Sigma_m(t)\,dt + F(T)$$

$$\leqslant \kappa\Sigma_{m+1}(T) + c_{15}\int\limits_0^T \Sigma_{m+1}(t)\,dt + F(T),$$

где $F(T) = N_T^{(1)} + c_{16}\Theta[T_0]$.

Наконец, выберем δ и ε таким образом, чтобы $\kappa \equiv \kappa_1(T_{m+1}) + \kappa_2(T_{m+1}) < 1$. Лемма Гронуолла, применённая к неравенству

$$\Sigma_{m+1}(T) \leqslant c_{17}\int\limits_0^T \Sigma_{m+1}(t)\,dt + \frac{1}{1-\kappa}F(T),$$

даёт

$$\begin{aligned} &N_T[\mathbf{u}^{(m+1)}, q^{(m+1)}, \hat\theta^{(m+1)}] \\ &\qquad \leqslant \Sigma_{m+1}(T) + |\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |\theta_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |\nabla q_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} \\ &\qquad \leqslant \frac{F(T)}{1-\kappa}e^{c_{17}T} + |\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |\theta_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |\nabla q_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm}. \qquad (4.22) \end{aligned}$$

Так как $(\mathbf{w}^{(1)}, s^{(1)}, \psi^{(1)}) = (\mathbf{u}^{(1)} - \mathbf{v}_0, q^{(1)} - q_0, \hat\theta^{(1)} - \theta_0)$, то норму $N_T^{(1)}$ можно оценить с помощью (4.6), (4.12), (3.16). Значит, $F(T)$ ограничена нормами заданных функций. Если мы выберем T так, что

$$\begin{aligned} &(T + T^{\gamma/2})\Big\{F(T)(1-\kappa)^{-1}e^{c_{17}T} + |\mathbf{v}_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} \\ &\qquad\qquad + |\theta_0|^{(2+\alpha)}_{\cup\Omega^\pm} + |\nabla q_0|^{(\alpha)}_{\cup\Omega^\pm}\Big\} \leqslant \delta, \qquad (4.23) \end{aligned}$$

то условие (4.13) будет выполнено и для $\mathbf{u}^{(m+1)}$, $q^{(m+1)}$, $\hat{\theta}^{(m+1)}$. Ясно, что такое T существует. Обозначим его через T^*.

Поскольку правая часть (4.22) не зависит от m, то мы заключаем, что функции $\mathbf{u}^{(m)}$, $q^{(m)}$, $\hat{\theta}^{(m)}$ определены на интервале $(0, T^*]$ для любого $m \in \mathbb{N}$ и подчиняются равномерной оценке. Значит, ряд $\sum_{j=1}^{\infty} N_{T^*}^{(j)}$ сходится, откуда вытекает, что последовательность $\{\mathbf{u}^{(m)}, q^{(m)}, \hat{\theta}^{(m)}\}_{m=0}^{\infty}$ тоже сходится по норме N_{T^*}. Переходя к пределу по $m \to \infty$ в (4.1), (4.2), мы убеждаемся, что $(\mathbf{u}, q, \hat{\theta}) = \lim_{m\to\infty}(\mathbf{u}^{(m)}, q^{(m)}, \hat{\theta}^{(m)})$ есть решение (1.4).

Нам остаётся доказать единственность полученного решения. Предположим, что $(\mathbf{u}, q, \hat{\theta})$ и $(\mathbf{u}', q', \hat{\theta}')$ – два решения задачи (1.4), и рассмотрим их разность $\mathbf{w} = \mathbf{u} - \mathbf{u}'$, $s = q - q'$, $\psi = \hat{\theta} - \hat{\theta}'$. Тройка $(\mathbf{w}, s, \psi)$ удовлетворяет системе типа (4.8), (4.10):

$$
\begin{gathered}
\mathcal{D}_t \mathbf{w} - \nu^{\pm}\nabla_{\mathbf{u}}^2 \mathbf{w} + \frac{1}{\rho^{\pm}}\nabla_{\mathbf{u}} s \\
= \mathbf{l}_1(\mathbf{u}', q') - \mathbf{l}_1'(\mathbf{u}', q') + \mathbf{f}(X_{\mathbf{u}}, t) - \mathbf{f}(X_{\mathbf{u}'}, t) - \beta^{\pm}\mathbf{g}\psi, \\
\nabla_{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{w} = l_2(\mathbf{u}') - l_2'(\mathbf{u}'), \quad \mathcal{D}_t\psi - k^{\pm}\nabla_{\mathbf{u}}^2\psi = h_1(\hat{\theta}') - h_1'(\hat{\theta}') \ \text{ в } \ Q_{T^*}^{\pm}, \\
\mathbf{w}|_{t=0} = 0, \quad \psi|_{t=0} = 0 \quad \text{в} \quad \Omega^- \cup \Omega^+, \\
[\mathbf{w}]|_{\Gamma} = 0, \quad [\psi]|_{\Gamma} = 0, \quad \mathbf{w}|_S = 0, \quad \psi|_S = 0, \\
[\Pi_0 \Pi \mathbb{S}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w})\mathbf{n}]|_{\Gamma} = \mathbf{l}_3(\mathbf{u}') - \mathbf{l}_3'(\mathbf{u}'), \\
[\mathbf{n}_0 \cdot \mathbb{T}_{\mathbf{u}}(\mathbf{w}, s)\mathbf{n}]|_{\Gamma} - \sigma \mathbf{n}_0 \cdot \Delta(t)\int_0^t \mathbf{w}\, d\tau|_{\Gamma} \\
= l_4(\mathbf{u}', q') - l_4'(\mathbf{u}', q') + \sigma\int_0^t \big(l_5(\mathbf{u}') - l_5'(\mathbf{u}')\big)\, d\tau, \\
[k^{\pm}\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{u}}\psi]|_{\Gamma} = h_2(\hat{\theta}') - h_2'(\hat{\theta}') \quad \text{на } G_{T^*}.
\end{gathered}
$$

Повторяя рассуждения, проведённые выше, мы приходим к неравенству, подобному (4.20):

$$
N_{T^*}[\mathbf{w}, s, \psi] \leqslant \kappa N_{T^*}[\mathbf{w}, s, \psi] + c_{21}\int^{T^*} N_t[\mathbf{w}, s, \psi] dt, \quad \kappa < 1,
$$

из которого по лемме Гроноулла следует, что $\mathbf{w} = 0$, $\nabla s = 0$, $\psi = 0$.

Теорема 1.1 полностью доказана. □

Литература

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Теоретическая физика.* Т. 6, "Наука", М. 1986.
2. И. В. Денисова, В. А. Солонников, *Разрешимость в гёльдеровских пространствах модельной начально-краевой задачи, порождённой задачей о движении двух жидкостей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **188** (1991), 5–44.
3. И. В. Денисова, *Разрешимость в гёльдеровских пространствах линейной задачи о движении двух жидкостей, разделённых замкнутой поверхностью.* — Алгебра и анализ **5** (1993), No. 4, 122–148.
4. И. В. Денисова, В. А. Солонников, *Классическая разрешимость задачи о движении двух вязких несжимаемых жидкостей.* — Алгебра и анализ **7** (1995), No. 5, 101–142.
5. I. V. Denisova, *Model problem connected with the motion of two incompressible fluids.* — Adv. Math. Sci. Appl. **17** (2007), No. 1, 195–223.
6. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* "Наука", М. 1973.
7. В. А. Солонников, *Оценки решений нестационарной системы Навье–Стокса.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **38** (1973), 153–231.
8. I. Sh. Mogilevskiĭ, V. A. Solonnikov, *On the solvability of an evolution free boundary problem for the Navier–Stokes equations in Hölder spaces of functions.* — Mathematical Problems Relating to the Navier–Stokes Equation, Ser. Adv. Math. Appl. Sci., World Scientific Publishing Co., Singapore–London, 1992, pp. 105–181.
9. Н. М. Гюнтер, *Теория потенциала и её применение к основным задачам математической физики.* М.: Гос. из-во технико-теоретической литературы, 1953.
10. J. Schauder, *Potentialtheoretische Untersuchungen.* — Math. Z. **33** (1931), 602–640.

Denisova I. V., Nechasova Sh. The Oberbeck–Boussinesq approximation for the motion of two incompressible fluids.

We consider the Oberbeck–Boussinesq approximation for unsteady motion of a drop in another fluid. On the unknown interface between the liquids, the surface tension is taken into account. We study this problem in Hölder classes of functions where local existence theorem for the problem is proved. The proof is based on the fact that the solvability of the problem with a temperature independent right-hand side was obtaind earlier. For a given velocity vector field of the fluids, we arrive at a diffraction problem for the heat equation which is solvable by well-known methods. Existence of a solution to the complete problem is proved by successive approximations.

Институт проблем машиноведения
РАН, С.-Петербург
E-mail: ivd60@mail.ru

Институт математики, Чешская
академия наук, Прага
E-mail: matus@math.cas.cz

Поступило 15 декабря 2008 г.