Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 362, 2008 г.

В. С. Белоносов, В. В. Пухначев

УРАВНЕНИЯ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В ЗАДАЧЕ ИСТЕЧЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ СТРУИ

**Глубокоуважаемому
Всеволоду Алексеевичу Солонникову
к его 75-летию**

Рассматривается задача о стационарном истечении осесимметричной струи вязкой несжимаемой жидкости, вытекающей из трубы круглого сечения радиуса a в свободное пространство при отсутствии внешних массовых сил. Пусть z и r – цилиндрические координаты в пространстве, а w и u – проекции вектора скорости на оси z и r соответственно. Осесимметричное стационарное течение несжимаемой жидкости характеризуется функцией тока $\psi(z,r)$, связанной с координатами скорости соотношениями

$$w = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad u = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{1}$$

Функция тока удовлетворяет уравнению (см. [1]):

$$EE\psi + Rr\frac{\partial(\psi, r^{-2}E\psi)}{\partial(z,r)} = 0, \tag{2}$$

где E – оператор Стокса

$$E = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}.$$

Это уравнение записано в безразмерных переменных. В качестве масштаба длины выбран радиус трубы a, а в качестве масштаба функции тока – величина $Q/(2\pi)$, где $Q > 0$ – расход жидкости в струе. Величина $R = Q/(a\nu)$ есть число Рейнольдса, ν – кинематический коэффициент вязкости.

Работа поддержана грантом НШ-2260.2008.1 .

Уравнение (2) требуется решить в области $\{(z,r) : z > 0,\ 0 < r < f(z)\}$, свободная часть границы которой $\Gamma = \{(z,r) : z > 0,\ r = f(z)\}$ априори неизвестна. Условия на свободной границе имеют вид:

$$\psi = 1, \quad (z,r) \in \Gamma; \tag{3}$$

$$E\psi - 2k\frac{\partial\psi}{\partial n} = 0, \quad (z,r) \in \Gamma; \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(E\psi)}{\partial n} + 2\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial^2\psi}{\partial s\,\partial n}\Big) - \frac{R}{r}\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big)^2 = \mu\frac{\partial K}{\partial s}, \quad (z,r) \in \Gamma. \tag{5}$$

Условие (3) означает, что Γ является поверхностью тока (поверхностью уровня функции ψ). Значение функции тока на этой поверхности без потери общности может быть принято равным единице. В силу условия (4) касательное напряжение на поверхности Γ равно нулю. Согласно условию (5) нормальное напряжение на этой поверхности равно капиллярному давлению. Символ K в уравнении (5) обозначает среднюю кривизну поверхности вращения Γ, а символ k в условии (4) – кривизну ее образующей γ. Операторы $\partial/\partial s$ и $\partial/\partial n$ означают дифференцирование по направлениям касательной и внешней (по отношению к жидкости) нормали к кривой γ. Безразмерный параметр μ равен $a^3\sigma/(\rho Q^2)$, где ρ – плотность жидкости, σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Исходное предположение о симметрии течения относительно оси z приводит к естественному “условию регулярности”: $\psi = r^2\varphi(z, r^2)$, где φ – достаточно гладкая функция, причем $\varphi(z,0) > 0$. К условиям (3)–(5) на свободной границе следует добавить соотношения, задающие распределение скорости (w,u) в начальном сечении струи

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} = w_0(r), \quad -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z} = u_0(r), \quad z = 0,\ 0 < r < 1, \tag{6}$$

а также условия при $z \to \infty$. Естественно предположить, что на бесконечности течение в струе выравнивается, так что $f \to f_\infty > 0$, $w \to w_\infty > 0$.

Вследствие (3) расход жидкости через любое поперечное сечение струи не зависит от z и равен 2π. Это влечет условие согласования

$$\int\limits_0^1 w_0(r) r\, dr = 1,$$

вытекающее из (1) и (3). Отсюда и из условия стабилизации следует, что

$$f_\infty^2 w_\infty = 2. \tag{7}$$

Окончательная формулировка задачи такова: найти функцию $f(z) > 0$ и решение уравнения (2) в области $\{(z,r) : z > 0,\ 0 < r < f(z)\}$, удовлетворяющее условиям (3)–(5) на свободной границе $\Gamma = \{(z,r) : z > 0,\ r = f(z)\}$, условиям (6) в начальном сечении струи, "условиям регулярности" при $r \to 0$ и условиям стабилизации при $z \to \infty$.

В точной постановке задача об истечении осесимметричной струи вязкой капиллярной несжимаемой жидкости изучалась В. А. Солонниковым [2, 3]. Им доказана классическая разрешимость данной задачи в предположении малости числа Рейнольдса $R = Q/(a\nu)$ и положительности капиллярного числа $\mu = a^3\sigma/(\rho Q^2)$. В настоящей работе, наоборот, будет рассмотрен случай больших чисел Рейнольдса.

Поставленную задачу сформулируем в терминах новых независимых переменных (z,ψ) и новой искомой функции $r(z,\psi)$. Эти переменные впервые были использованы Р. Мизесом в теории пограничного слоя [4]. Впоследствии они широко применялись в задачах динамики жидкости со свободной границей (см. [1] и имеющуюся там библиографию). Обозначая нижними индексами z и ψ частные производные по соответствующим переменным и опуская громоздкие промежуточные выкладки, придем к уравнению

$$r_\psi \mathcal{M}\Big(\mathcal{M}r + \frac{1}{rr_\psi}\Big) - \frac{1}{2}\Big[\Big(\mathcal{M}r + \frac{1}{rr_\psi}\Big)^2\Big]_\psi - \frac{Rr}{r_\psi}\Big[\frac{1}{r^2}\Big(\mathcal{M}r + \frac{1}{rr_\psi}\Big)\Big]_z = 0 \tag{8}$$

в полуполосе $\{(z,\psi) : z > 0,\ 0 < \psi < 1\}$. Символом $\mathcal{M}$ обозначен оператор

$$\mathcal{M}\Big(r_z, r_\psi, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial \psi}\Big) = \frac{1}{r_\psi}\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{2r_z}{r_\psi^2}\frac{\partial^2}{\partial z\,\partial\psi} + \frac{1+r_z^2}{r_\psi^3}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}.$$

Ввиду условия (3) свободная граница Γ переходит в луч $\{z > 0,\ \psi = 1\}$, а краевые условия (4)–(5) преобразуются к виду

$$\mathcal{M}r + \frac{1}{rr_\psi} - \frac{2r_{zz}}{r_\psi(1+r_z^2)} = 0 \quad \text{при} \quad z > 0,\ \psi = 1; \tag{9}$$

$$-\frac{1+r_z^2}{rr_\psi}\Big(\mathcal{M}r+\frac{1}{rr_\psi}\Big)_\psi-\frac{r_z}{r}\Big(\mathcal{M}r+\frac{1}{rr_\psi}\Big)_z+2\Big[\frac{1}{r\sqrt{1+r_z^2}}\Big(\frac{\sqrt{1+r_z^2}}{r_\psi}\Big)_z\Big]_z$$
$$=\frac{R}{2}\Big(\frac{1+r_z^2}{r^2r_\psi^2}\Big)_z-\mu\Big[\Big(\frac{r_z}{\sqrt{1+r_z^2}}\Big)_z-\frac{1}{r\sqrt{1+r_z^2}}\Big]_z \quad \text{при} \quad z>0,\ \psi=1. \tag{10}$$

Условиям (6) в начальном сечении струи соответствуют

$$r(0,\psi)=r_0(\psi),\quad r_z(0,\psi)=r_1(\psi)\quad \text{при}\quad 0<\psi<1. \tag{11}$$

Наконец, условия регулярности при $r\to 0$ и условия стабилизации при $z\to\infty$ означают, что

$$\lim_{\psi\to 0} r=0,\quad \lim_{\psi\to 0} r_z=0,\quad \lim_{\psi\to 0} rr_\psi>0; \tag{12}$$

$$r(z,1)\to f_\infty,\quad rr_\psi\to w_\infty^{-1}\quad \text{при}\quad z\to\infty. \tag{13}$$

Не располагая теоремой существования решений задачи (8)–(13) в точной постановке, мы предлагаем ее приближенное решение при больших числах Рейнольдса. Обозначим через Z и Ψ характерные масштабы по осям z и ψ. Ясно, что в качестве масштаба по оси ψ можно взять $\Psi=1$. Предположим, что при $R\to\infty$ масштаб Z также стремится к бесконечности. Кроме того, пусть третье слагаемое в (8) имеет тот же порядок, что и два первых. Сделаем в (8)–(10) замену переменной $z=R\tau$, положим $r(R\tau,\psi)=\lambda(\tau,\psi)$ и устремим R к бесконечности. Учитывая, что $\mu=a^3\sigma/(\rho Q^2)=a\sigma/(\rho\nu^2R^2)\to 0$ при $R\to\infty$, получим

$$\begin{gathered}
\Big\{\Big(\frac{1}{\lambda^2\lambda_\psi^2}\Big)_\tau-\frac{1}{\lambda\lambda_\psi}\Big[\lambda^2\Big(\frac{1}{\lambda^2\lambda_\psi^2}\Big)_\psi\Big]_\psi\Big\}_\psi=0,\quad \tau>0,\ 0<\psi<1;\\
\Big(\frac{1}{\lambda^2\lambda_\psi^2}\Big)_\psi=0,\quad \tau>0,\ \psi=1;\\
\Big(\frac{1}{\lambda^2\lambda_\psi^2}\Big)_\tau-\frac{1}{\lambda\lambda_\psi}\Big[\lambda^2\Big(\frac{1}{\lambda^2\lambda_\psi^2}\Big)_\psi\Big]_\psi=0,\quad \tau>0,\ \psi=1.
\end{gathered} \tag{14}$$

Из первого и третьего соотношений вытекает, что в полуполосе $\{(\tau,\psi):\tau>0,\ 0<\psi<1\}$ функция λ удовлетворяет уравнению

$$\Big(\frac{1}{\lambda^2\lambda_\psi^2}\Big)_\tau-\frac{1}{\lambda\lambda_\psi}\Big[\lambda^2\Big(\frac{1}{\lambda^2\lambda_\psi^2}\Big)_\psi\Big]_\psi=0. \tag{15}$$

Второе из равенств (14) выполняет роль краевого условия. Начальные данные для функции λ при $\tau = 0$ определяются из первого условия (11):

$$\frac{1}{\lambda\lambda_\psi} = \frac{1}{r_0(\psi)r_0'(\psi)}, \quad \tau = 0,\ 0 < \psi < 1. \tag{16}$$

Второе условие (11) здесь не используется. Это соответствует постулату теории пограничного слоя, в силу которого продольная скорость много больше поперечной. Поэтому невязка во втором из условий (11) при $R \to \infty$ имеет тот же порядок R^{-1}, что и отброшенные члены при выводе уравнений (14).

Введем в рассмотрение функцию $v = (\lambda\lambda_\psi)^{-1}$. В силу условий регулярности (12) функция λ стремится к нулю, а величина $\lambda\lambda_\psi$ имеет ненулевой предел при $\psi \to 0$. Поэтому $v(\tau,\psi)$ не имеет особенностей на линии $\psi = 0$ и справедливо представление

$$\lambda^2 = 2\int\limits_0^\psi \frac{d\eta}{v(\tau,\eta)}.$$

Подставляя $\lambda\lambda_\psi = v^{-1}$ в уравнение (15) и пользуясь предыдущим равенством, получаем

$$v_\tau = 2\Big[\Big(\int\limits_0^\psi \frac{d\eta}{v(\tau,\eta)}\Big)vv_\psi\Big]_\psi, \quad \tau > 0,\ 0 < \psi < 1. \tag{17}$$

Из (14), (16) следуют начальные и краевые условия

$$v(0,\psi) = v_0(\psi) \quad \text{при } 0 < \psi < 1, \tag{18}$$

$$v_\psi(\tau,1) = 0 \quad \text{при } \tau > 0, \tag{19}$$

где v_0 – функция в правой части (16). К этим условиям добавляется требование регулярности v на особой линии $\psi = 0$, где (17) вырождается в уравнение первого порядка $v_\tau = 2v_\psi$.

Итак, задача об истечении осесимметричной струи в приближении пограничного слоя сведена к начально-краевой задаче (17)–(19). Искомая функция $v(\tau,\psi)$ есть ни что иное как осевая скорость, рассматриваемая в переменных Мизеса. Условие (18) задает начальное распределение скорости, а условие (19) означает, что касательное напряжение на свободной границе равно нулю. Знание v позволяет найти все элементы движения. В частности, форма свободной границы определяется равенством

$$r(z) = \Big[2\int\limits_0^1 \frac{d\psi}{v(z/R,\psi)}\Big]^{1/2}.$$

Наша цель – доказать, что для любых непрерывных и положительных на отрезке $[0,1]$ начальных данных $v_0(\psi)$ задача (17)–(19) имеет единственное классическое решение, непрерывное и положительное в полуполосе $\{(\tau,\psi) : \tau \geqslant 0,\ 0 \leqslant \psi \leqslant 1\}$. Главная трудность – наличие вырождения на линии $\psi = 0$, поэтому задачу целесообразно предварительно преобразовать, чтобы избавиться от этого вырождения.

Перейдем в соотношениях (17)–(19) к новой независимой переменной $\rho = \psi^{1/2}$ и новой искомой функции $V(\tau,\rho) = v(\tau,\rho^2)$:

$$V_\tau = \frac{1}{\rho}\Big[\Big(\int\limits_0^\rho \frac{\zeta\, d\zeta}{V(\tau,\zeta)}\Big)\frac{V}{\rho}V_\rho\Big]_\rho, \quad \tau > 0,\ 0 < \rho < 1; \tag{20}$$

$$V(0,\rho) = v_0(\rho^2), \quad 0 < \rho < 1; \qquad V_\rho(\tau,1) = 0, \quad \tau > 0.$$

Пусть $\xi = (\xi_1,\xi_2)$ – точка на плоскости; $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$; Ω – единичный круг $\{\xi \in \mathbb{R}^2 : |\xi| < 1\}$ с границей $\partial\Omega$ и замыканием $\overline{\Omega}$. Через ∇ и $\partial/\partial n$ обозначим соответственно градиент по переменным ξ_1, ξ_2 и дифференцирование по нормали к $\partial\Omega$. Переменную ρ можно интерпретировать как полярный радиус $\rho = |\xi|$ точки $\xi = (\xi_1,\xi_2)$. При этом $V(\tau,\rho)$ превращается в функцию $U(\tau,\xi) = V(\tau,|\xi|)$, $v_0(\rho^2)$ – в функцию $U_0(\xi) = v_0(|\xi|^2)$, а соотношения (20) принимают вид

$$U_\tau = \nabla\cdot\Big\{\Big[\iint\limits_\Omega \frac{d\eta}{U(\tau,\eta|\xi|)}\Big]\frac{U(\tau,\xi)}{2\pi}\nabla U\Big\}, \quad \tau > 0,\ \xi \in \Omega; \tag{21}$$

$$U(0,\xi) = U_0(\xi), \quad \xi \in \Omega; \qquad \frac{\partial U}{\partial n} = 0, \quad \tau > 0,\ \xi \in \partial\Omega. \tag{22}$$

Наоборот, если $U(\tau,\xi)$ – непрерывное и положительное в бесконечном цилиндре $\{(\tau,\xi) : \tau \geqslant 0,\ \xi \in \overline{\Omega}\}$ решение задачи (21)–(22), инвариантное относительно вращений, то функция $V(\tau,\rho) = U(\tau,\xi)$, где $\rho = |\xi|$, будет решением задачи (20). Таким образом, проблема разрешимости вырождающегося уравнения (17) при условиях (18)–(19) сведена к начально-краевой задаче (21)–(22), которую можно изучать традиционными методами.

Введем необходимые далее обозначения: Q_T – цилиндр $\{0 < \tau < T,\ \xi \in \Omega\}$, $\overline{Q}_T$ – его замыкание, $Q'_T = (0,T] \times \overline{\Omega}$. Пусть $s > 0$ – нецелое число, а $n \leqslant 0$ – целое. Для каждой функции $f(\tau,\xi)$, непрерывной в Q'_T вместе со всеми производными $D^i_\tau D^j_\xi f$ порядков $2i+j < s$, определим полунорму

$$[f]^{(n,s)}_{Q_T} = \sup \theta^{(s-n)/2} \frac{|D^i_\tau D^j_\xi f(\tau,\xi) - D^i_\tau D^j_\xi f(t,\xi)|}{|\tau - t|^{(s-2i-j)/2}} + \sup \tau^{(s-n)/2} \frac{|D^i_\tau D^j_\xi f(\tau,\xi) - D^i_\tau D^j_\xi f(\tau,\eta)|}{|\xi - \eta|^{s-[s]}}.$$

Здесь $\theta = \min(\tau,t)$; супремум берется в первом случае по всем точкам $(\tau,\xi) \neq (t,\xi)$ из Q'_T и всем таким i, j, что $0 < s-2i-j < 2$, а во втором случае – по всем $(\tau,\xi) \neq (\tau,\eta)$ из Q'_T, $2i+j = [s]$. Кроме того, для целых $k \geqslant 0$ положим

$$|f|^{(n,k)}_{Q_T} = \sup \tau^{(k-n)/2} |D^i_\tau D^j_\xi f(\tau,\xi)|,$$

где супремум берется по всем $(\tau,\xi) \in Q'_T$ и $2i+j = k$. Символами $[f]^{(s)}_{Q_T}$ и $|f|^{(k)}_{Q_T}$ обозначим полунормы, получающиеся из $[f]^{(n,s)}_{Q_T}$ и $|f|^{(n,k)}_{Q_T}$ при отбрасывании весовых множителей $\theta^{(s-n)/2}$, $\tau^{(s-n)/2}$ и $\tau^{(k-n)/2}$. Если f не зависит от τ, то величины $[f]^{(s)}_{Q_T}$ и $|f|^{(k)}_{Q_T}$ превращаются в классические гельдеровские полунормы, которые будем обозначать через $[f]^{(s)}_\Omega$ и $|f|^{(k)}_\Omega$ соответственно.

Пространством $C^{s/2,s}(\overline{Q}_T)$ называется (см. [5]) множество функций $f(\tau,\xi)$, непрерывных в $\overline{Q}_T$ вместе с производными $D^i_\tau D^j_\xi f$ порядков $2i+j < s$ и имеющих конечную норму

$$\|f\|^{(s)}_{Q_T} = [f]^{(s)}_{Q_T} + \sum_{0 \leqslant k < s} |f|^{(k)}_{Q_T}.$$

Если f не зависит от τ, то величина $\|f\|^{(s)}_{Q_T}$ превращается в норму $\|f\|^{(s)}_\Omega$ в стандартном гельдеровском пространстве $C^s(\overline{\Omega})$. Наконец, пространство $C^{s/2,s}_n(\overline{Q}_T)$ определим как замыкание $C^{s/2,s}(\overline{Q}_T)$ по норме

$$\|f\|^{(n,s)}_{Q_T} = [f]^{(n,s)}_{Q_T} + \sum_{0 \leqslant k < s} |f|^{(n,k)}_{Q_T}.$$

Перечислим некоторые свойства введенных весовых пространств: если f принадлежит $C_n^{s/2,s}(\overline{Q}_T)$ и $k = 2i + j < s$, то $D_\tau^i D_\xi^j f \in C_{n-k}^{(s-k)/2,s-k}(\overline{Q}_T)$; для любого натурального $k < s$ справедливо вложение $C_n^{s/2,s}(\overline{Q}_T) \subset C_{n-k}^{(s-k)/2,s-k}(\overline{Q}_T)$; если f принадлежит $C_{n_1}^{s/2,s}(\overline{Q}_T)$, g принадлежит $C_{n_2}^{s/2,s}(\overline{Q}_T)$ и $n = \min(n_1, n_2, n_1 + n_2)$, то

$$\|fg\|_{Q_T}^{(n,s)} \leqslant c(T)\|f\|_{Q_T}^{(n_1,s)}\|g\|_{Q_T}^{(n_2,s)},$$

где величина $c(T)$ остается ограниченной при $T \to 0$.

Пусть B^α – множество положительных функций из $C_0^{(1+\alpha)/2,1+\alpha}(\overline{Q}_T)$ с некоторым $\alpha \in (0,1)$. Совокупность элементов $f(\tau,\xi) \in B^\alpha$, удовлетворяющих условиям

$$0 < \delta \leqslant \inf_{Q_T} f(\tau,\xi), \quad \|f\|_{Q_T}^{(0,1+\alpha)} \leqslant \gamma,$$

обозначим через $B_{\delta,\gamma}^\alpha$. Нетрудно показать, что при $f \in B^\alpha$ определен нелинейный оператор

$$A : f(\tau,\xi) \mapsto a(\tau,\xi) = \frac{f(\tau,\xi)}{2\pi}\Big[\iint\limits_\Omega \frac{d\eta}{f(\tau,\eta|\xi|)}\Big], \tag{23}$$

значения которого также принадлежат B^α. Более того, выполняется равномерное условие Липшица

$$\|A(f) - A(g)\|_{Q_T}^{(0,1+\alpha)} \leqslant q(\delta,\gamma)\|f - g\|_{Q_T}^{(0,1+\alpha)}, \quad \text{где} \quad f, g \in B_{\delta,\gamma}^\alpha. \tag{24}$$

Весовые пространства удобны при изучении параболических начально-краевых задач с негладкими начальными данными (см. [6]). В частности, задача

$$u_\tau - \nabla\cdot[a(\tau,\xi)\nabla u] = \sum \frac{\partial f_i}{\partial \xi_i}, \quad (\tau,\xi) \in Q_T;$$

$$u(0,\xi) = u_0(\xi), \quad \xi \in \Omega; \qquad \frac{\partial u}{\partial n} = 0, \quad \tau > 0,\ \xi \in \partial\Omega,$$

где $a \in B^\alpha$, $f_i \in C_{-1}^{(1+\alpha)/2,1+\alpha}(\overline{Q}_T)$, $u_0 \in C(\overline{\Omega})$, имеет единственное решение, принадлежащее пространству $C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_T)$. При этом справедливо неравенство

$$\|u\|_{Q_T}^{(0,2+\alpha)} \leqslant c(T)\cdot\Big[\|u_0\|_\Omega^{(0)} + \sum \|f_i\|_{Q_T}^{(-1,1+\alpha)}\Big], \tag{25}$$

с ограниченной при $T \to 0$ константой $c(T)$.

Теперь мы можем приступить к изучению основной задачи (21)–(22).

Теорема 1. *Для любой непрерывной и положительной в* $\overline{\Omega}$ *функции* $U_0(\xi)$ *задача* (21)–(22) *имеет единственное положительное решение* $U(\tau,\xi)$, *принадлежащее пространству* $C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_T)$ *при всех* $T>0$ *и* $0<\alpha<1$. *Это решение удовлетворяет неравенствам*

$$m \leqslant U(\tau,\xi) \leqslant M, \tag{26}$$

где m *и* M *– минимум и максимум* $U_0(\xi)$.

Доказательство. Всякое положительное решение U задачи (21)–(22), принадлежащее $C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_T)$, можно интерпретировать как решение задачи Неймана для линейного уравнения

$$U_\tau = \nabla \cdot [a(\tau,\xi)\nabla U]$$

с непрерывным и положительным коэффициентом $a(\tau,\xi)=A(U)$, где оператор A определен формулой (23). При $\tau>0$ функция $a(\tau,\xi)$ имеет непрерывные частные производные по ξ_i. На основании классического принципа максимума, наибольшие и наименьшие значения U достигаются при $\tau=0$. Значит, выполнены неравенства (26), в силу которых

$$\frac{m}{2M} \leqslant a(\tau,\xi) \leqslant \frac{M}{2m} \quad \text{при} \quad (\tau,\xi)\in\overline{Q}_T. \tag{27}$$

Эти условия позволяют трактовать нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (21) как равномерно параболическое относительно любого его решения, что дает возможность применить известные методы получения априорных оценок решений второй краевой задачи для квазилинейных параболических уравнений. Следуя [5], можно доказать, что если начальные данные U_0 принадлежат пространству $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ и при $\xi\in\partial\Omega$ выполняется условие согласования $\partial U_0/\partial n=0$, то норма $\|U\|_{Q_T}^{(1+\alpha)}$ оценивается сверху величиной, зависящей лишь от m, M, $\|U_0\|_{Q_T}^{(2+\alpha)}$, T и α. В свою очередь, наличие такой оценки позволяет использовать основанный на теореме Лерэ-Шаудера метод продолжения по параметру и установить существование решения $U\in C^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_T)$ при любом положительном T.

Единственность найденного решения обеспечена следующим рассуждением. Допустим, что U_1 и U_2 – два решения исходной задачи. Тогда разность $W=U_1-U_2$ удовлетворяет уравнению

$$W_\tau - \nabla\cdot(a\nabla W) = a_1 W + a_2 \iint\limits_{\Omega} a_3 W(\tau,\eta|\xi|)\,d\eta,$$

где $a = A(U_1)$, a_i – некоторые непрерывные в $\overline{Q}_T$ функции. Кроме того, $W(0,\xi) = 0$, $\partial W/\partial n = 0$ при $\xi \in \partial\Omega$. Умножая полученное уравнение на W и интегрируя по области Q_t, $t < T$, получим “энергетическое” тождество, из которого вытекает, что $W \equiv 0$.

Осталось освободиться от лишних ограничений на гладкость начальных данных и от условий согласования при $\xi \in \partial\Omega$. Для этого достаточно показать, что при любых непрерывных и положительных начальных данных U_0 задача (21)–(22) однозначно разрешима “в малом”. Иными словами, существует такое $t > 0$ (вообще говоря, зависящее от U_0), что задача (21)–(22) имеет единственное решение, принадлежащее весовому пространству $C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_t)$.

Обозначим через $\varphi(\tau,\xi)$ решение задачи Неймана для уравнения теплопроводности $\varphi_\tau = \Delta\varphi$ с начальным условием $\varphi(0,\xi) = U_0(\xi)$. Как уже отмечалось выше, при всех положительных t функция φ принадлежит пространству $C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_t)$ и в силу принципа максимума удовлетворяет неравенствам $m \leqslant \varphi(\tau,\xi) \leqslant M$. Составим уравнение

$$U_\tau - \nabla \cdot \Big[A(\varphi)\nabla U\Big] = \nabla \cdot \Big\{\Big[A(W) - A(\varphi)\Big]\nabla W\Big\}, \quad (\tau,\xi) \in Q_t.$$

Для каждого положительного $W \in C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_t)$ это уравнение с начальными и граничными условиями (22) однозначно разрешимо относительно функции U в пространстве $C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_t)$. Тем самым определено отображение $\Phi : W \mapsto U$, неподвижные точки которого являются искомыми решениями задачи (21)–(22).

Пусть B_ε – шар радиуса ε в пространстве $C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_t)$ с центром в точке φ. Покажем, что при соответствующем выборе t и ε отображение Φ будет сжимающим в шаре B_ε. Разность $U - \varphi$ является решением задачи Неймана для уравнения

$$(U-\varphi)_\tau - \nabla\cdot\Big[A(\varphi)\nabla(U-\varphi)\Big] = \nabla\cdot\Big\{\Big[A(W)-A(\varphi)\Big]\nabla W + \Big[A(\varphi)-1\Big]\nabla\varphi\Big\}$$

с нулевыми начальными данными. Если $\varepsilon < m$ и $W \in B_\varepsilon$, то на основании (25) и (24) получаем

$$\begin{aligned}
\|U-\varphi\|^{(0,2+\alpha)}_{Q_t} &\leqslant c(t,\varphi)\Big[\|A(W)-A(\varphi)\|^{(0,1+\alpha)}_{Q_t}\|\nabla W\|^{(-1,1+\alpha)}_{Q_t}\\
&\quad+\Big(\|A(\varphi)\|^{(0,1+\alpha)}_{Q_t}+1\Big)\|\nabla\varphi\|^{(-1,1+\alpha)}_{Q_t}\Big]\\
&\leqslant c_1(t,\varepsilon,m,\varphi)\Big[\|W-\varphi\|^{(0,1+\alpha)}_{Q_t}\Big(\|\nabla(W-\varphi)\|^{(-1,1+\alpha)}_{Q_t}+\|\nabla\varphi\|^{(-1,1+\alpha)}_{Q_t}\Big)\\
&\quad+\|\nabla\varphi\|^{(-1,1+\alpha)}_{Q_t}\Big]\\
&\leqslant c_1\Big[\varepsilon^2+(1+\varepsilon)\|\nabla\varphi\|^{(-1,1+\alpha)}_{Q_t}\Big],
\end{aligned}$$

где c_1 ограничена при $t,\varepsilon\to 0$. В силу определения весовых пространств, норма $\|f\|^{(n,s)}_{Q_t}$ любой функции f из пространства $C^{s/2,s}_n(\overline{Q}_T)$ с отрицательным индексом n стремится к нулю при $t\to 0$. Выберем ε так, чтобы $c_1\varepsilon\leqslant 1/2$, а затем укажем такое t, чтобы $c_1(1+\varepsilon)\|\nabla\varphi\|^{(-1,1+\alpha)}_{Q_t}\leqslant\varepsilon/2$. Тогда $\|U-\varphi\|^{(0,2+\alpha)}_{Q_t}\leqslant\varepsilon$ и $\Phi[B_\varepsilon]\subset B_\varepsilon$. Точно так же для $U_1=\Phi(W_1)$ и $U_2=\Phi(W_2)$, где W_1 и W_2 принадлежат B_ε, находим

$$\begin{aligned}
&(U_1-U_2)_\tau-\nabla\cdot\Big[A(\varphi)\nabla(U_1-U_2)\Big]\\
&\quad=\nabla\cdot\Big\{\Big[A(W_1)-A(W_2)\Big]\nabla W_1+\Big[A(W_2)-A(\varphi)\Big]\nabla(W_1-W_2)\Big\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\|\Phi(W_1)-\Phi(W_2)\|^{(0,2+\alpha)}_{Q_t}\\
&\quad\leqslant c_2(t,\varepsilon,m,\varphi)\Big[\|W_1-W_2\|^{(0,1+\alpha)}_{Q_t}\|\nabla W_1\|^{(-1,1+\alpha)}_{Q_t}\\
&\quad\quad+\|W_2-\varphi\|^{(0,1+\alpha)}_{Q_t}\|\nabla(W_1-W_2)\|^{(-1,1+\alpha)}_{Q_t}\Big]\\
&\quad\quad\leqslant c_2\Big(2\varepsilon+\|\nabla\varphi\|^{(-1,1+\alpha)}_{Q_t}\Big)\|W_1-W_2\|^{(0,2+\alpha)}_{Q_t}.
\end{aligned}$$

По тем же причинам, что и выше, при соответствующем выборе ε и t оператор Φ окажется сжимающим. Значит, задача (21)–(22) с непрерывными и положительными начальными данными разрешима в пространстве $C^{1+\alpha/2,2+\alpha}_0(\overline{Q}_t)$ и, следовательно, в $C^{1+\alpha/2,2+\alpha}_0(\overline{Q}_T)$.

Единственность доказывается еще проще. Пусть U_1 и U_2 – положительные решения задачи (21)–(22), принадлежащие пространству

$C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_T)$, а γ – наибольшая из их норм в этом пространстве. Тогда

$$(U_1 - U_2)_\tau - \nabla \cdot \Big[A(U_1)\nabla(U_1 - U_2)\Big] = \nabla \cdot \Big\{\Big[A(U_1) - A(U_2)\Big]\nabla U_2\Big\},$$

откуда вытекает

$$\|U_1 - U_2\|_{Q_t}^{(0,2+\alpha)} \leqslant c_3(t,m,\gamma)\|U_1 - U_2\|_{Q_t}^{(0,1+\alpha)}\|\nabla U_2\|_{Q_t}^{(-1,1+\alpha)}.$$

Вновь выбирая t достаточно малым, добьемся выполнения неравенства

$$\|U_1 - U_2\|_{Q_t}^{(0,2+\alpha)} \leqslant \frac{1}{2}\|U_1 - U_2\|_{Q_t}^{(0,1+\alpha)},$$

которое гарантирует совпадение U_1 и U_2 при $\tau \leqslant t$. Как уже было показано ранее, они совпадут и при $\tau \geqslant t$. Теорема доказана.

Замечание 1. Уравнение (21) не меняется при поворотах плоскости (ξ_1, ξ_2) вокруг начала координат. Если этим свойством обладают начальные данные U_0, то в силу единственности решений задачи (21)–(22), функция $U(\tau,\xi)$ также окажется инвариантной относительно вращений. Но тогда U будет иметь вид $U(\tau,\xi) = V(\tau,\rho)$, а V удовлетворит уравнениям (20). Таким образом, установлена однозначная разрешимость в целом краевой задачи (20) в классе положительных функций, непрерывных вплоть до особой линии $\rho = 0$.

Замечание 2. Решение U, существование которого доказано в теореме 1, непрерывно зависит от начальных данных. То есть, существует такое $t \in (0,T)$ (вообще говоря, зависящее от U_0), что если последовательность начальных данных U_0^n равномерно сходится к U_0, то соответствующая последовательность решений U^n сходится к U в пространстве $C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_t)$.

Это утверждение доказывается по той же схеме, что и теорема 1. Пусть $\tilde{U}_0$ – "возмущенные" начальные данные, близкие к U_0 в равномерной метрике. Рассмотрим отображение $\Psi : W \mapsto \tilde{U}$, приводящее в соответствие каждой положительной функции $W \in C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_t)$ решение $\tilde{U}$ линейной здачи

$$\tilde{U}_\tau - \nabla \cdot \Big[A(U)\nabla\tilde{U}\Big] = \nabla \cdot \Big\{\Big[A(W) - A(U)\Big]\nabla W\Big\}, \quad (\tau,\xi) \in Q_t;$$

$$\tilde{U}(0,\xi) = \tilde{U}_0(\xi) - U_0(\xi), \quad \xi \in \Omega; \qquad \frac{\partial\tilde{U}}{\partial n} = 0, \quad \tau > 0,\ \xi \in \partial\Omega.$$

Так же, как и выше, можно показать, что существуют такие положительные числа K, t и ε, что при условии $\|\tilde{U}_0 - U_0\|_\Omega^{(0)} \leqslant \varepsilon$ отображение Ψ является сжимающим в шаре $\|W - U\|_{Q_t}^{(0,2+\alpha)} \leqslant K\|\tilde{U}_0 - U_0\|_\Omega^{(0)}$. Значит, неподвижная точка этого отображения будет решением задачи (21)–(22) (единственным в пространстве $C_0^{1+\alpha/2,2+\alpha}(\overline{Q}_t)$ по теореме 1). При этом

$$\|\tilde{U} - U\|_{Q_t}^{(0,2+\alpha)} \leqslant K\|\tilde{U}_0 - U_0\|_\Omega^{(0)}.$$

Последнее неравенство влечет непрерывную зависимость решений задачи (21)–(22) от начальных данных. Технические подробности мы для краткости опускаем.

В исходной постановке задача об истечении осесимметричной струи содержит условие стабилизации течения на бесконечности. В теореме 1 показано, что положительное решение $U(\tau,\xi)$ приближенной задачи (21)–(22) определено при всех $\tau > 0$. Возникает естественный вопрос: будет ли $U(\tau,\xi)$ стабилизироваться при $\tau \to \infty$? Для изучения этого вопроса воспользуемся методикой Т. И. Зеленяка [7]. Применение этой методики обусловлено существованием монотонных функционалов от решений, которые можно назвать обобщенными функционалами Ляпунова или законами сохранения. Задача (21)–(22) обладает по крайней мере двумя такими функционалами. Интегрируя уравнение (21) по области Q_T с учетом условий (22), находим

$$\iint\limits_\Omega U(\tau,\xi)\,d\xi = \iint\limits_\Omega U_0(\xi)\,d\xi, \quad \tau > 0. \tag{28}$$

Если умножить (21) на U и проинтегрировать по области Ω, получим еще одно интегральное тождество:

$$\frac{d}{d\tau}\iint\limits_\Omega U^2(\tau,\xi)\,d\xi = -\iint\limits_\Omega a(\tau,\xi)|\nabla U(\tau,\xi)|^2\,d\xi, \quad \tau > 0, \tag{29}$$

где $a = A(U)$ определено в (23). Законы (28) и (29) позволяют доказать стабилизацию решений задачи (21)–(22).

Теорема 2. *При $\tau \to \infty$ положительное решение U задачи* (21)–(22) *равномерно сходится к константе U_∞, определяемой по формуле*

$$U_\infty = \frac{1}{\pi}\iint\limits_\Omega U_0(\xi)\,d\xi. \tag{30}$$

Доказательство. Формула (30) непосредственно следует из (28) и факта стабилизации, поэтому ограничимся доказательством стабилизации решения $U(\tau,\xi)$. В силу (26), (27) и результатов [5], для некоторого $\beta \in (0,1)$ норма $\|U(\tau,\xi)\|_{\Omega}^{(\beta)}$ равномерно ограничена при $\tau \to \infty$. Значит, $U(\tau,\xi)$ как функция переменной τ со значениями в пространстве $C(\overline{\Omega})$ имеет компактную траекторию. Поэтому достаточно показать, что все частичные пределы этой функции при $\tau \to \infty$ совпадают.

Пусть $U_\infty(\xi)$ – один из частичных пределов. Существует монотонная последовательность $\tau_k \to \infty$, для которой $U(\tau_k,\xi) \rightrightarrows U_\infty(\xi)$. Интегральное тождество (29) гарантирует монотонное убывание нормы функции $U(\tau,\xi)$ в пространстве $L_2(\Omega)$, следовательно,

$$\|U_\infty(\xi)\|_{L_2(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|U(\tau_k,\xi)\|_{L_2(\Omega)} = \inf_{\tau>0} \|U(\tau,\xi)\|_{L_2(\Omega)}. \tag{31}$$

Обозначим через $W_k(\tau,\xi)$ и $W_\infty(\tau,\xi)$ решения краевой задачи (21)–(22) с начальными данными $U(\tau_k,\xi)$ и $U_\infty(\xi)$ соответственно. В силу непрерывной зависимости решения от начальных данных, найдется такое $t > 0$, что

$$W_k(\tau,\xi) \rightrightarrows W_\infty(\tau,\xi) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant \tau \leqslant t,\ \xi \in \overline{\Omega}.$$

С другой стороны, так как уравнение (21) не зависит явно от переменной τ, то $W_k(\tau,\xi) = U(\tau_k+\tau,\xi)$. Поэтому

$$\|W_\infty(t,\xi)\|_{L_2(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \|U(\tau_k+t,\xi)\|_{L_2(\Omega)} = \inf_{\tau>0} \|U(\tau,\xi)\|_{L_2(\Omega)}. \tag{32}$$

Предположим, что величина $|\nabla W_\infty(\tau,\xi)|$ не равна тождественно нулю в цилиндре Q_t, тогда ввиду (29) будет выполнено строгое неравенство

$$\|W_\infty(t,\xi)\|_{L_2(\Omega)} < \|W_\infty(0,\xi)\|_{L_2(\Omega)} = \|U_\infty(\xi)\|_{L_2(\Omega)},$$

а это противоречит (31), (32). Значит, $|\nabla W_\infty(\tau,\xi)| \equiv 0$ и $U_\infty(\xi) = \mathrm{const}$. Таким образом, все частичные пределы функции U при $\tau \to \infty$ постоянны. Гипотеза о существовании различных постоянных частичных пределов противоречит монотонности нормы $\|U(\tau,\xi)\|_{L_2(\Omega)}$. Значит, имеет место стабилизация. Теорема доказана.

Замечание 3. Тождество (28) есть ни что иное как закон сохранения импульса. В исходных переменных r, z и w формула (28) имеет вид

$$\int_0^{f(z)} rw^2\,dr \equiv \int_0^1 rw_0^2\,dr = \frac{p}{2\pi},$$

где p – импульс в начальном сечении струи (при $z = 0$). Устремляя z к бесконечности и пользуясь условиями стабилизации, получаем

$$f_\infty^2 w_\infty^2 = \frac{p}{\pi}.$$

Вместе с условием (7) это соотношение позволяет найти асимптотические параметры течения:

$$w_\infty = \frac{p}{2\pi}, \quad f_\infty = 2\sqrt{\pi/p}.$$

Литература

1. В. В. Пухначев, *Движение вязкой жидкости со свободными границами.* Новосибирск, Изд-во НГУ, 1989.
2. V. A. Solonnikov, *Probleme de frontiere libre a la sortie d'une tube cylindrique.* — Asymptotic Analysis, **17** (1998), 135–163.
3. V. A. Solonnikov, *Stationary free boundary problems for the Navier-Stokes equations.* — Pitman research notes, **392** (1998), 147–192.
4. R. Mises, *Bemerkungen zur Hydrodynamik.* — ZAMM, **7** (1927), 425–431.
5. О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уральцева, *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М., Наука, 1967.
6. В. С. Белоносов, *Оценки решений параболических систем в весовых классах Гельдера и некоторые их приложения.* — Мат. сб., **110** (1979), No. 2, 163–188.
7. Т. И. Зеленяк, *О стабилизации решений краевых задач для параболического уравнения второго порядка с одной пространственной переменной.* — Дифференциальные уравнения, **IV** (1968), No. 1, 34–45.

Belonosov V. S., Pukhnachev V. V. Boundary layer equations in the problem of axialдн symmetric jet flow.

The problem of stationary axially symmetric jet flow of viscous incompressible fluid from a round tube into the free space is considered. Mathematical model of this flow in the Mises variables and for large Reynolds numbers is reduced to the boundary valued problem for degenerative integro-differential equation of the second order. Existence and uniqueness of the bounded solutions to this problem are proved and stabilization as a time-like variable increases is shown.

Институт математики
им. С. Л. Соболева
СО РАН

E-mail: belonosov@academ.org

Поступило 15 декабря 2008 г.

Институт гидродинамики
им. М. А. Лаврентьева
СО РАН

E-mail: pukhnachev@gmail.com