Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 361, 2008 г.

А. Н. Фролов

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПОВЕДЕНИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ КОКСА

1. Введение

В работе автора [1] исследовано асимптотическое поведение вероятностей малых уклонений обобщенных процессов Кокса. Там было установлено, что при определенных условиях асимптотика вероятностей малых уклонений этих процессов совпадает с асимптотикой малых уклонений сумм независимых случайных величин и процессов с независимыми приращениями. При нарушении этих условий асимптотика малых уклонений обобщенных процессов Кокса становится другой. Методы доказательства результатов в [1] существенно используют структуру процесса и могут применяться не только к вероятностям малых уклонений, но и к вероятностям больших уклонений. Таким образом мы получаем инструмент для исследования асимптотики вероятностей больших уклонений. При этом поведение этих вероятностей будет иногда существенно отличаться от поведения вероятностей больших уклонений сумм независимых случайных величин. В этой работе мы опишем асимптотическое поведение логарифмов вероятностей больших уклонений обобщенных процессов Кокса.

Обобщенными процессами называют случайные процессы, построенные по суммам случайного числа независимых одинаково распределенных случайных величин. При этом число слагаемых – случайный процесс, обычно не зависящий от слагаемых. Приведем определения некоторых обобщенных процессов.

Пусть $\{X_k\}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, $\nu(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{X_k\}$, λ – положительное число. Обозначим

$$S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \quad \text{для} \quad n \geqslant 1, \quad S_0 = 0.$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 07-01-00688 .

Случайный процесс $\eta(t) = S_{\nu(\lambda t)}$, называется обобщенным пуассоновским процессом. Если в этом определении заменить пуассоновский процесс $\nu(\lambda t)$ на любой другой процесс восстановления $\delta(t)$, не зависящий от $\{X_k\}$, то мы получим обобщенный процесс восстановления $\zeta(t) = S_{\delta(t)}$.

Аналогично процессам $\eta(t)$ и $\zeta(t)$ обобщенный процесс Кокса строится по процессу Кокса. Определение самого процесса Кокса мы заимствуем из [2].

Пусть $\Lambda(t)$, $t > 0$, – случайная мера, т.е. п.н. (почти наверное) $\Lambda(0) = 0$, $\Lambda(t) < \infty$ для всех $t > 0$ и $\Lambda(t)$ имеет неубывающие траектории. Предположим, что $\Lambda(t)$ не зависит от стандартного пуассоновского процесса $\nu(t)$. Точечный процесс $N(t) = \nu(\Lambda(t))$ называется процессом Кокса. В частности, если траектории $\Lambda(t)$ п.н. непрерывны, то для любой реализации $\lambda(t)$ меры $\Lambda(t)$ процесс $N(t)$ является неоднородным пуассоновским процессом с мерой интенсивности $\lambda(t)$.

Пусть $N(t)$ – процесс Кокса, не зависящий от последовательности $\{X_k\}$. Случайный процесс $S(t) = S_{N(t)}$ мы будем называть обобщенным процессом Кокса.

Обобщенные процессы Кокса играют важную роль в страховой и финансовой математике, где они применяются для моделирования процесса выплат в некоторых моделях риска (см., например, обзор [2]).

Настоящая работа посвящена описанию асимптотического поведения вероятностей больших уклонений обобщенного процесса Кокса $S(t)$, т.е. вероятностей

$$P_t = \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant \Lambda(t)x_t\Big), \tag{1}$$

где x_t – положительная вещественная функция такая, что $x_t = O(1)$ и $g(t)x_t^2 \to \infty$ при $t \to \infty$, $g(t)$ – функция, определяемая свойствами меры $\Lambda(t)$. В одном из наиболее интересных случаев $\Lambda(t) = \Lambda g(t)$, где Λ – случайная величина. Тогда граница в определении P_t равна $\Lambda g(t)x_t$ с $g(t)x_t \to \infty$ при $t \to \infty$. В остальных случаях дело обстоит аналогично, так что P_t представляют собой вероятности больших уклонений.

Отметим, что, рассматриваемая нами граница $\Lambda(t)x_t$ является обычно случайной функцией. Исключения составляют простая пуассоновская ($\Lambda(t) = \lambda t$) и неоднородная пуассоновская модели. Отметим, что в тех математических моделях процесса риска, в которых используется обобщенный процесс Кокса, флуктуации размера риска должны компенсироваться страховыми взносами случайного размера, т.к. в противном случае вероятность разорения страховщика может быть отделена от нуля и не уменьшаться с ростом начального капитала (см. [2]). Это, в частности, означает, что использование соответствующей модели возможно только если известны в теории и могут быть оценены на практике характеристики процесса $\Lambda(t)$.

Далее мы покажем, что при определенных условиях характер асимптотики $\log P_t$ такой же, как в случае сумм независимых случайных величин и процессов с независимыми приращениями. При нарушении этих условий поведение $\log P_t$ может быть совершенно иным.

2. Результаты

Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин таких, что

(A) $\mathbf{P}(X = 0) < 1$;

(B) $0 \leqslant \mathbf{E}X < \infty$;

(C) $h_0 = \sup\{h : \mathbf{E}e^{hX} < \infty\} > 0$.

Обозначим $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ для $n \geqslant 1$, $S_0 = 0$.

Пусть $\nu(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, не зависящий от последовательности $\{X_k\}$.

Обозначим $\xi(t) = S_{\nu(t)}$. Заметим, что $\xi(t)$ – это обобщенный пуассоновский процесс и, следовательно, он является однородным процессом с независимыми приращениями.

В дальнейшем ключевую роль играют свойства распределения случайной величины $\xi = \xi(1)$. Несмотря на то, что случайная величина X может быть вырожденной, ξ всегда будет невырожденной. Кроме того, в силу (A)–(C)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ess\,sup} \xi = \infty, \\
&0 \leqslant \mathbf{E}\xi < \infty, \\
&h_0 = \sup\{h : \varphi(h) = \mathbf{E}e^{h\xi} < \infty\} > 0.
\end{aligned}$$

Второе и третье соотношения легко проверяются. Первое соотношение вытекает из того, что поскольку $s = \operatorname{ess\,sup} X > 0$, то для фиксированного $s_0 \in (0, s)$ мы имеем

$$\mathbf{P}(\xi > s_0 n) \geqslant \mathbf{P}(S_n > s_0 n, \nu(1) = n) > 0$$

при всех n и, следовательно, ξ не ограничена сверху.

Положим для $0 < h < h_0$

$$\varphi(h) = \mathbf{E}e^{h\xi}, \qquad m(h) = \frac{\varphi'(h)}{\varphi(h)},$$
$$\sigma^2(h) = m'(h), \qquad f(h) = hm(h) - \log\varphi(h).$$

Обозначим

$$\zeta(z) = \sup\{zh - \log\varphi(h) : h \geqslant 0, \varphi(h) < \infty\}.$$

Свойства функций $m(h)$, $\sigma^2(h)$ и $\zeta(z)$ хорошо известны из теории больших уклонений. Функции $m(h)$ и $\sigma^2(h)$ – это соответственно математическое ожидание и дисперсия преобразования Крамера случайной величины ξ, а $\zeta(z)$ – функция больших уклонений.

В зависимости от того, каковы h_0, $A = \lim\limits_{h \nearrow h_0} m(h)$ и $1/c_0 = \lim\limits_{h \nearrow h_0} f(h)$ существует, вообще говоря, пять различных классов распределений (см. [3]). Однако, т.к. $\operatorname{ess\,sup}\xi = \infty$, то распределение ξ может принадлежать только классам III (распределения с $h_0 = \infty$, $A = \infty$, $c_0 = 0$), IV (распределения с $h_0 < \infty$, $A = \infty$, $c_0 = 0$) или V (распределения с $h_0 < \infty$, $A < \infty$, $c_0 > 0$) из [3].

Например, распределение ξ принадлежит классам III, IV или V, если X имеет, соответственно, нормальное распределение, экспоненциальное распределение или распределение с плотностью $p(x) = Cx^{-3}e^{-x}$, $x \geqslant 1$.

Из [3] нам потребуется следующее соотношение, связывающие функции $m(h)$, $f(h)$ и $\zeta(z)$:

$$\zeta(z) = f(m^{-1}(z)) \quad \text{при} \quad z \in [\mathbf{E}\xi, A), \tag{2}$$

где $m^{-1}(z)$ и $f^{-1}(x)$ – это функции, обратные к $m(h)$ и $f(h)$ соответственно. Отметим, что функции $m(h)$ и $f(h)$ строго возрастают, $m(0) = \mathbf{E}\xi$, $f(0) = 0$, а функция $\zeta(z)$ строго возрастает, выпукла вниз и $\zeta(\mathbf{E}\xi) = 0$.

Пусть $\Lambda(t)$, $t > 0$, – случайная мера, т.е. п.н. (почти наверное) $\Lambda(0) = 0$, $\Lambda(t) < \infty$ для всех $t > 0$ и $\Lambda(t)$ имеет неубывающие траектории. Пусть траектории $\Lambda(t)$ п.н. непрерывны и $\Lambda(\infty) = \infty$ п.н. Предположим, что $\Lambda(t)$ не зависит от процесса $\nu(t)$ и последовательности $\{X_k\}$.

Определим процесс Кокса $N(t)$ и обобщенный процесс Кокса $S(t)$ соотношениями $N(t) = \nu(\Lambda(t))$ и $S(t) = S_{N(t)}$.

Сначала мы получим экспоненциальные оценки для вероятностей больших уклонений P_t из (1).

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C).

Предположим, что существуют положительная возрастающая непрерывная функция $g(t)$, $g(t) \to \infty$ при $t \to \infty$, и неотрицательная случайная величина Λ такие, что распределения $\Lambda(t)/g(t)$ слабо сходятся к распределению Λ при $t \to \infty$. Обозначим $a_t = \operatorname{ess\,inf} \Lambda(t)/g(t)$, $a = \operatorname{ess\,inf} \Lambda$. Пусть $a_t \to a$ при $t \to \infty$ и $a > 0$.

Тогда

$$\mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h)) \leqslant \exp\{-a_t g(t) f(h)\} \tag{3}$$

для любого $h \in (0, h_0)$ и всех t.

Пусть h_t – положительная функция такая, что $h_t \leqslant h' < h_0$ и $g(t)f(h_t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Тогда

$$\mathbf{P}(S(t) \geqslant (1-\varepsilon)\Lambda(t)m(h_t)) \geqslant \exp\{-ag(t)f(h_t)(1+\delta)\} \tag{4}$$

для любых $\varepsilon > 0, \delta > 0$ и всех достаточно больших t.

Наиболее простым примером $\Lambda(t)$ является $\Lambda(t) = \Lambda g(t)$, где случайная величина Λ и функция $g(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 1. Однако можно построить и другие примеры. Так в качестве $\Lambda(t)$ мы можем выбирать, например, случайные процессы, удовлетворяющие закону больших чисел и имеющие подходящие траектории. Отметим, что в теореме 1 случайная величина Λ может быть вырожденной. При этом в простейшем случае $\Lambda(t) = \Lambda g(t)$ мы будем иметь дело с неоднородным пуассоновским процессом $N(t)$ и соответствующим процессом $S(t)$.

В дальнейшем нам удобнее использовать следующий результат, вытекающий из теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и одно из следующих двух условий:*

(1) *$h_t = h < h_0$ при всех t;*

(2) *$h_t \to 0$ и $g(t)f(h_t) \to \infty$ при $t \to \infty$, и функции $m(h)$ и $f(h)$ правильно меняются в нуле.*

Тогда

$$\log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h_t)) = -ag(t)f(h_t)(1+o(1)) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{5}$$

Перейдем к результатам, которые доказываются с помощью теоремы 2. Мы рассмотрим поведение $\log P_t$ при различных x_t. Начнем с $x_t \equiv \mathrm{const}$.

Теорема 3. *Если выполнены условия теоремы* 1 *и* x *– фиксированное число такое, что* $x \in (\mathbf{E}\xi, A)$, *то*

$$\log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)x) = -ag(t)\zeta(x)(1+o(1)) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{6}$$

Теорема 3 представляет собой аналог теоремы Чернова для обобщенных процессов Кокса.

Теперь мы переходим к случаю $x_t \to 0$ при $t \to \infty$, в котором $\log P_t$ ведет себя так, как логарифмы вероятностей больших уклонений асимметричных устойчивых законов с показателем $\alpha \in (1,2]$. Мы начнем со случая $\alpha = 2$, т.е. с нормального закона. В следующей теореме случайная величина ξ принадлежит области нормального притяжения нормального закона.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Предположим, что* $\mathbf{E}\xi = 0$ *и* $\mathbf{E}\xi^2 = 1$.

Тогда для любой положительной вещественной функции x_t *такой, что* $x_t \to 0$ *и* $g(t)x_t^2 \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *выполняется соотношение*

$$\log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)x_t) = -ag(t)\frac{x_t^2}{2}(1+o(1)) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{7}$$

Перейдем к случаю $\mathbf{E}\xi^2 = \infty$.

Обозначим $F(x) = \mathbf{P}(\xi < x)$.

Далее мы пишем $F \in DN(\alpha)$ ($F \in D(\alpha)$), $\alpha \in (1,2]$, если F принадлежит области нормального (ненормального соотв.) притяжения устойчивого закона с характеристической функцией (х.ф.)

$$\psi(t) = \exp\Big\{-c|t|^\alpha\Big(1 + i\frac{t}{|t|}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}\alpha\Big)\Big\},$$

где $c = -(\cos(\pi\alpha/2))/\alpha$, $1 < \alpha \leqslant 2$. В случае нормального притяжения мы считаем, что нормирующие постоянные имеют вид $n^{1/\alpha}$. Иначе случайную величину ξ нужно должным образом нормировать.

Теорема 5. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Предположим, что* $\mathbf{E}\xi = 0$ *и* $F \in D(2)$. *Обозначим* $G(x) = \int\limits_{-x}^{0} y^2 dF(y)$, $x > 0$.

Тогда для любой положительной вещественной функции x_t *такой, что* $x_t \to 0$ *и* $g(t)x_t^2 \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *выполняется соотношение*

$$\log \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant \Lambda(t) x_t G\Big(\frac{1}{x_t}\Big)\Big) = -a g(t) \frac{x_t^2}{2} G\Big(\frac{1}{x_t}\Big)(1 + o(1)) \qquad (8)$$

при $t \to \infty$.

Перейдем к случаю $\alpha \in (1, 2)$.

Теорема 6. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Предположим, что* $\mathbf{E}\xi = 0$ *и* $F \in DN(\alpha)$, $\alpha \in (1, 2)$. *Обозначим* $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$.

Тогда для любой положительной вещественной функции x_t *такой, что* $x_t \to 0$ *и* $g(t)x_t^\alpha \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *выполняется соотношение*

$$\log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t) x_t^{\alpha-1}) = -a g(t) \frac{x_t^\alpha}{\beta}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \qquad (9)$$

Рассмотрим теперь случай ненормального притяжения.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Предположим, что* $\mathbf{E}\xi = 0$ *и* $F \in D(\alpha)$, $\alpha \in (1, 2)$. *Обозначим* $\beta = \alpha/(\alpha - 1)$, $G(x) = x^\alpha F(-x)$ *при* $x > 0$.

Тогда для любой положительной вещественной функции x_t *такой, что* $x_t \to 0$ *и* $g(t)x_t^\alpha G(1/x_t) \to \infty$ *при* $t \to \infty$, *выполняется соотношение*

$$\log \mathbf{P}\Big(S(t) \geqslant c_1 \Lambda(t) x_t^{\alpha-1} G\Big(\frac{1}{x_t}\Big)\Big) = -a c_2 g(t) x_t^\alpha G\Big(\frac{1}{x_t}\Big)(1 + o(1)) \qquad (10)$$

при $t \to \infty$, *где* $c_1 = \beta\Gamma(2 - \alpha)$, $c_2 = \Gamma(2 - \alpha)$, $\Gamma(x)$ – *гамма-функция Эйлера.*

Отметим, что если в теореме 7 вместо условия $F \in D(\alpha)$ будет выполнено условие $F \in DN(\alpha)$, то $c_1 G(1/x_t) \to 1$ и $c_2 G(1/x_t) \to \beta$ при $t \to \infty$, и, следовательно, (9) и (10) совпадут.

Замечание 1. Если в теоремах 4–7 условие $\mathbf{E}\xi = 0$ заменить условием $\mathbf{E}\xi > 0$, то заключения этих теорем будут выполнены для центрированного процесса $S(t) - \Lambda(t)\mathbf{E}\xi$.

Теорема 1 показывает, что при $a > 0$ поведение P_t аналогично поведению соответствующих вероятностей больших уклонений сумм независимых одинаково распределенных величин и однородных процессов с независимыми приращениями. В том случае, когда $a = 0$, асимптотика $\log P_t$ может оказаться совсем иной. Это показывает следующий результат.

Теорема 8. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2 *и* $a = 0$. *Тогда*

$$\log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h_t)) = o(g(t)f(h_t)) \quad \textit{при} \quad t \to \infty.$$

Следствие 1. *Если в теоремах* 3–7 *вместо условия* $a > 0$ *выполнено условие* $a = 0$, *то соотношения* (6)–(10) *справедливы с заменой* a *на* $o(1)$.

Теперь мы покажем, что в случае $a = 0$ скорость убывания $\log P_t$ может сильно отличаться от скорости убывания в (5) и, кроме того, может зависеть от скорости убывания в нуле функции распределения случайной величины Λ. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема 9. *Предположим, что выполнены условия теоремы* 2 *и* $a_t = a = 0$ *для всех* t. *Пусть для всех* t *функции распределения* $F_t(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda(t) < \lambda g(t))$ *и* $F(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda < \lambda)$ *непрерывны и положительны в невырожденном интервале* $[0, \lambda_0]$.

Обозначим через ε_t *решение уравнения*

$$\frac{\varepsilon_t}{-\log F_t(\varepsilon_t)} = \frac{1}{g(t)f(h_t)}.$$

Предположим, что для любого $\tau > 0$ *выполняются соотношения*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\log F_t(\tau\varepsilon_t)}{\log F_t(\varepsilon_t)} = 1, \tag{11}$$

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{F_t(\tau\varepsilon_t/2)}{F_t(\tau\varepsilon_t)} < 1. \tag{12}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h_t)) &= \log F_t(\varepsilon_t)\bigl(1 + o(1)\bigr) \\ &= -\varepsilon_t g(t)f(h_t)\bigl(1 + o(1)\bigr) \quad \textit{при} \quad t \to \infty. \end{aligned} \tag{13}$$

Здесь $\varepsilon_t \to 0$ *и* $F_t(\varepsilon_t) \to 0$ *при* $t \to \infty$.

Приведем некоторые примеры, показывающие, что скорость убывания $\log P_t$ в (13) и (5) могут существенно отличаться.

Пусть $F_t(x) \equiv F(x)$ для всех t. Если, например, $F(x) = x^p$ при $x \in [0,1]$, где $p > 0$, то $\log F_t(\varepsilon_t) = -\varepsilon_t g(t) f(h_t) \sim -p\log(g(t)f(h_t))$ при $t \to \infty$.

Следующий результат показывает, что условие (11) нельзя отбросить.

Теорема 10. *Предположим, что выполнены все условия теоремы* 9 *кроме условия* (11). *Пусть для любого* $\tau > 0$ *выполняется соотношение* $\log F_t(\tau\varepsilon_t) \sim \tau^p \log F_t(\varepsilon_t)$ *при* $t \to \infty$, *где* $p > 0$.

Тогда

$$\log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h_t)) = o\left(\varepsilon_t g(t) f(h_t)\right) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{14}$$

Замечание 2. Если в теоремах 9 и 10 дополнительно сделать предположения из теорем 3–7 о распределении ξ и последовательности x_t, то в соотношениях (13) и (14) можно заменить $m(h_t)$ и $f(h_t)$ на соответствующие выражения из (6)–(10). Если при этом условие $\mathbf{E}\xi = 0$ заменить условием $\mathbf{E}\xi > 0$, то соответствующие соотношения будут справедливы для центрированного процесса $S(t) - \Lambda(t)\mathbf{E}\xi$.

3. Доказательства

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (A), (B) *и* (C). *Тогда*

$$\mathbf{P}(\xi(t) \geqslant tm(h)) \leqslant e^{-tf(h)},$$

для всех $t > 0$ *и* $h < h_0$. *Кроме того,*

$$\mathbf{P}(\xi(t) \geqslant (1-\varepsilon)tm(h)) \geqslant e^{-tf(h) - c(1+\sqrt{tf(h)}) - 1},$$

для любого $\varepsilon \in (0,1)$, *всех* $t > 1/\varepsilon$ *и* $h \leqslant h' < h_0$. *Здесь постоянная* c *не зависит от* t *и* h.

Доказательство леммы 1. Зафиксируем $t > 0$. Нетрудно проверить, что $\varphi_t(h) = Ee^{h\xi(t)} = (\varphi(h))^t$, $m_t(h) = (\log\varphi_t(h))'_h = tm(h)$, $\sigma_t^2(h) = (\log\varphi_t(h))''_h = t\sigma^2(h)$, $f_t(h) = hm_t(h) - \log\varphi_t(h) = tf(h)$ при всех $h < h_0$.

Первое неравенство следует из неравенства Чебышева и последних соотношений. Докажем второе неравенство.

Обозначим через $[t]$ целую часть t. Пользуясь тем, что $\xi(t)$ – однородный процесс с независимыми приращениями, $\nu(t)$ – стандартный пуассоновский процесс, мы имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\xi(t) \geqslant (1-\varepsilon)tm(h)) \geqslant \mathbf{P}(\xi(t) \geqslant [t]m(h))\\
&\geqslant \mathbf{P}(\xi(t)-\xi([t]) \geqslant 0)\mathbf{P}(\xi([t]) \geqslant [t]m(h))\\
&= \mathbf{P}(\xi(t-[t]) \geqslant 0)\mathbf{P}(\xi([t]) \geqslant [t]m(h))\\
&\geqslant \mathbf{P}(\nu(t-[t]) = 0)\mathbf{P}(\xi([t]) \geqslant [t]m(h)) \geqslant e^{t-[t]}\mathbf{P}(\xi([t]) \geqslant [t]m(h))\\
&\geqslant e^{-1}\mathbf{P}(\xi([t]) \geqslant [t]m(h)).
\end{aligned}$$

По теореме 1 из [4]

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}(\xi(t) \geqslant (1-\varepsilon)tm(h)) \geqslant e^{-[t]f(h)-c(1+\sqrt{[t]f(h)})-1}\\
&\geqslant e^{-tf(h)-c(1+\sqrt{tf(h)})-1}.
\end{aligned}$$

Отметим, что в [4] использовалось условие несколько более жесткое, чем одностороннее условие Крамера. Однако, если мы немного сужаем область изменения h и рассматриваем $h \leqslant h' < h_0$, то условие из [4] выполняется.

Лемма 1 доказана. □

Доказательство теоремы 1. По лемме 1 мы имеем

$$\begin{aligned}
P_t &= \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h)) = \mathbf{P}(\xi(\Lambda(t)) \geqslant \Lambda(t)m(h))\\
&= \int_{a_t}^{\infty} \mathbf{P}(\xi(\lambda g(t)) \geqslant \lambda g(t)m(h))dF_t(\lambda)\\
&\leqslant \int_{a_t}^{\infty} e^{-\lambda g(t)f(h)}dF_t(\lambda) \leqslant e^{-a_t g(t)f(h)},
\end{aligned}$$

где $F_t(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda(t) < \lambda g(t))$.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$. Для любого $\lambda \geqslant a_t$ выполняется соотношение $\lambda g(t) \geqslant a_t g(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. По лемме 1,

$$
\begin{aligned}
P_{t,\varepsilon} &= \mathbf{P}(S(t) \geqslant (1-\varepsilon)\Lambda(t)m(h_t)) = \mathbf{P}(\xi(\Lambda(t)) \geqslant (1-\varepsilon)\Lambda(t)m(h_t)) \\
&= \int_{a_t}^{\infty} \mathbf{P}(\xi(\lambda g(t)) \geqslant (1-\varepsilon)\lambda g(t)m(h_t))dF_t(\lambda) \qquad (15) \\
&\geqslant \int_{a_t}^{\infty} e^{-\lambda g(t)f(h_t)-c(1+\sqrt{\lambda g(t)f(h_t)})-1}dF_t(\lambda) \\
&\geqslant \int_{a_t}^{(1+\tau)^2 a_t} e^{-\lambda g(t)f(h_t)-c(1+\sqrt{\lambda g(t)f(h_t)})-1}dF_t(\lambda) \\
&\geqslant e^{-(1+\tau)^2 a_t g(t)f(h_t)-c(1+\sqrt{(1+\tau)^2 a_t g(t)f(h_t)})-1}F_t((1+\tau)^2 a_t) \\
&\geqslant e^{-(1+\tau)^2 a_t g(t)f(h_t)-c(1+\sqrt{(1+\tau)^2 a_t g(t)f(h_t)})-1}F_t((1+\tau)a)
\end{aligned}
$$

для всех достаточно больших t. Выберем τ так, чтобы $(1+\tau)a$ была точкой непрерывности $F(\lambda) = \mathbf{P}(\Lambda < \lambda)$. В силу слабой сходимости $F_t(\lambda)$ к $F(\lambda)$ и условия $g(t)f(h_t) \to \infty$ при $t \to \infty$ мы имеем

$$
\begin{aligned}
P_{t,\varepsilon} &\geqslant \frac{1}{2}e^{-(1+\tau)^2 a_t g(t)f(h_t)-c(1+\sqrt{(1+\tau)^2 a_t g(t)f(h_t)})-1}F((1+\tau)a) \\
&\geqslant e^{-(1+\tau)^3 a g(t)f(h_t)}
\end{aligned}
$$

для всех достаточно больших t. Отсюда следует заключение теоремы 1. □

Доказательство теоремы 2. Пусть $h_t = h < h_0$ при всех t. Тогда из (3) следует, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{g(t)} \log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h)) \leqslant -af(h).$$

Возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $m(h) < A/(1-\varepsilon)$. Так как функция $m(h)$ непрерывна и строго возрастает, существует $h_\varepsilon = h_\varepsilon(h)$ такое, что $m(h) = (1-\varepsilon)m(h_\varepsilon)$. В силу (4)

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{g(t)} \log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h)) \geqslant -af(h_\varepsilon).$$

При $\varepsilon \searrow 0$ мы имеем $h_\varepsilon \searrow h$ и $f(h_\varepsilon) \searrow f(h)$. Поэтому из последнего неравенства следует, что

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{g(t)} \log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h)) \geqslant -af(h).$$

Следовательно,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{g(t)} \log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h)) = -af(h).$$

Теорема доказана в случае 1).

Пусть теперь выполнено условие 2). Соотношение (3) влечет

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{1}{g(t)f(h_t)} \log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h_t)) \leqslant -a.$$

Возьмем $\varepsilon > 0$. Снова используя непрерывность и монотонность функции $m(h)$, для всех t определим $h_{t,\varepsilon}$ соотношением $m(h_t) = (1-\varepsilon)m(h_{t,\varepsilon})$.

Так как $m(h)$ правильно меняется в нуле, то $h_{t,\varepsilon} \sim (1-\varepsilon)^\rho h_t$ при $t \to \infty$. Правильное изменение $f(h)$ в нуле влечет $g(t)f(h_{t,\varepsilon}) \to \infty$ при $t \to \infty$. Применяя (4), мы получим

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{g(t)f(h_{t,\varepsilon})} \log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h)) \geqslant -a.$$

Снова используя правильное изменение $f(h)$ в нуле, мы получим $f(h_{t,\varepsilon}) \sim (1-\varepsilon)^{\rho_1} f(h_t)$ при $t \to \infty$. Отсюда следует, что

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{g(t)f(h_t)} \log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h)) \geqslant -a(1-\varepsilon)^{\rho_1}.$$

Переходя в последнем соотношении к пределу при $\varepsilon \searrow 0$, мы приходим к неравенству

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{g(t)f(h_t)} \log \mathbf{P}(S(t) \geqslant \Lambda(t)m(h)) \geqslant -a, \tag{16}$$

которое завершает доказательство теоремы 2. $\square$

Доказательство теоремы 3. Для $x \in (\mathbf{E}\xi, A)$ возьмем в качестве h решение уравнения $m(h) = x$. Заключение теоремы 3 следует из теоремы 2 и (2). $\square$

Доказательство теоремы 4. Заключение теоремы 4 следует из теоремы 2 и следующих соотношений, полученных в работе автора [3]:

$$m(h) = h(1 + o(1)), \quad f(h) = \frac{h^2}{2}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad h \to 0. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 5. Теорема 5 следует из теоремы 2 и следующих соотношений, полученных в [3]:

$$m(h) = hG\Big(\frac{1}{h}\Big)(1 + o(1)), \quad f(h) = \frac{h^2}{2}G\Big(\frac{1}{h}\Big)(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Отметим, что $G(1/h)$ медленно изменяется в нуле. $\square$

Доказательство теоремы 6. Заключение теоремы 6 следует из теоремы 2 и следующих соотношений из [3] (см. также [5]):

$$m(h) = h^{\alpha-1}(1 + o(1)), \quad f(h) = \frac{h^\alpha}{\beta}(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad h \to 0. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 7. Теорема 7 следует из теоремы 2 и следующих соотношений, полученных в [3] (см. также [5]):

$$m(h) = c_1 h^{\alpha-1} G\Big(\frac{1}{h}\Big)(1 + o(1)), \quad f(h) = c_2 h^\alpha G\Big(\frac{1}{h}\Big)(1 + o(1)) \quad \text{при} \quad h \to 0.$$

Отметим, что $G(1/h)$ медленно изменяется в нуле. $\square$

Доказательство теоремы 8. Так как $\log P_t \leqslant 0$, то нам достаточно доказать только соответствующую оценку снизу.

Возьмем $\varepsilon > 0$ и $\tau > 0$. Для всех $\lambda \in (\tau, (1 + \tau)^2\tau)$ мы имеем $\lambda g(t) \geqslant \tau g(t) \to \infty$ при $t \to \infty$. Используя лемму 1, соотношение (15) и условие $a_t \to 0$ при $t \to \infty$, мы получим

$$\begin{aligned}
P_{t,\varepsilon} &\geqslant \int\limits_{\tau}^{(1+\tau)^2\tau} \mathbf{P}(\xi(\lambda g(t)) \geqslant (1 - \varepsilon)\lambda g(t) m(h_t)) dF_t(\lambda) \\
&\geqslant \int\limits_{\tau}^{(1+\tau)^2\tau} e^{-\lambda g(t) f(h_t) - c(1+\sqrt{\lambda g(t) f(h_t)}) - 1} dF_t(\lambda) \\
&\geqslant e^{-(1+\tau)^2\tau g(t) f(h_t) - c(1+\sqrt{(1+\tau)^2\tau g(t) f(h_t)}) - 1} (F_t((1 + \tau)^2\tau) - F_t(\tau))
\end{aligned}$$

для всех достаточно больших t. Отсюда так же, как в доказательстве теоремы 1, мы получим

$$P_{t,\varepsilon} \geqslant e^{-(1+\tau)^3 \tau g(t) f(h_t)}$$

для всех достаточно больших t. Действуя так же, как в доказательстве теоремы 2, мы приходим к (16) с заменой a на τ. Это влечет требуемую оценку.

Теорема 8 доказана. □

Доказательство теоремы 9. Так же, как в доказательстве теоремы 3 (см. [1, с. 172]) можно показать, что $\varepsilon_t \to 0$ и $F_t(\varepsilon_t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Используя лемму 1 и определение ε_t, мы имеем

$$\begin{aligned} P_t &= \int_0^{\varepsilon_t} \mathbf{P}(\xi(\lambda g(t)) \geqslant \lambda g(t) m(h_t)) dF_t(\lambda) \\ &+ \int_{\varepsilon_t}^{\infty} \mathbf{P}(\xi(\lambda g(t)) \geqslant \lambda g(t) m(h_t)) dF_t(\lambda) \\ &\leqslant F_t(\varepsilon_t) + \int_{\varepsilon_t}^{\infty} e^{-\lambda g(t) f(h_t)} dF_t(\lambda) \leqslant 2e^{-\varepsilon_t g(t) f(h_t)}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает оценка сверху.

Перейдем к оценке снизу. Возьмем $\tau > 0$. Для всех $\lambda \in (\tau\varepsilon_t/2, \tau\varepsilon_t)$ выполняется соотношение $\lambda g(t) \geqslant \tau\varepsilon_t g(t)/2 \to \infty$ при $t \to \infty$. Учитывая (15) и условие $a_t \equiv 0$, по лемме 1 мы получим

$$\begin{aligned} P_{t,\varepsilon} &\geqslant \int_{\tau\varepsilon_t/2}^{\tau\varepsilon_t} \mathbf{P}(\xi(\lambda g(t)) \geqslant (1-\varepsilon)\lambda g(t) m(h_t)) dF_t(\lambda) \\ &\geqslant e^{-\tau\varepsilon_t g(t) f(h_t) - c(1+\sqrt{\tau\varepsilon_t g(t) f(h_t)})-1} (F_t(\tau\varepsilon_t) - F_t(\tau\varepsilon_t/2)) \end{aligned}$$

для всех достаточно больших t. В силу (11) и (12)

$$P_{t,\varepsilon} \geqslant e^{-\tau\varepsilon_t g(t) f(h_t)(1+o(1))} F_t(\tau\varepsilon_t) = e^{-(1+\tau)\varepsilon_t g(t) f(h_t)(1+o(1))} \tag{17}$$

при $t \to \infty$. Так как τ может быть выбрано сколь угодно малым, мы приходим к нужной нижней оценке.

Теорема 9 доказана. □

Доказательство теоремы 10. Как и в доказательстве теоремы 8 нам достаточно получить только соответствующую оценку снизу.

Действуя так же, как при доказательстве (17), мы получим

$$P_{t,\varepsilon} \geqslant e^{-(\tau^p+\tau)\varepsilon_t g(t) f(h_t)(1+o(1))}$$

при $t \to \infty$. Отсюда следует заключение теоремы 10. □

Автор благодарен рецензенту за ряд полезных замечаний, способствовавших улучшению текста статьи.

Литература

1. А. Н. Фролов, *О вероятностях малых уклонений обобщенных процессов Кокса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **339** (2006), 163–175.
2. П. Эмбрехтс, К. Клюппельберг, *Некоторые аспекты страховой математики.* — Теория вероятн. и ее примен. **38** (1993), 374–416.
3. А. Н. Фролов, *Предельные теоремы для приращений сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **48** (2003), 104–121.
4. Л. В. Розовский, *О нижней границе вероятностей больших уклонений для выборочного среднего при выполнении условия Крамера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **278** (2001), 208–224.
5. A. N. Frolov, *On one-sided strong laws for increments of sums of i.i.d. random variables.* — Studia Sci. Math. Hungar. **39** (2002), 333–359.

Frolov A. N. On asymptotic behaviour of probabilities of large deviations for compound Cox processes.

We derive logarithmic asymptotics for probabilities of large deviations for compound Cox processes. We show that under appropriate conditions, these asymptotics are the same as those for sums of independent random variables and processes with independent increments. When these conditions do not hold, the asymptotics of large deviations probabilities for compound Cox processes are quite different.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: Andrei.Frolov@pobox.spbu.ru

Поступило 11 ноября 2008 г.