Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 361, 2008 г.

Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЛЕВИ–ХИНЧИНА ОДНОГО КЛАССА ЗНАКОПЕРЕМЕННЫХ УСТОЙЧИВЫХ МЕР

1. Введение

Пусть $\nu(dx)$ пуассоновская случайная мера на $\mathbb{R}$ с интенсивностью $\gamma(dx) = \mathbb{E}(\nu(dx)) = \frac{a\,dx}{|x|^{1+\alpha}}$, $a > 0$. Мы предполагаем, что что случайная мера ν определена на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Для $\varepsilon > 0$ обозначим через η_ε случайную величину

$$\eta_\varepsilon = \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} x\nu(dx), \tag{1}$$

где $\mathbb{R}_\varepsilon = \mathbb{R} \setminus [-\varepsilon, \varepsilon]$.

Хорошо известно (см. [1]), что если $\alpha \in (0, 2)$, то существует предел (по вероятности)

$$\eta = \lim_{\varepsilon \to 0} \eta_\varepsilon, \tag{2}$$

причем случайная величина η имеет строго устойчивое симметричное распределение с показателем устойчивости α. Соответствующее представление

$$\eta = \int\limits_{\mathbb{R}} x\nu(dx)$$

называется представлением Леви–Хинчина случайной величины η. Характеристическая функция $f(p)$ случайной величины η имеет вид $\exp(-c|p|^\alpha)$, $c > 0$.

Строго устойчивые распределения являются предельными для распределений сумм независимых случайных величин (см. [2]).

Рассмотрим теперь случай $\alpha \in (2, 4) \cup (4, 6)$. Очевидно, что для таких значений α дисперсия величин η_ε стремится к бесконечности

Работа первого автора выполнена при поддержке грантов DFG 436 RUS 113/823 и НШ638.2008.1. Работа второго автора выполнена при поддержке грантов РФФИ 06-01-00249а, НШ816.2008.1 и INTAS 05-100000807883 .

и, соответственно, не существует предела (2). Обозначим через $\mathcal{Q}_\varepsilon^\alpha$ распределение случайной величины η_ε. В настоящей работе мы построим семейство операторов $\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha$, действующих в пространстве знакопеременных мер конечной полной вариации такое, что существует предел

$$\mathcal{Q}_0^\alpha = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathcal{A}_\varepsilon^\alpha \mathcal{Q}_\varepsilon^\alpha. \tag{3}$$

Каждый оператор $\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha$ является оператором свертки с ядром, принадлежащим классу Шварца. Распределение $\mathcal{Q}_0^\alpha$ представляет из себя абсолютно непрерывную знакопеременную меру (конечной вариации), удовлетворяющую условию $\mathcal{Q}_0^\alpha(\mathbb{R}) = 1$. Важно отметить, что мера $\mathcal{Q}_0^\alpha$ является знакопеременной только на конечном интервале, вне этого интервала она положительна и, более того, асимптотика ее плотности на бесконечности имеет вид $\frac{c}{|x|^{1+\alpha}}$, $c > 0$.

Будет показано, что распределение $\mathcal{Q}_0^\alpha$ является в определенном смысле предельным для распределений сумм независимых случайных величин. Именно, пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ – последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин, асимптотика хвоста которых имеет следующий вид

$$\mathrm{P}(\xi_1 > x) = \frac{b}{x^\alpha}(1 + g(x)),$$

где $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Как и ранее, мы будем предполагать, что $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$. Через $\mathcal{P}_1$ обозначим распределение случайной величины ξ_1.

Ясно, что распределение $\mathcal{P}_1$ принадлежит области притяжения нормального закона и, соответственно, распределение случайной величины $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^n \xi_i$ асимптотически нормально (в частности имеет очень быстро убывающий хвост). Мы будем рассматривать распределение нормированной суммы $\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{i=1}^n \xi_i$ случайных величин ξ_i с более слабой нормировкой $n^{1/\alpha}$. Разумеется, такая последовательность распределений слабого предела не имеет. Тем не менее, мы покажем, что добавлением некоторого “поправочного” оператора данную последовательность распределений можно превратить в сходящуюся к распределению $\mathcal{Q}_0^\alpha$ (с $a = \alpha b$). Хотя предельное распределение уже не является вероятностной мерой (что нетипично для вероятностных задач), но зато как и в классических предельных теоремах о сходимости к устойчивым законам ($\alpha \in (0,2)$) предельное распределение имеет такую же асимптотику хвоста, как и каждое отдельное слагаемое.

В нашей работе мы используем методы теории обобщенных функций ([4]), работ [3, 5], а также методы теории гильбертовых пространств ([6]).

2. Необходимые обозначения

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть v – гладкая функция вещественной переменной. Через δ мы обозначим оператор вида

$$(\delta v)(x) = v(0),$$

а для $k = 1, 2, 3, \dots$ через $\delta^{(k)}$ обозначим оператор, действующий как

$$(\delta^{(k)} v)(x) = \frac{x^k}{k!} v^{(k)}(0) \tag{4}$$

при $\alpha > k$, и действующий как

$$(\delta^{(k)} v)(x) = \frac{x^k}{k!} \mathbf{1}_{[0,1]}(|x|) v^{(k)}(0) \tag{5}$$

при $\alpha < k$. Важно отметить, что определение операторов $\delta^{(k)}$ зависит от величины α.

Далее, определим оператор Δ, полагая

$$\Delta v(x) = v(x) - v(0) = v(x) - \delta v(x), \tag{6}$$

и последовательность операторов (также зависящих от величины α) $\Delta(k)$, $k \in \mathbb{N}$, полагая

$$(\Delta(k)v)(x) = v(x) - \delta v(x) - \delta^{(1)} v(x) - \dots - \delta^{(k)}(x).$$

Заметим, что $\Delta + \delta$ есть тождественный оператор и для любого $k = 1, 2, \dots$ мы имеем

$$\Delta(k) = \Delta(k+1) + \delta^{(k+1)}. \tag{7}$$

Всюду далее через γ мы будем обозначать меру на прямой вида

$$\gamma(dx) = \frac{a\,dx}{|x|^{1+\alpha}},$$

где $a > 0$, $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$. Положим еще

$$\tau_2(\varepsilon) = \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} x^2 d\gamma = \frac{2a}{\alpha - 2} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-2}} \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} +\infty. \tag{8}$$

Далее, для $\alpha \in (2,4)$ положим

$$\tau_4(\varepsilon) = \int\limits_{\varepsilon \leqslant |x| \leqslant 1} x^2 d\gamma = \frac{2a}{4-\alpha}(1 - \varepsilon^{4-\alpha}) \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} \frac{2a}{4-\alpha}, \tag{9}$$

а для $\alpha \in (4,6)$ положим

$$\tau_4(\varepsilon) = \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} x^4 d\gamma = \frac{2a}{\alpha - 4} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-4}} \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} +\infty. \tag{10}$$

3. Построение семейства операторов $\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha$

Пусть φ – бесконечно дифференцируемая функция, имеющая ограниченные производные любого порядка. Имеем

$$\mathbb{E}\varphi(\eta_\varepsilon) = e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} g_k d\gamma^k, \tag{11}$$

где $g_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \varphi(x_1 + x_2 + \dots + x_k)$. Обозначим через Δ_i, δ_i применение операторов Δ, δ по переменной x_i.

Для каждого конечного множества I натуральных чисел через $|I|$ будем обозначать число элементов множества I. Положим также

$$\delta_I = \prod_{i\in I} \delta_i, \quad \Delta_I = \prod_{i \in I} \Delta_i.$$

Если $I = \{1, \dots, k\}$ то соответствующий оператор Δ_I мы будем обозначать Δ^k, т.е.

$$\Delta^k = \Delta_1 \Delta_2 \dots \Delta_k.$$

Аналогичные обозначения мы будем использовать и для операторов $\Delta(m)$, $\delta^{(m)}$, $m \in \mathbb{N}$, т.е.

$$\delta_I^{(m)} = \prod_{i\in I} \delta_i^{(m)}, \quad \Delta_I(m) = \prod_{i\in I} \Delta_i(m)$$

и

$$\Delta^k(m) = \Delta_1(m)\Delta_2(m)\dots\Delta_k(m).$$

Для каждого фиксированного k через CI обозначим множество $\{1,\dots,k\}\setminus I$. Заметим, что для любого k функция $\delta_{CI}g_k$ зависит только от переменных x_i, $i\in I$.

Используя тождество

$$1 = \prod_{i=1}^{k}(\delta_i+\Delta_i) = \sum_I \Delta_I\delta_{CI},$$

получим

$$\mathbb{E}\varphi(\eta_\varepsilon) = e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k}\prod_{i=1}^{k}(\Delta_i+\delta_i)g_k d\gamma^k$$

$$= e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k}\sum_{I\subset\{1,\dots,k\}}\Delta_I\delta_{CI}g_k d\gamma^k$$

$$= e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_I\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)^{|CI|}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^{|I|}}\Delta_I\delta_{CI}g_k\prod_{i\in I}\gamma(dx_i).$$

Используя симметрию всех входящих выражений, получим

$$\mathbb{E}\varphi(\eta_\varepsilon) = e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)^{k-j}\binom{k}{j}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^j}\Delta^j g_j d\gamma^j$$

$$= e^{-\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^j}\Delta^j g_j d\gamma^j\sum_{k=j}^{\infty}\frac{\gamma(\mathbb{R}_\varepsilon)^{k-j}}{(k-j)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k}\Delta^k g_k d\gamma^k. \tag{12}$$

Из симметричности меры γ вытекает, что для всех $k\in\mathbb{N}$

$$\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k}\Delta^k g_k d\gamma^k = \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k}\Delta^k(1)g_k d\gamma^k. \tag{13}$$

Используя (7) и (13) получим

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\varphi(\eta_\varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k}\Delta^k g_k d\gamma^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k}\Delta^k(1) g_k d\gamma^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k}\prod_{i=1}^{k}(\Delta_i(2)+\delta_i^{(2)})g_k d\gamma^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k}\Bigg(\sum_{I\subset\{1,\dots,k\}}\Delta_I(2)\delta_{CI}^{(2)}g_k\Bigg)d\gamma^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\Delta^j(2)(\delta^{(2)})^{k-j}g_k d\gamma^k =\end{aligned}$$

(в последней формуле предполагается, что оператор $\Delta^j(2)$ действует по переменным $x_1, x_2, \dots, x_j$, а оператор $(\delta^{(2)})^{k-j}$ действует по оставшимся $k-j$ переменным)

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k}\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{j!(k-j)!}\Delta^j(2)\varphi^{(2(k-j))}(x_1+\dots+x_j)\frac{1}{2^{k-j}}x_{j+1}^2\dots x_k^2 d\gamma^k$$

$$\begin{aligned}&= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^j}\Delta^j(2)\Bigg(\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{(k-j)!}\varphi^{(2(k-j))}(x_1+\dots+x_j)\frac{1}{2^{k-j}}(\tau_2(\varepsilon))^{(k-j)}\Bigg)d\gamma^j\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^j}\Delta^j(2)\Bigg(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\varphi^{(2k)}(x_1+\dots+x_j)\frac{1}{2^k}(\tau_2(\varepsilon))^k\Bigg)d\gamma^j\\ &= \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^j}\Delta^j(2)\Bigg(\Big(\mathrm{P}_{\tau_2(\varepsilon)}\varphi\Big)(x_1+\dots+x_j)\Bigg)d\gamma^j, \qquad (14)\end{aligned}$$

где оператор P_t на гладких функциях u задается формулой

$$(\mathrm{P}_t u)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k k!}u^{(2k)}(x)t^k.$$

Нетрудно проверить, что для $t > 0$ оператор P_t есть оператор теплопроводности (оператор свертки с функцией $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}}$). Фурье образ этого оператора есть оператор умножения на $e^{-\frac{p^2 t}{2}}$, т.е.

$$\widehat{\mathrm{P}_t u}(p) = e^{-\frac{p^2 t}{2}}\widehat{u}(p).$$

Введем обратный оператор

$$(\mathrm{P}_{-t}u)(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k k!}u^{(2k)}(x)t^k,$$

являющийся самосопряженным оператором в $L_2(\mathbb{R})$, если за его область определения принять $\{u \in L_2(\mathbb{R}) : \widehat{u}e^{\frac{p^2 t}{2}} \in L_2(\mathbb{R})\}$.

Из (14) следует, что

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}(\mathrm{P}_{-\tau_2(\varepsilon)}\varphi)(\eta_\varepsilon)\\ &\qquad = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon}\Delta^k(2)\varphi(x_1+\cdots+x_k)d\gamma^k = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon}\Delta^k(2)g_k d\gamma^k.\end{aligned}$$

Теперь, используя симметрию меры γ и соображения, аналогичные приведенным выше, получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathrm{P}_{-\tau_2(\varepsilon)}\varphi)(\eta_\varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon}\Delta^k(3)g_k d\gamma^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon}\prod_{i=1}^{k}(\Delta_i(4)+\delta_i^{(4)})g_k d\gamma^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon}\Bigg(\sum_{I\subset\{1,\dots,k\}}\Delta_I(4)\delta_{CI}^{(4)}g_k\Bigg)d\gamma^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\Delta^j(4)(\delta^{(4)})^{k-j}g_k d\gamma^k =\end{aligned}$$

(в последней формуле предполагается, что оператор $\Delta^j(4)$ действует по переменным $x_1, x_2, \dots, x_j$, а оператор $(\delta^{(4)})^{k-j}$ действует по оставшимся $k-j$ переменным)

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int\limits_{\mathbb{R}^j_\varepsilon} \Delta^j(4) \bigg(\sum_{k=j}^{\infty} \frac{1}{(k-j)!} \varphi^{(4(k-j))}(x_1 + \dots + x_j) \frac{1}{24^{k-j}} (\tau_4(\varepsilon))^{(k-j)} \bigg) d\gamma^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int\limits_{\mathbb{R}^j_\varepsilon} \Delta^j(4) \bigg(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \varphi^{(4k)}(x_1 + \dots + x_j) \frac{1}{24^k} (\tau_4(\varepsilon))^k \bigg) d\gamma^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int\limits_{\mathbb{R}^j_\varepsilon} \Delta^j(4) \bigg(\Big(\mathrm{Q}_{\tau_4(\varepsilon)} \varphi \Big) (x_1 + \dots + x_j) bigg) d\gamma^j, \tag{15}$$

где оператор Q_t задается формулой

$$(\mathrm{Q}_t u)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{24^k k!} u^{(4k)}(x) t^k,$$

а обратный оператор Q_{-t}, соответственно, формулой

$$(\mathrm{Q}_{-t} u)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{24^k k!} u^{(4k)}(x) t^k. \tag{16}$$

Теперь, используя (15) и (16) получаем

$$\mathbb{E}(\mathrm{Q}_{-\tau_4(\varepsilon)} \mathrm{P}_{-\tau_2(\varepsilon)} \varphi)(\eta_\varepsilon)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \int\limits_{\mathbb{R}^j_\varepsilon} \Delta^j(4) \varphi(x_1 + \dots + x_j) d\gamma^j = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}^k_\varepsilon} \Delta^k(4) g_k d\gamma^k.$$

Нетрудно проверить, что для всех $t > 0$, $s > 0$ Фурье образ оператора $\mathrm{Q}_{-s}\mathrm{P}_{-t}$ есть оператор умножения на $e^{-\frac{p^4 s}{24} + \frac{p^2 t}{2}}$, т.е.

$$\widehat{\mathrm{Q}_{-s}\mathrm{P}_{-t} u}(p) = e^{-\frac{p^4 s}{24} + \frac{p^2 t}{2}} \widehat{u}(p),$$

а, соответственно, сам оператор $\mathrm{Q}_{-s}\mathrm{P}_{-t}$ есть оператор свертки с функцией

$$h_{s,t}(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{R}} \cos(px) e^{-\frac{p^4 s}{24} + \frac{p^2 t}{2}} dp. \tag{17}$$

Положим теперь

$$\mathcal{A}_\varepsilon^\alpha = \mathrm{Q}_{-\tau_4(\varepsilon)}\mathrm{P}_{-\tau_2(\varepsilon)}, \tag{18}$$

а через обозначим через p_ε плотность распределения случайной величины η_ε. Введем также обозначение

$$q_\varepsilon^\alpha = \mathcal{A}_\varepsilon^\alpha p_\varepsilon.$$

Далее мы покажем, что семейство функций q_ε^α сходится при $\varepsilon \to 0$ к некоторой предельной функции q^α по норме пространства $L_2(\mathbb{R})$. Отметим сначала, что

$$\int \varphi(x) q_\varepsilon^\alpha(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \Delta^k(4) g_k d\gamma^k. \tag{19}$$

Перейдем теперь к пределу при $\varepsilon \to 0$ в правой части (19). Это можно сделать для тех бесконечно дифференцируемых функций φ для которых ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}^k} \Delta^k(4) g_k d\gamma^k \tag{20}$$

абсолютно сходится. Приведем достаточное условие сходимости ряда (20). Для этого для каждого $k = 0, 1, 2, \ldots$ определим норму $\|\varphi\|_k$ полагая

$$\|\varphi\|_k = \max_{0 \leqslant j \leqslant 2k} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi^{(2j)}(x)|.$$

Нетрудно показать справедливость следующей оценки

$$|\int\limits_{\mathbb{R}^k} \Delta^k(4) g_k d\gamma^k| \leqslant C(\alpha) \|\varphi\|_k.$$

Из последней оценки следует, что сходимость ряда (20) следует из сходимости ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|\varphi\|_k}{k!}.$$

Сосчитаем теперь преобразование Фурье функции q_ε^α. В силу (19) имеем

$$\widehat{q_\varepsilon^\alpha}(p) = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{ipx} q_\varepsilon(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon^k} \Delta^k(4) e^{ip(x_1+\dots+x_k)} d\gamma^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} \Delta(4) e^{ipx} d\gamma(x) \Bigg)^k = \exp\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}_\varepsilon} \Delta(4) e^{ipx} d\gamma(x) \Bigg).$$

Таким образом, для $\alpha \in (2,4)$ мы имеем

$$\widehat{q_\varepsilon^\alpha}(p) = \exp\Bigg(2a \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \Big(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2} - \frac{p^4x^4}{24} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \Big) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \Bigg), \quad (21)$$

а для $\alpha \in (4,6)$ имеем

$$\widehat{q_\varepsilon^\alpha}(p) = \exp\Bigg(2a \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \Big(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2} - \frac{p^4x^4}{24} \Big) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \Bigg), \quad (22)$$

Переходя к пределу при фиксированном p и $\varepsilon \to 0$ в (21), получим для $\alpha \in (2,4)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{q_\varepsilon^\alpha}(p) = \exp\Bigg(2a \int\limits_{0}^{\infty} \Big(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2} - \frac{p^4x^4}{24} \mathbf{1}_{[0,1]}(x) \Big) \frac{dx}{x^{1+\alpha}} \Bigg)$$
$$= \exp\Bigg(2a|p|^\alpha \int\limits_{0}^{\infty} \Big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} \Big) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} - \frac{a}{12} p^4 \int\limits_{0}^{1} \frac{x^4 dx}{x^{1+\alpha}} \Bigg)$$
$$= \exp\Big(c_0|p|^\alpha - c_1 p^4 \Big), \quad (23)$$

где

$$c_0 = 2\int\limits_{0}^{\infty} \Big(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} \Big) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} > 0, \quad c_1 = \frac{a}{12(4-\alpha)} > 0.$$

Далее, переходя к пределу при фиксированном p и $\varepsilon \to 0$ в (22), получим для $\alpha \in (4, 6)$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{q^\alpha_\varepsilon}(p) = \exp\left(2a\int\limits_0^\infty \left(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2} - \frac{p^4x^4}{24}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\right)$$
$$= \exp\Big(-c_2|p|^\alpha\Big), \quad (24)$$

где

$$c_2 = -2a\int\limits_0^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} > 0.$$

Положим

$$\widehat{q^\alpha}(p) = \lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{q^\alpha_\varepsilon}(p). \quad (25)$$

При $\alpha \in (2, 4)$ мы имеем

$$\sup_{0<\varepsilon\leqslant\frac12} \widehat{q^\alpha_\varepsilon}(p)$$
$$= \sup_{0<\varepsilon\leqslant\frac12} \exp\left(2a|p|^\alpha\int\limits_{|p|\varepsilon}^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} - \frac{ap^4}{12}\int\limits_\varepsilon^1 \frac{x^4\,dx}{x^{1+\alpha}}\right)$$
$$\leqslant \exp\left(c_0|p|^\alpha - \frac{ap^4}{12(4-\alpha)}\left(1 - \frac{1}{2^{4-\alpha}}\right)\right).$$

Последняя оценка показывает, что сходимость в (25) при $\alpha \in (2, 4)$ имеет место не только для каждого фиксированного p, но также и в $L_2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим теперь случай $\alpha \in (4, 6)$. Для этого введем следующее обозначение:

$$\rho(x) = -\int\limits_x^\infty \left(\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Таким образом

$$\widehat{q^\alpha_\varepsilon}(p) = \exp\left(-2a|p|^\alpha\rho(\varepsilon|p|)\right).$$

Отметим, что $\rho(x)$ – положительная при $x \in [0,+\infty)$ функция, обладающая на бесконечности асимптотикой $\rho(x) \sim \frac{1}{24(\alpha-4)}x^{4-\alpha}$. Таким образом

$$\inf_{x\in[1,+\infty)} x^{\alpha-4}\rho(x) = K_1 > 0.$$

Тем самым

$$\inf_{|p|>1/\varepsilon} |p|^{\alpha-4}\rho(\varepsilon|p|) = K_1\varepsilon^{4-\alpha},$$

откуда следует, что при $\varepsilon \in (0,1)$ и при $|p| > 1/\varepsilon$

$$|p|^{\alpha}\rho(\varepsilon|p|) \geqslant K_1|p|^4.$$

Если мы теперь обозначим через K_2 точную нижнюю грань функции $\rho(x)$ на промежутке $[0,1]$ (ясно, что $K_2 > 0$), то, очевидно, что при всех $|p| \leqslant 1/\varepsilon$ выполнена оценка $|p|^{\alpha}\rho(\varepsilon|p|) \geqslant K_2|p|^{\alpha}$. Тем самым, при всех $p \in \mathbb{R}$ и при всех $\varepsilon \in (0,1)$ справедлива следующая оценка:

$$|p|^{\alpha}\rho(\varepsilon|p|) \geqslant \min\{K_1|p|^4, K_2|p|^{\alpha}\} \geqslant \tau(p),$$

где

$$\begin{aligned}\tau(p) &= \min\{K_1,K_2\}\min\{|p|^{\alpha},|p|^4\}\\ &= \min\{K_1,K_2\}\cdot\begin{cases}|p|^{\alpha} & \text{при} \quad |p|\leqslant 1;\\ |p|^4, & \text{при} \quad |p|\geqslant 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Последнее неравенство означает, что семейство функций $\widehat{q^{\alpha}_{\varepsilon}}(p)$, $\varepsilon \in (0,1)$ обладает мажорантой $\exp\Big(-2a\tau(p)\Big)$, которая принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R})$. Поэтому, как и в случае $\alpha \in (2,4)$, функции $\widehat{q^{\alpha}_{\varepsilon}}(p)$ стремятся при $\varepsilon \to 0$ к $\widehat{q^{\alpha}}(p)$ не только поточечно, но и в метрике пространства $L_2(\mathbb{R})$.

4. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных симметричных случайных величин, асимптотика хвоста которых имеет следующий вид

$$\mathbb{P}(\xi_1 > x) = \frac{b}{x^{\alpha}}(1+g(x)), \tag{26}$$

где $g(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Обозначим также $a = \alpha b$.

Как и ранее, мы будем предполагать, что $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$. Через $\mathcal{P}_1$ обозначим распределение случайной величины ξ_1, через σ^2 обозначим дисперсию ξ_1, а через $f = f(p)$ обозначим характеристическую функцию ξ_1.

Из условия (26) следует, что распределение $\mathcal{P}_1$ принадлежит области притяжения нормального закона и, соответственно, распределение случайной величины

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

асимптотически нормально.

Мы будем рассматривать распределение нормированной суммы

$$\frac{1}{n^{1/\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \xi_i \tag{27}$$

случайных величин ξ_i с более слабой нормировкой $n^{1/\alpha}$. Разумеется, последовательность распределений случайных величин (27) слабого предела не имеет. Тем не менее, мы покажем, что добавлением некоторого “поправочного” оператора соответствующую последовательность распределений можно превратить в сходящуюся.

4.1 Случай $\alpha \in (2,4)$**.**

Для $A > 0$ положим

$$\nu(A) = 2 \int_0^A x^4 d\mathcal{P}_1(x) = \mathbb{E}\xi_1^4 \mathbf{1}_{[0,A]}(|\xi|). \tag{28}$$

В силу (26)

$$\nu(A) \sim \frac{2a}{4-\alpha} A^{4-\alpha}, \quad A \to \infty. \tag{29}$$

Сосчитаем теперь характеристическую функцию $f(\frac{p}{n^{1/\alpha}})$ случайной величины $\frac{\xi_1}{n^{1/\alpha}}$. В силу симметрии имеем

$$f(\frac{p}{n^{1/\alpha}}) = \mathbb{E} \cos \frac{p\xi_1}{n^{1/\alpha}} = 1 - \frac{\sigma^2 p^2}{2n^{2/\alpha}} + \frac{p^4 \nu(n^{1/\alpha})}{24 n^{4/\alpha}}$$
$$+\mathbb{E}\left(\cos \frac{p\xi_1}{n^{1/\alpha}} - 1 + \frac{p^2 \xi_1^2}{2n^{2/\alpha}} - \frac{p^4 \xi_1^4}{24 n^{4/\alpha}} \mathbf{1}_{[0,n^{1/\alpha}]}(|\xi_1|) \right)$$

$$= 1 - \frac{\sigma^2 p^2}{2n^{2/\alpha}} + \frac{p^4 \nu(n^{1/\alpha})}{24n^{4/\alpha}} - T_n(p), \tag{30}$$

где

$$-T_n(p) = 2\int\limits_0^\infty \left(\cos\frac{px}{n^{1/\alpha}} - 1 + \frac{p^2x^2}{2n^{2/\alpha}} - \frac{p^4x^4}{24n^{4/\alpha}}\mathbf{1}_{[0,n^{1/\alpha}]}(x)\right)d\mathcal{P}_1(x).$$

Отметим, что в силу (29)

$$\frac{\nu(n^{1/\alpha})}{n^{4/\alpha}} \sim \frac{2a}{4-\alpha}\frac{1}{n}. \tag{31}$$

Покажем теперь, что для любого фиксированного $p \in \mathbb{R}$ мы имеем

$$-T_n(p) = \frac{1}{n}(\log\widehat{q^\alpha}(p) + \circ(1)), \tag{32}$$

где, в соответствии с (23), (25),

$$\log\widehat{q^\alpha}(p) = 2a\int\limits_0^\infty \left(\cos py - 1 + \frac{p^2y^2}{2} - \frac{p^4y^4}{24}\mathbf{1}_{[0,1]}(y)\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} = c_0|p|^\alpha - c_1p^4.$$

Действительно, в силу (26)

$$\int\limits_0^\infty \left(\cos\frac{px}{n^{1/\alpha}} - 1 + \frac{p^2x^2}{2n^{2/\alpha}} - \frac{p^4x^4}{24n^{4/\alpha}}\mathbf{1}_{[0,n^{1/\alpha}]}(x)\right)d\mathcal{P}_1(x)$$

$$= \int\limits_0^1(\dots)d\mathcal{P}_1 + \int\limits_1^\infty(\dots)\frac{adx}{x^{1+\alpha}} + \int\limits_1^\infty(\dots)d\left(\frac{g(x)}{x^{1+\alpha}}\right).$$

Обозначим интегралы в последнем выражении через I_1, I_2, I_3 соответственно. Нетрудно показать, что

$$I_1 = \circ\left(\frac{1}{n^{4/\alpha}}\right), \quad I_3 = \circ\left(\frac{1}{n}\right),$$

а

$$I_2 = \frac{a}{n}\int\limits_0^\infty \left(\cos py - 1 + \frac{p^2y^2}{2} - \frac{p^4y^4}{24}\mathbf{1}_{[0,1]}(y)\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + \circ\left(\frac{1}{n^{4/\alpha}}\right).$$

Далее, обозначим через $\mathcal{P}_n$ распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{i=1}^n \xi_i$, а через f_n соответствующую характеристическую функцию. В силу независимости слагаемых,

$$f_n(p) = \left(f\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{\sigma^2 p^2}{2n^{2/\alpha}} + \frac{p^4\nu(n^{1/\alpha})}{24n^{4/\alpha}} - T_n(p)\right)^n$$

Применим теперь к функции f_n оператор умножения на функцию

$$h_{s(n),t(n)}(p) = \exp\left(n\left(\frac{\sigma^2 p^2}{2n^{2/\alpha}} - \frac{p^4\nu(n^{1/\alpha})}{24n^{4/\alpha}}\right)\right).$$

Применение оператора умножения к характеристической функции f_n соответствует свертке распределения $\mathcal{P}_n$ с функцией $h_{s,t}$ (определенной формулой (17)) при $t = t(n) = \sigma^2 n^{1-2/\alpha}$, $s = s(n) = \nu(n^{1/\alpha})n^{-4/\alpha}$, т.е. в обозначениях предыдущего параграфа к применению оператора $\mathcal{B}_n = Q_{-s(n)}P_{-t(n)}$.

Теорема 1. *Последовательность функций $f_n h_{s(n),t(n)}$ при $n \to \infty$ сходится в $L_2(\mathbb{R})$ к функции $\widehat{q^\alpha}$ определенной формулами* (23), (25).

Доказательство. Покажем сначала, что сходимость имеет место для любого фиксированного $p \in \mathbb{R}$. Имеем

$$f_n(p)h_{s(n),t(n)}(p) = \left[\left(1 - \frac{\sigma^2 p^2}{2n^{2/\alpha}} + \frac{p^4\nu(n^{1/\alpha})}{24n^{4/\alpha}} - T_n(p)\right)e^{\frac{\sigma^2p^2}{2n^{2/\alpha}} - \frac{p^4\nu(n^{1/\alpha})}{24n^{4/\alpha}}}\right]^n.$$

Используя формулу (32), нетрудно показать, что последнее выражение при $n \to \infty$ стремится к $\widehat{q^\alpha}(p) = \exp(c_0|p|^\alpha - c_1 p^4)$.

Покажем теперь, что сходимость имеет место не только для каждого p, но и в $L_2(\mathbb{R})$. Для этого нам достаточно построить функцию $F \in L_2(\mathbb{R})$, такую, что для всех $p \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|f_n(p)h_{s(n),t(n)}(p)| \leqslant F(p)$.

Имеем

$$|f_n(p)h_{s(n),t(n)}(p)| = \left|f\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right)e^{1-f(\frac{p}{n^{1/\alpha}})}\right|^n e^{-nT_n(p)}. \tag{33}$$

Выберем $M > 0$ так, чтобы выполнялось $|g(|x|)| \leqslant \frac{1}{10}$ при $|x| \geqslant M$. Далее, имеем

$$\exp(-nT_n(p)) \tag{34}$$
$$\leqslant \exp\left(2n\int_M^\infty \left(\cos\frac{px}{n^{1/\alpha}} - 1 + \frac{p^2x^2}{2n^{2/\alpha}} - \frac{p^4x^4}{24n^{4/\alpha}}\mathbf{1}_{[0,n^{1/\alpha}]}(x)\right)d\mathcal{P}_1(x)\right)$$

$$= \exp\left(2n\int_M^\infty \left(\cos\frac{px}{n^{1/\alpha}} - 1 + \frac{p^2x^2}{2n^{2/\alpha}}\right)d\mathcal{P}_1(x) - \frac{p^4}{24n^{4/\alpha}}\int_M^{n^{1/\alpha}} x^4 d\mathcal{P}_1(x)\right).$$

Используя (26), нетрудно показать, что

$$\int_M^\infty \left(\cos\frac{px}{n^{1/\alpha}} - 1 + \frac{p^2x^2}{2n^{2/\alpha}}\right)d\mathcal{P}_1(x) \leqslant d_0\frac{|p|^\alpha}{n} \tag{35}$$

и

$$\frac{p^4}{24n^{4/\alpha}}\int_M^{n^{1/\alpha}} x^4 d\mathcal{P}_1(x) \geqslant d_1\frac{p^4}{n} \tag{36}$$

для некоторых положительных констант d_0, d_1. Таким образом, подставляя (35) и (36) в (34) получаем

$$\exp(-nT_n(p)) \leqslant \exp(d_0|p|^\alpha - d_1p^4). \tag{37}$$

Далее, выберем число $\varepsilon_0 > 0$ так, чтобы выполнялось неравенство $f(p) \geqslant 0$ при $|p| \leqslant \varepsilon_0$. Тогда для $|\frac{p}{n^{1/\alpha}}| \leqslant \varepsilon_0$ мы имеем оценку

$$\left|f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)e^{1-f(\frac{p}{n^{1/\alpha}})}\right|^n \leqslant 1, \tag{38}$$

а для $|\frac{p}{n^{1/\alpha}}| \geqslant \varepsilon_0$ мы получим

$$\left|f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)e^{1-f(\frac{p}{n^{1/\alpha}})}\right|^n \leqslant e^{2n} \leqslant \exp\Big(\frac{2p^\alpha}{\varepsilon_0^\alpha}\Big). \tag{39}$$

Из (33), (37)–(39) немедленно следует требуемая L_2-сходимость. □

4.2 Случай $\alpha \in (4,6)$.

В этом случае мы дополнительно предположим, что характеристическая функция $f(p)$ случайной величины ξ_1 удовлетворяет неравенству

$$|f(p)| \leqslant \frac{K}{|p|} \tag{40}$$

для некоторого $K > 0$. В частности это означает, что случайная величина ξ_1 имеет квадратично интегрируемую плотность.

Для функции $f(p)$ мы имеем представление

$$f(p) = \mathbb{E}\cos p\xi_1 = 1 - \frac{\sigma^2 p^2}{2} + \frac{m_4 p^4}{24} + \mathbb{E}\left(\cos p\xi_1 - 1 + \frac{p^2\xi_1^2}{2} - \frac{p^4\xi_1^4}{24n}\right)$$
$$= 1 - \frac{\sigma^2 p^2}{2} + \frac{m_4 p^4}{24} - T(p), \tag{41}$$

где $m_4 = \mathbb{E}\xi_1^4$, а

$$-T(p) = 2\int_0^\infty \left(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2} - \frac{p^4x^4}{24}\right) d\mathcal{P}_1(x). \tag{42}$$

Лемма 1. *При $p \to 0$ мы имеем $T(p) \sim c_2|p|^\alpha$, где*

$$c_2 = -2a\int_0^\infty (\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24})\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Доказательство. Имеем

$$-T(p) = 2\int_0^\infty \left(\cos px - 1 + \frac{p^2x^2}{2} - \frac{p^4x^4}{24}\right) d\mathcal{P}_1(x)$$
$$= 2\int_0^1 (\dots)d\mathcal{P}_1 + 2\int_1^\infty (\dots)d\mathcal{P}_1.$$

Ясно, что $\int_0^1 (\dots)d\mathcal{P} = \circ(|p|^\alpha)$. Во втором интеграле следует сделать замену переменных $y = px$ и воспользоваться (26). Получим

$$\int_1^\infty (\dots)d\mathcal{P}_1 = a|p|^\alpha \int_0^\infty (\cos y - 1 + \frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{24})\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + \circ(|p|^\alpha). \quad \square$$

Лемма 2. *Существуют* $\varepsilon_0, d_0 > 0$ *такие, что для* $|p| \leqslant 2\varepsilon_0$ *выполнены неравенства*

$$0 \leqslant f(p)e^{\frac{\sigma^2 p^2}{2} - \frac{p^4}{24}(m_4 - 3\sigma^4)} \leqslant e^{-d_0|p|^\alpha} \tag{43}$$

и

$$e^{\frac{\sigma^2 p^2}{2} - \frac{p^4}{24}(m_4 - 3\sigma^4)} \geqslant 1.$$

Доказательство. То, что в малой окрестности нуля выполнено второе неравенство совершенно очевидно. Оценим логарифм функции, стоящей в левой части (43). Для этого воспользуемся (41) и неравенством $\log x \leqslant x - 1 - \frac{1}{2}(x-1)^2$ справедливом для $x \in (0,1)$. Имеем

$$\log\left(f(p)e^{\frac{\sigma^2 p^2}{2} - \frac{p^4}{24}(m_4 - 3\sigma^4)}\right) = \log f(p) + \frac{\sigma^2 p^2}{2} - \frac{m_4 p^4}{24} + \frac{\sigma^4 p^4}{8}$$

$$\leqslant f(p) - 1 - \frac{1}{2}(f(p-1))^2 + \frac{\sigma^2 p^2}{2} - \frac{m_4 p^4}{24} + \frac{\sigma^4 p^4}{8}$$

$$= -T(p) - \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma^2 p^2}{2} - \frac{m_4 p^4}{24} + T(p)\right)^2 + \frac{\sigma^4 p^4}{8}$$

$$= -T(p) - \frac{1}{2}\left(T(p) - \frac{m_4 p^4}{24}\right)^2 - \frac{\sigma^2 p^2}{2}\left(T(p) - \frac{m_4 p^4}{24}\right)$$

$$\leqslant -T(p) - \frac{\sigma^2 p^2}{2}\left(T(p) - \frac{m_4 p^4}{24}\right).$$

Теперь, используя лемму 1 получаем требуемое неравенство.

□

Определим теперь гладкую функцию $\varphi = \varphi(p)$, полагая

$$\varphi(p) = \exp\left(\frac{\sigma^2 p^2}{2} - \frac{p^4}{24}(m_4 - 3\sigma^4)\right)$$

при $|p| \leqslant \varepsilon_0$, и $\varphi(p) = 1$ при $|p| \geqslant 2\varepsilon_0$. Для значений p таких,что $\varepsilon_0 \leqslant |p| \leqslant 2\varepsilon_0$ мы потребуем только, чтобы было справедливо неравенство

$$1 \leqslant \varphi(p) \leqslant \exp\left(\frac{\sigma^2 p^2}{2} - \frac{p^4}{24}(m_4 - 3\sigma^4)\right).$$

Далее, как и выше, обозначим через $\mathcal{P}_n$ распределение случайной величины $\frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{i=1}^n \xi_i$, а через f_n соответствующую характеристическую функцию. В силу независимости слагаемых,

$$f_n(p) = \Big(f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^n = \Big(1 - \frac{\sigma^2p^2}{2n^{2/\alpha}} + \frac{m_4p^4}{24n^{4/\alpha}} - T\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^n.$$

Соответствующая последовательность функций очевидным образом предела не имеет. В качестве "поправочного оператора" выберем оператор умножения на функцию $\Big(\varphi(\frac{p}{n^{1/\alpha}})\Big)^n$.

Теорема 2. *Последовательность функций* $\Big(f(\frac{p}{n^{1/\alpha}})\varphi(\frac{p}{n^{1/\alpha}})\Big)^n$ *при* $n\to\infty$ *сходится в* $L_2(\mathbb{R})$ *к функции* $\widehat{q^\alpha}(p) = \exp(-c_2|p|^\alpha)$.

Доказательство. Покажем сначала, что сходимость имеет место для любого фиксированного $p\in\mathbb{R}$. Пусть n таково, что $\frac{|p|}{n^{1/\alpha}} \leqslant \varepsilon_0$. Имеем

$$\Big(f(\frac{p}{n^{1/\alpha}})\varphi\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^n = \exp\Big[n\Big(\log f(\frac{p}{n^{1/\alpha}}) + \log\varphi(\frac{p}{n^{1/\alpha}})\Big)\Big]$$

$$= \exp\Big[n\Big(\log\Big(1 - \frac{\sigma^2p^2}{2n^{2/\alpha}} + \frac{m_4p^4}{24n^{4/\alpha}} - T\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big) + \frac{\sigma^2p^2}{2n^{2/\alpha}} - \frac{m_4p^4}{24n^{4/\alpha}} + \frac{\sigma^4p^4}{8n^{4/\alpha}}\Big)\Big] =$$

$$\exp\Big[n\Big(T\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) + \circ\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big)\Big] = \exp\big[-c_1|p|^\alpha + \circ(1)\big] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-c_1|p|^\alpha).$$

На последнем шаге мы воспользовались тем, что в силу леммы 1

$$T\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big) = -c_1\frac{|p|^\alpha}{n} + \circ\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

Теперь нам осталось показать, что сходимость имеет место не только поточечная, но и в $L_2(\mathbb{R})$. Для $|\frac{p}{n^{1/\alpha}}| \leqslant 2\varepsilon_0$ в силу леммы 2 мы имеем

$$0 \leqslant \Big(f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\varphi\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^n \leqslant e^{-d_0|p|^\alpha}. \tag{44}$$

Тем самым

$$\int\limits_0^{2n^{1/\alpha}\varepsilon_0} \Big(f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\varphi\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^{2n} dp$$

$$\leqslant \int\limits_0^{2n^{1/\alpha}\varepsilon_0} e^{-2d_0p^\alpha}\,dp \leqslant \int\limits_0^\infty e^{-2d_0p^\alpha}\,dp. \tag{45}$$

Для оценки на интервале от $2n^{1/\alpha}\varepsilon_0$ до $+\infty$ отметим, что на этом интервале $M = \sup|f(p)| < 1$ и, тем самым,

$$|f(p)| \leqslant \min(M, \frac{K}{p}) = M\min(1, \frac{K}{Mp}).$$

Поэтому

$$\int\limits_{2n^{1/\alpha}\varepsilon_0}^{\infty} \Big(f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^{2n} dp = n^{1/\alpha}\int\limits_{2\varepsilon_0}^{\infty}(f(u))^{2n}du$$

$$\leqslant n^{1/\alpha}\Big(\int\limits_{2\varepsilon_0}^{K/M} M^{2n}du + M^{2n}\int\limits_{K/M}^{\infty}\Big(\frac{K}{Mu}\Big)^{2n}du\Big)$$

$$= n^{1/\alpha}\Big(M^{2n}(\frac{K}{M} - 2\varepsilon_0) + \frac{M^{2n-1}K}{2n-1}\Big).$$

Так как при $n \to \infty$ последнее выражение стремится к нулю, то ясно, что

$$\sup_n \int\limits_{2n^{1/\alpha}\varepsilon_0}^{\infty} \Big(f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^{2n} dp < \infty.$$

В сочетании с (45) это означает, что

$$\sup_n \|\Big(f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\varphi\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^n\|_{L_2} < \infty,$$

а из этого следует, что стремление

$$\Big(f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\varphi\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)^n \to \exp(-c_2|p|^\alpha)$$

осуществляется не только поточечно, но и в смысле слабой сходимости в пространстве $L_2(\mathbb{R})$. Покажем теперь, что последовательность

$$|\Big(f\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\varphi\Big(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\Big)\Big)|^n$$

достигает своего предела $\exp(-c_2|p|^\alpha)$ не только в смысле слабой сходимости, ко и по норме пространства L_2. Для этого ([6]) достаточно показать, что нормы функций – членов последовательности – стремятся к норме предельной функции. Так как

$$\left\| \left(f\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) \varphi\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) \right)^n \right\|_{L_2} = \int\limits_0^{2\varepsilon_0 n^{1/\alpha}} \left| f\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) \varphi\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) \right|^{2n} dp +$$

$$\int\limits_{2\varepsilon_0 n^{1/\alpha}}^{\infty} \left| f\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) \varphi\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) \right|^{2n} dp,$$

где второе слагаемое, как мы уже показали, стремится к нулю, то нам достаточно проверить, что

$$\int\limits_0^{2\varepsilon_0 n^{1/\alpha}} \left| f\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) \varphi\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) \right|^{2n} dp \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^{\infty} e^{-c_2|p|^\alpha} dp$$

или, что то же самое

$$\int\limits_0^{\infty} \left| f\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) \varphi\left(\frac{p}{n^{1/\alpha}}\right) \mathbf{1}_{[0, 2\varepsilon_0 n^{1/\alpha}]}(p) \right|^{2n} dp \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_0^{\infty} e^{-c_2|p|^\alpha} dp.$$

Справедливость этого предельного перехода гарантируется теоремой Лебега: последовательность подинтегральных функций стремится поточечно к предельной функции и обладает суммируемой мажорантой вида $\exp(-2d_0|p|^\alpha)$. □

Литература

1. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, Москва, 1986.
2. Н. В. Смородина, *Асимптотическое разложение для распределения гладкого однородного функционала от строго устойчивого случайного вектора. II.* — Теория вероятн. и ее примен. **44(2)** (1999), 458–465.
3. S. Albeverio, N. Smorodina, *A distributional approach to multiple stochastic integrals and transformations of the Poisson measure.* — Acta Appl. Math. **94** (2006), 1–19.
4. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Наука, Москва, 1958.
5. И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные случайные величины.* Наука, Москва, 1965.

6. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовых пространствах.* Изд-во ЛГУ, Ленинград, 1980.

Smorodina N. V., Faddeev M. M. Lévy–Khinchin representation of a class of signed measures.

We study properties of symmetric stable measures with the index of stability $\alpha \in (2,4) \cup (4,6)$. For such signed measures we construct a natural analogue of the Lévy-Khinchin representation. We show that in some special sense these measures are limit measures for the sums of independent random variables.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: smorodin@ns2691.spb.edu

Поступило 6 ноября 2008 г.