Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 361, 2008 г.

В. К. Сагателян

ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ МОМЕНТНЫМИ СВОЙСТВАМИ СУММ РЕКОРДОВ И ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ МАКСИМУМОВ

1. Введение

В настоящей работе рассмотрены вопросы, связанные с нахождением верхних границ для математических ожиданий и характеризациями распределений некоторыми свойствами математических ожиданий случайных величин, представляющих собой суммы рекордов и последовательных максимумов. Полученные результаты являются обобщением ряда известных оценок и характеризаций, приведенных в [1, 4]. Следует подчеркнуть, что основные методы получения соответствующих неравенств основываются на известных результатах теории порядковых статистик и математических рекордов, изложенных, в частности, в работах [1–3].

2. Оценки для моментов и характеризации распределений

В работе [4] рассматривались случайные величины $V_n = X(1) + \cdots + X(N(n))$, $n = 1, 2, \ldots$, где $X(1), X(2), \ldots$ – верхние рекордные величины, построенные по последовательности $X_1, X_2, \ldots$ независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин с непрерывной функцией распределения (ф.р.) $F(x)$. Через $N(n)$, $n = 1, 2, \ldots$, обозначено число рекордов в последовательности $X_1, X_2, \ldots, X_n$, $N(0) = 0$, $N(1) = 1$. Таким образом, V_n – сумма всех рекордных величин от X_1 до X_n. Мы рассмотрим более общую случайную величину

$$V_{n,m} = X(N(m) + 1) + \cdots + X(N(n)), \quad n, m = 1, 2, \ldots, \quad 0 \leqslant m < n.$$

Очевидно, что $V_{n,m} = V_n - V_m$ – это сумма всех верхних рекордов среди $X_{m+1}, X_{m+2}, \ldots, X_n$ и $V_{n,0} = V_n$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $X, X_1, X_2, \ldots$ – н.о.р. случайные величины с непрерывной ф.р. $F(x)$, нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Тогда для любых $n, m = 1, 2, \ldots$, $0 \leqslant m < n$ имеет* *место неравенство*

$$EV_{n,m} \leqslant \gamma_{n,m}, \tag{1}$$

где

$$\gamma_{n,m} = \left(\int_0^1 \left(\frac{x^m - x^n}{1-x} \right)^2 dx - \left(\sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

причем равенство в (1) *достигается тогда и только тогда, когда*

$$u(x) = \frac{\frac{x^m - x^n}{1-x} - \sum\limits_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}}{\gamma_{n,m}}, \quad 0 < x < 1, \tag{2}$$

где $u(x) = F^{-1}(x)$ *– функция, обратная к ф.р.* F.

Замечание 1. Отметим, что условия теоремы $EX = 0$ и $DX = 1$ через функцию $u(x)$ можно записать в следующем виде:

$$\int_0^1 u(x)dx = 0 \tag{3}$$

и

$$\int_0^1 u^2(x)dx = 1. \tag{4}$$

Доказательство. Для величин $V_{n,m}$, $0 \leqslant m < n$, справедливы равенства

$$V_{n,m} = \sum_{k=m+1}^{n} X_{k,k}\xi_k,$$

где $\xi_1, \xi_2, \dots \xi_n$ – индикаторы рекордов, т.е. $\xi_k = 1$, если X_k – рекорд, и $\xi_k = 0$ иначе, а $X_{1,1}, X_{2,2}, \dots, X_{n,n}$ – последовательные максимумы, построенные по последовательности $X_1, X_2, \dots, X_n$. Известно, что индикаторы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ независимы. Более того, при любом $k = 1, 2, \dots, n$ независимы также и величины $X_{k,k}$ и ξ_k (см., например, [2]). Учитывая, что $P\{\xi_k = 1\} = \frac{1}{k}$, $k = 1, 2, \dots, n$, получим соотношение

$$EV_{n,m} = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{EX_{k,k}}{k}. \tag{5}$$

Поскольку

$$EX_{k,k} = k \int_{-\infty}^{\infty} xF^{k-1}(x)dF(x),$$

то после перехода к обратной функции $u(x)$ получаем, что

$$EX_{k,k} = k \int_{0}^{1} u(x)x^{k-1}dx. \tag{6}$$

Учитывая (5) и (6), имеем

$$EV_{n,m} = \int_{0}^{1} u(x) \sum_{k=m+1}^{n} x^{k-1}dx. \tag{7}$$

Введем обозначения

$$\tau_{n,m}(x) = \sum_{k=m+1}^{n} x^{k-1} = \frac{x^m - x^n}{1-x}, \quad \tau = \int_{0}^{1} \tau_{n,m}(x)dx = \sum_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Учитывая введенные обозначения и условие (3), можем переписать (7) следующим образом

$$EV_{n,m} = \int_{0}^{1} u(x)(\tau_{n,m}(x) - \tau)dx. \tag{8}$$

Применяя к (8) известное неравенство Коши–Буняковского–Шварца, получим, что

$$|EV_{n,m}| \leqslant \left(\int_{0}^{1} u^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{0}^{1} (\tau_{n,m}(x) - \tau)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}},$$

а так как выполнено условие (4), то

$$EV_{n,m} \leqslant \left(\int_{0}^{1} (\tau_{n,m}(x) - \tau)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Принимая в качестве $\gamma_{n,m}$ правую часть этого неравенства, получаем неравенство (1).

Для доказательства второй части теоремы необходимо найти функцию $u(x)$, при которой в (1) достигается равенство. Положим

$$u(x) = \frac{\tau_{n,m}(x) - \tau}{\gamma_{n,m}},$$

тогда из (8) получаем

$$EV_{n,m} = \frac{\int\limits_0^1 (\tau_{n,m}(x) - \tau)^2 dx}{\gamma_{n,m}} = \frac{\gamma_{n,m}^2}{\gamma_{n,m}} = \gamma_{n,m}.$$

Таким образом равенство в (1) достигается, а функция $u(x)$, при которой этот максимум достигается, имеет вид:

$$u(x) = \frac{\frac{x^m - x^n}{1-x} - \sum\limits_{k=m+1}^{n} \frac{1}{k}}{\gamma_{n,m}}, \quad 0 < x < 1.$$

Остается показать, что $u(x)$ является обратной функцией для некоторой непрерывной ф.р. и что для нее выполнены условия (3) и (4). Очевидно, что $u(x)$ является монотонно возрастающей непрерывной функцией, а значит для нее существует однозначно определенная монотонно возрастающая и непрерывная обратная функция $F(x) = u^{-1}(x)$, значения которой принадлежат интервалу $(0, 1)$.

Легко проверяются условия (3) и (4):

$$\int\limits_0^1 u(x)dx = \frac{1}{\gamma_{n,m}} \int\limits_0^1 \tau_{n,m}(x)dx - \frac{1}{\gamma_{n,m}} \int\limits_0^1 \tau dx = 0,$$

$$\int\limits_0^1 u^2(x)dx = \frac{1}{\gamma_{n,m}^2} \int\limits_0^1 (\tau_{n,m}(x) - \tau)^2 dx = \frac{\int\limits_0^1 (\tau_{n,m}(x) - \tau)^2 dx}{\int\limits_0^1 (\tau_{n,m}(x) - \tau)^2 dx} = 1.$$

Теорема 1 доказана.

Следующая теорема дает аналогичную оценку для случайной величины $T_{n,m} = X_{m,m} + X_{m+1,m+1} + \cdots + X_{n,n}$, $n, m = 1, 2, \ldots, 0 \leqslant m \leqslant n$. Величины $X_{k,k}$, $k = 1, 2, \ldots$, представляют собой последовательные максимумы, построенные по последовательности $X_1, X_2, \ldots$ случайных величин. Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть н.о.р. случайные величины $X_1, X_2, \ldots$ с общей непрерывной ф.р. $F(x)$ имеют нулевое математическое ожидание и единичную дисперсию. Тогда справедливо следующее неравенство*

$$ET_{n,m} \leqslant \sigma_{n,m}, \tag{9}$$

где

$$\sigma_{n,m} = \left(\int\limits_0^1 \left(\sum_{k=m}^{n} kx^{k-1}\right)^2 dx - (n-m+1)^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

причем равенство в (9) достигается тогда и только тогда, когда

$$u(x) = F^{-1}(x) = \frac{\sum\limits_{k=m}^{n} kx^{k-1} - (n-m+1)}{\sigma_{n,m}}.$$

Замечание 2. Отметим, что при $m = n$, $T_{n,n} = X_{n,n}$, для которой существует классический результат, приведенный в работе [1].

Доказательство. Для математического ожидания $ET_{n,m}$ имеем

$$ET_{n,m} = \sum_{k=m}^{n} EX_{k,k}. \tag{10}$$

Действуя как и выше и учитывая, что $u(x) = F^{-1}(x)$, получим

$$EX_{k,k} = k\int\limits_0^1 u(x)x^{k-1}dx.$$

Подставив это выражение в (10), приходим к равенству

$$ET_{n,m} = \int\limits_0^1 u(x)\sum_{k=m}^{n} kx^{k-1}dx. \tag{11}$$

Введем обозначения

$$\beta_{n,m}(x) = \sum_{k=m}^{n} kx^{k-1},$$

$$\beta = \int\limits_0^1 \beta_{n,m}(x)dx = \int\limits_0^1 \sum_{k=m}^{n} kx^{k-1}dx = n-m+1.$$

Условия теоремы обеспечивают выполнение равенств (3) и (4), а значит, можем переписать (11) в виде

$$ET_{n,m} = \int_0^1 u(x)(\beta_{n,m}(x) - \beta)dx. \tag{12}$$

Применяя к этому выражению неравенство Коши–Буняковского–Шварца, имеем

$$|ET_{n,m}| \leqslant \left(\int_0^1 u^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 (\beta_{n,m}(x) - \beta)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Далее, учитывая условие (4), получаем, что

$$ET_{n,m} \leqslant \left(\int_0^1 (\beta_{n,m}(x) - \beta)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 (\beta^2_{n,m}(x) - \beta^2)dx\right)^{\frac{1}{2}} = \sigma_{n,m},$$

т.е. приходим к (9). Доказательство второй части теоремы проводим точно так же, как и в предыдущем случае. На этот раз в качестве обратной функции берем

$$u(x) = F^{-1}(x) = \frac{\beta_{n,m}(x) - \beta}{\sigma_{n,m}} = \frac{\sum\limits_{k=m}^{n} kx^{k-1} - (n-m+1)}{\sigma_{n,m}}, \quad 0 < x < 1. \tag{13}$$

Останется подставить это выражение в (12) и убедиться, что действительно максимум для величины $ET_{n,m}$ равен $\sigma_{n,m}$ и достигается, когда обратная функция ф.р. $F(x)$ имеет вид (13). Очевидно, $u(x)$ является непрерывной, монотонно возрастающей функцией. Таким образом обеспечивается существование однозначно определенной непрерывной и монотонно возрастающей ф.р. $F(x)$ со значениями в $(0, 1)$. Условия (3) и (4) также легко проверяются. Теорема 2 доказана.

Следствие. *Величина* $T_{n,m}$ *при* $m = 1$ *совпадает с суммой всех последовательных максимумов* $T_n = T_{n,1}$, *для которой имеет место оценка*

$$ET_n \leqslant \sigma_n, \tag{14}$$

где

$$\sigma_n = \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^n kx^{k-1}\right)^2 dx - n^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

причем равенство в (14) *достигается тогда и только тогда, когда*

$$u(x) = F^{-1}(x) = \frac{\sum\limits_{k=1}^n kx^{k-1} - n}{\sigma_n}.$$

Литература

1. Г. Дэйвид, *Порядковые статистики.* М., 1979.
2. В. Б. Невзоров, *Рекорды. Математическая теория.* Фазис, М., 2000.
3. M. Ahsanullah, V. B. Nevzorov, *Ordered Random Variables.* NSP, New York, 2001.
4. I. S. Akhundov, A. Berred, V. B. Nevzorov, *On the influence of record terms in the addition of independent random variables.* — Communications Statistics: Theory and Methods **36** (2007), No. 7, 1291–1303.

Saghatelyan V. K. Characterizations of distributions via moment properties of sums of records and successive maxima.

We considered the estimation problem of the expectations of random variables, that are sums of records and successive maxima. The corresponding upper bounds and characterizations of source distributions, in situation of which these bounds are reached, are also obtained.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: vahagn_s@yahoo.com

Поступило 26 ноября 2008 г.