Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 361, 2008 г.

О. В. Русаков

СУММЫ НЕЗАВИСИМЫХ ПУАССОНОВСКИХ СУБОРДИНАТОРОВ И ИХ СВЯЗЬ СО СТРОГО α–УСТОЙЧИВЫМИ ПРОЦЕССАМИ ТИПА ОРНШТЕЙНА—УЛЕНБЕКА

1. Введение, основное определение и свойства

Пусть на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}\}$ задана последовательность случайных величин $\{\zeta\} = \{\zeta_0, \zeta_1, \dots\}$ и независящий от $\{\zeta\}$ пуассоновский случайный процесс $\Pi(s;\lambda) = \Pi(s)$, $s \geqslant 0$, с постоянной интенсивностью $\lambda > 0$. Процесс $\Pi(s)$ мы рассматриваем, в зависимости от контекста, либо как процесс с кусочно постоянными, непрерывными справа траекториями, имеющими единичные скачки, либо как пуассоновскую считающую меру интервала $[0, s)$.

Определение 1. *Рассмотрим случайную замену времени у последовательности $\{\zeta\}$, задаваемую посредством субординатора Π,*

$$\psi(s) = \psi_\Pi(s) = \psi_{\Pi,\zeta}(s) \overset{\triangle}{=} \zeta_{\Pi(s)} = \zeta_\Pi(s)\,, \quad s \geqslant 0. \tag{1}$$

Процесс $\psi(s)$, имеющий кусочно-постоянные, непрерывные справа траектории, заданный на $\mathbb{R}_+$, назовем процессом [пуассоновского] случайного индекса (ПСИ). Процесс Π будем называть ведущим или управляющим, а последовательность $\{\zeta\}$ – формирующей для процесса случайного индекса ζ_Π.

Процесс случайного индекса имеет следующее представление в виде суммы случайных величин из последовательности $\{\zeta\}$ с весами – случайными индикаторами, значения которых определяются процессом Π,

$$\psi_\Pi(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_j \,\mathbb{I}\{\Pi(s) = j\}\,. \tag{2}$$

Механизм формирования модели процесса случайного индекса следующий. Пусть $s_k < s_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$ два последовательных момента

Работа поддержана грантом НШ 638.2008.1 .

скачков процесса $\Pi(s)$ (точку 0 мы по умолчанию считаем моментом скачка, когда процесс "запрыгивает" в ноль). Случайный интервал $[s_k, s_{k+1})$ – спейсинг процесса Π маркируется случайной величиной ζ_k, то есть каждой точке спейсинга процесса Π приписывается, зависящая от номера этого интервала, случайная величина ζ_k. При переходе к следующему спейсингу $[s_{k+1}, s_{k+2})$, случайная величина ζ_k, которая маркирует спейсинг $[s_k, s_{k+1})$, *замещается* следующей случайной величиной ζ_{k+1} из последовательности $\{\zeta\}$.

В качестве формирующей последовательности $\{\zeta\}$ мы рассматриваем последовательность, состоящую из независимых одинаково распределенных случайных величин.

В этом случае, по причине отсутствия последействия у пуассоновского процесса, представляется очевидным тот факт, что процесс случайного индекса обладает свойством строгой стационарности.

Заметим, что в случае, когда формирующая последовательность представляет собой накопленные суммы независимых случайных величин, мы получим хорошо известные процессы. В частности, если пуассоновскую замену времени применить к последовательности целых неотрицательных чисел, то мы получим сам пуассоновский процесс, соответствующий данной пуассоновской считающей мере. Нетрудно показать, что в случае, когда формирующая последовательность состоит из накопленных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин, процесс случайного индекса представляет собой хорошо известный сложный пуассоновский процесс, также называемый обобщенным процессом Кокса (см., напр., [1]).

Дадим несколько свойств пуассоновского процесса случайного индекса. Рассмотрим случай, когда формирующая последовательность состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\zeta\} = \{\xi\} = \{\xi_0, \xi_1, \dots\}$. В этом случае вместо обозначения $\{\zeta\}$ мы используем обозначение $\{\xi\}$, и, соответственно, $\psi(s) = \xi_\Pi(s)$.

Свойство 1. *Процесс случайного индекса $\xi_\Pi(s)$, управляемый пуассоновским процессом Π с интенсивностью λ, является марковским процессом со следующей переходной вероятностью*

$$\mathbb{P}\{\xi_\Pi(s+t) \in A \mid \xi_\Pi(s) = x\} = e^{-\lambda t}\mathbb{I}_A(x) + (1 - e^{-\lambda t})\mathcal{P}_\xi\{A\}, \qquad (3)$$

где $x \in \mathbb{R}$; $s, t \geqslant 0$; A – борелевское множество прямой (фазового пространства); $\mathcal{P}_\xi$ – распределение случайной величины ξ_0 ; $\mathbb{I}_A(x)$ – индикаторная функция множества A.

Свойство 2. *Преобразование Фурье данной переходной вероятности* (3) *из Свойства* 1 *имеет следующий вид*

$$\begin{aligned} f(\nu) = f_{x,t}(\nu) &= e^{-\lambda t} e^{i\nu x} + (1 - e^{-\lambda t})\phi(\nu) \\ &= e^{-\lambda t}\left(e^{i\nu x} - \phi(\nu)\right) + \phi(\nu), \end{aligned} \tag{4}$$

где $\phi(\nu)$ *– характеристическая функция случайной величины* $\xi_0 \in \{\xi\}$.

Доказательство Свойства 1 и Свойства 2. Справедливость Свойства 1 следует из выражения для условной вероятности

$$\mathbb{P}\left\{\xi_\Pi(s+t) \in A \mid \xi_\Pi(s)\right\} = \begin{cases} \xi_\Pi(s), & \Pi(s+t) = \Pi(s); \\ \xi, & \Pi(s+t) \neq \Pi(s), \end{cases}$$

где ξ – независящая от $\xi_\Pi(u)$, $u \le s$, для фиксированного $s \geqslant 0$ случайная величина с одинаковым с ξ_0 распределением.

Справедливость Свойства 2 следует из того, что посредством равенства (3) переходная вероятность представляется в виде смеси двух распределений.

Из Свойства 1 очевидно следует однородность процесса $\xi_\Pi(s)$ и то, что переходная вероятность имеет атом в точке x.

Свойство 3. *Характеристические функции* $\phi_\eta(\mu,\nu)$ *и* $\phi_\xi(\tau)$ *случайного вектора* $\eta = \left(\xi_{\Pi(r)}, \xi_{\Pi(r+s)}\right) \in \mathbb{R}^2$ *и случайной величины* ξ_0, *соответственно, связаны следующим равенством*

$$\phi_\eta(\mu,\nu) = \phi_{\eta\,;\,r,r+s}(\mu,\nu) = \phi_\xi(\mu)\phi_\xi(\nu)\left(1 - e^{-\lambda s}\right) + \phi_\xi(\mu+\nu)e^{-\lambda s}\,. \tag{5}$$

Отметим, что правая часть данного равенства не зависит от r. Это отражает стационарность парных распределений, которая при выполнении марковского свойства влечет стационарность процесса.

Доказательство Свойства 3. При вычислении математического ожидания разобьем множество интегрирования на две части, в одной из которых случайные величины, взятые из последовательности $\{\xi_j\}$, будут совпадать, а во второй – независимы, и далее воспользуемся независимостью последовательности $\{\xi_j\}$ от пуассоновского процесса $\Pi(s)$,

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\exp\{i(\mu\xi_{\Pi(r)} + \nu\xi_{\Pi(r+s)})\} \\ &= \mathbb{E}\left\{\exp\{i(\mu\xi_{\Pi(r)} + \nu\xi_{\Pi(r+s)})\}\mathbb{I}\{\xi_{\Pi(r)} = \xi_{\Pi(r+s)}\}\right\} + \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\mathbb{E}\left\{\exp\{i(\mu\xi_{\Pi(r)}+\nu\xi_{\Pi(r+s)})\}\mathbb{I}\{\xi_{\Pi(r)}\neq\xi_{\Pi(r+s)}\}\right\}\\
&\quad=\mathbb{E}\exp\{i(\mu+\nu)\xi_1\}\,\mathbb{E}\mathbb{I}\{\xi_{\Pi(r)}=\xi_{\Pi(r+s)}\}\\
&\quad+\mathbb{E}\exp\{i\mu\xi_1\}\mathbb{E}\exp\{i\nu\xi_2\}\mathbb{E}\mathbb{I}\{\xi_{\Pi(r)}\neq\xi_{\Pi(r+s)}\}\\
&\quad=\phi(\mu+\nu)e^{-\lambda s}+\phi(\mu)\phi(\nu)\left(1-e^{-\lambda s}\right).
\end{aligned}
$$

Свойство 3 доказано.

Пример 1. Пусть случайная величина ξ_0 имеет стандартное нормальное распределение $\mathcal{N}\{0,1\}$. Тогда характеристическая функция случайного вектора $(\xi_\Pi(r),\xi_\Pi(r+s))$, $s,r\geqslant 0$, не зависит от r и имеет следующий вид

$$
\phi(\mu,\nu)=e^{-(\mu^2+\nu^2)/2}\left(1-e^{-\lambda s}+e^{-\lambda s}e^{-\mu\nu}\right). \tag{6}
$$

Пример 2. В случае, когда формирующая последовательность состоит из независимых одинаково распределенных стандартных нормальных случайных величин, процесс случайного индекса будет стационарным процессом с нормальными одномерными распределениями, но не (совокупно) гауссовским. В частности, суммы его сечений будут представлять собой гауссовские случайные величины со случайным коэффициентом масштаба. Так, например,

$$
\xi_\Pi(s)+\xi_\Pi(t)\overset{d}{=}Y\xi,
$$

где $\xi\in\mathcal{N}\{0,1\}$; случайная величина Y не зависит от ξ и имеет распределение

$$
Y=\begin{cases}2, & \text{с вероятностью } \exp\{-\lambda(t-s)\};\\ \sqrt{2}, & \text{с вероятностью } 1-\exp\{-\lambda(t-s)\}.\end{cases}
$$

Пример 3. Пусть случайная величина ξ_0 имеет симметричное устойчивое распределение с параметром $0<\alpha\leqslant 2$. Тогда характеристическая функция случайного вектора $(\xi_\Pi(r),\xi_\Pi(r+s))$, $s,r\geqslant 0$, не зависит от r и имеет следующий вид

$$
\phi(\mu,\nu)=\left(e^{-|\mu+\nu|^\alpha}-e^{-|\mu|^\alpha-|\nu|^\alpha}\right)e^{-\lambda s}+e^{-|\mu|^\alpha-|\nu|^\alpha}. \tag{7}
$$

Пример 4. Этот пример показывает, что телеграфный процесс является частным случаем пуассоновского процесса случайного индекса когда формирующая последовательность – последовательность испытаний Бернулли. Сформулируем данный пример как утверждение.

Утверждение 1. *Пусть случайная величина ξ_0 из последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\xi\}$ принимает значения ± 1 с вероятностью $1/2$. Тогда процесс случайного индекса $\xi_\Pi(s)$, управляемый пуассоновским процессом Π с интенсивностью λ, совпадает по распределению со (стандартизованным) телеграфным процессом, который управляется пуассоновским процессом с интенсивность $\lambda/2$.*

Под стандартизованным телеграфным процессом мы понимаем случайный процесс с траекториями в пространстве $\mathcal{D}$, определенный выражением $\varepsilon_0(-1)^{\Pi(s)}$, $s \geqslant 0$, где Π – некоторый пуассоновский процесс, а ε_0 – независимая от Π случайная величина с распределением ± 1, $1/2$.

Доказательство Утверждения 1. Справедливость Утверждения 1 следует из того, что при заданных условиях очевидны высказывания:

а) траектории $\xi_\Pi(s)$ – кусочно постоянные, принимающие значения или $+1$, или -1;

б) управляющий процесс Π для $\xi_\Pi(s)$ "прорежается" независимыми одинаково распределенными индикаторами, которые в момент скачка процесса Π с вероятностью $1/2$ меняют значение процесса $\xi_\Pi(s)$ на противоположное и с вероятностью $1/2$ – не меняют, соответственно.

Завершает доказательство хорошо известный факт о том, что если точечный пуассоновский процесс с интенсивностью λ "проредить" путем выкидывания независимым образом точки (моменты скачков) с вероятностью $0 \leqslant q < 1$, – мы получим точечный пуассоновский процесс с интенсивностью $(1-q)\lambda$.

Свойство 4. *Процесс случайного индекса $\xi_\Pi(s)$ с управляющей последовательностью, состоящей из независимых, одинаково распределенных случайных величин, не является процессом с независимыми приращениями.*

Доказательство Свойства 4. Рассмотрим точки на оси времени $0 < s_1 < s_2 < s_3$ и соответствующие им интервалы разбиения $J_1 = [0, s_1]$, $J_2 = (s_1, s_2)$, $J_3 = [s_2, s_3]$. Возможно 8 случаев скачков пуассоновского процесса Π, которые возникают по принципу: был ли или нет хотя бы один скачок у Π на интервале J_k, $k = 1, 2, 3$. Нас будут интересовать приращения на интервалах J_1 и J_3. В случае, когда на интервалах J_1 и J_3 есть скачки, а на интервале J_2 нет скачков, то $\xi_\Pi(s_1) - \xi_\Pi(0)$ и $\xi_\Pi(s_3) - \xi_\Pi(s_2)$ будут зависимы. Например, в случае, когда на интервалах J_1 и J_3 ровно по одному скачку, и на J_2 нет скачков, то соответствующие приращения есть $\xi_1 - \xi_0$ и $\xi_2 - \xi_1$, – это коррелированные случайные величины.

Особо отметим, что в остальных семи случаях скачков пуассоновского процесса Π приращения на интервалах J_1 и J_3 – независимы.

2. Суммы независимых одинаково распределенных процессов случайного индекса

Рассмотрим независимые копии случайного элемента $\xi_\Pi(s)$, когда соответствующие пуассоновские процессы – тоже независимы. То есть, пусть при $s \geqslant 0$ следующая последовательность состоит из независимых случайных процессов:

$$\begin{aligned}&\Big\{\xi_{\Pi(s)};\ \xi^{[1]}_{\Pi_1(s)}, \xi^{[2]}_{\Pi_2(s)}, \dots, \xi^{[i]}_{\Pi_i(s)}, \dots\Big\}\\ &= \big\{\xi_\Pi(s);\ \xi_{\Pi_1}(s), \xi_{\Pi_2}(s), \dots \xi_{\Pi_i(s)}, \dots\big\}\end{aligned} \tag{8}$$

– независимые одинаково распределенные случайные элементы с траекториями из $\mathcal{D}$. Пуассоновские процессы $\{\Pi_i(s)\}$, $i \in \mathbb{N}$, – совокупно независимы, независимы от $\Pi(s)$, и все они имеют общую интенсивность $\lambda > 0$. Соответствующие формирующие последовательности $\{\xi^{[i]}\} = \{\xi^{[i]}_0, \xi^{[i]}_1, \dots\}$, $i \in \mathbb{N}$, $\{\xi\} = \{\xi_0, \xi_1, \dots\}$ также взаимно независимы, не зависят от данных пуассоновских процессов и внутри себя состоят из независимых одинаково распределенных случайных величин. Процесс случайного индекса $\xi_{\Pi(s)}$ с отсутствующим верхним индексом вводится для обозначения распределения. Пусть $\mathbb{E}\xi_0 = 0$ и $\mathbb{D}\xi_0 = 1$.

Определим нормированные, накопленные по индексу i суммы

$$U_N(s) \triangleq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \xi^{[i]}_{\Pi_i(s)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i=1}^{N} \xi_{\Pi_i}(s)\,. \tag{9}$$

По причине отсутствия последействия у пуассоновского процесса, очевидно, что $U_N(s)$ – стационарный процесс.

Так как для каждого фиксированного $s \geqslant 0$ случайная величина $U_N(s)$ состоит из независимых одинаково распределенных слагаемых (центрированных и нормированных), то в силу центральной предельной теоремы Леви она очевидно сходится по распределению к стандартной нормальной величине при $N \to \infty$.

Ключевой момент в рассмотрении сумм (9) заключается в том, что асимптотически по $N \to \infty$ они, как случайные функции от s, ведут себя как процессы типа Орнштейна-Уленбека с коэффициентом вязкости, равным λ. Необходимая экспоненциально убывающая ковариация процесса Орнштейна-Уленбека в гауссовском случае следует из Леммы 1.

Лемма 1. *Для всякого натурального N, для всяких неотрицательных s, r верно следующее равенство для ковариаций*

$$\operatorname{cov}\left(U_N(r), U_N(r+s)\right) = \exp\{-\lambda s\}\,. \tag{10}$$

Заметим, что правая часть равенства (10) *не зависит от r, что показывает стационарность в широком смысле процесса $U_N(s)$ при любом натуральном N.*

Доказательство Леммы 1. Отметим, что доказательство принципиально мало отличается от доказательства Свойства 3. Вычислим сначала ковариацию для одного слагаемого в правой части (9), воспользовавшись независимостью случайных величин $\{\xi_j\}$ и пуассоновского процесса $\Pi(s)$, равенством $\mathbb{E}\xi_j^2 = 1$, а также однородностью приращений пуассоновского процесса. Используя представление (2), имеем цепочку равенств

$$\operatorname{cov}\left(\xi_{\Pi(r)}, \xi_{\Pi(r+s)}\right) = \mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j\, \mathbb{I}\{\Pi(r) = j\} \sum_{i=0}^{\infty} \xi_i\, \mathbb{I}\{\Pi(r+s) = i\}\right\}$$

$$= \mathbb{E}\left\{\sum_{j=0}^{\infty} \xi_j^2\, \mathbb{I}\{\Pi(r) = \Pi(r+s) = j\}\right\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{E}\{\xi_j^2\}\, \mathbb{P}\{\Pi(r) = \Pi(r+s) = j\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\Pi(r) = \Pi(r+s) = j\} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}\{\Pi(r) = \Pi(r+s),\, \Pi(r) = j\}$$

$$= \mathbb{P}\{\Pi(r) = \Pi(r+s)\} = \mathbb{P}\{\Pi(0) = \Pi(s)\} = \mathbb{P}\{\Pi(s) = 0\} = \exp\{-\lambda s\}\,.$$

Здесь переходное равенство к последней строчке справедливо в силу формулы полной вероятности.

Так как случайные элементы $\xi_{\Pi_i(s)}$ и $\xi_{\Pi_j(s)}$ при разных индексах $i \neq j$ независимы и одинаково распределены, то дальнейшие вычисления элементарны,

$$\operatorname{cov}\left(U_N(r), U_N(r+s)\right) = \mathbb{E}\left\{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\xi_{\Pi_i(r)}\sum_{j=1}^{N}\xi_{\Pi_j(r+s)}\right\}$$

$$= \frac{1}{N}\mathbb{E}\left\{\sum_{j=1}^{N}\xi_{\Pi_j(r)}\xi_{\Pi_j(r+s)}\right\}$$

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\operatorname{cov}\left(\xi_{\Pi_j(r)},\, \xi_{\Pi_j(r+s)}\right) = \exp\{-\lambda s\}\,.$$

Очевидно, что дисперсия $\xi_{\Pi(s)}$ равна 1, то есть равномерно ограничена по s, поэтому проведенные изменения порядка интегрирования законны. Утверждение 1 доказано.

Следствие Леммы 1. *Из первой части доказательства утверждения 1 следует равенство для (авто)ковариации процесса случайного индекса под управлением пуассоновского процесса, сформированного последовательностью независимых одинаково распределенных случайных величин, центрированных и нормированных,*

$$\operatorname{cov}\left(\xi_\Pi(r), \xi_\Pi(r+s)\right) = \exp\{-\lambda s\}\,. \tag{11}$$

Далее вычислим парные распределения для сумм независимых процессов пуассоновского случайного индекса в следующем частном случае. Рассмотрим случай, когда формирующая последовательность состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с α-устойчивым законом распределения, $0 < \alpha \leq 2$. По такой формирующей последовательности с помощью управляющего пуассоновского процесса зададим процесс случайного индекса. Затем рассмотрим независимые копии таких процессов случайного индекса, следуя обозначениям (8). Также обозначим $\Pi_1(s), \dots, \Pi_N(s)$ – управляющие пуассоновские процессы и $\{\xi^{[1]}\}, \dots \{\xi^{[N]}\}$ – соответствующие им формирующие последовательности. Рассмотрим суммы, аналогичные (9), с подходящей нормировкой

$$L_N(s) \stackrel{\triangle}{=} \frac{1}{N^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{N}\xi^{[j]}_{\Pi_j(s)} = \frac{1}{N^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{N}\xi_{\Pi_j}(s)\,. \tag{12}$$

Члены каждой формирующей последовательности в (12) имеют распределение ξ_0 с характеристической функцией $\phi_\xi(\tau) = \exp\{-|\tau|^\alpha\}$, $\tau \in \mathbb{R}$. В силу того что для каждого фиксированного $s \geq 0$ слагаемые в сумме $\sum_{j=1}^{N} \xi_{\Pi_j}(s)$ независимы, мы получаем при всех $N \in \mathbb{N}$ и при каждом $s \geq 0$ то, что случайные величины $L_N(s)$ имеют одну и ту же характеристическую функцию $\phi_\xi(\tau)$. Так как пуассоновский процесс обладает свойством отсутствия последействия то очевидно, что $L_N(s)$ – стационарный процесс по $s \geq 0$.

Наша цель описать зависимость между $L_N(s)$ и $L_N(t)$ для разных, вообще говоря, s и t. Для этого мы вычислим предел $\varphi_{s,t}(\nu_0, \nu_1)$ характеристических функций случайного вектора $(L_N(s), L_N(t))$ при $N \to \infty$.

Лемма 2. *Предел по распределению $(L(s), L(t))$ случайного вектора $(L_N(s), L_N(t))$, при $N \to \infty$, задается следующей характеристической функцией, $t \geqslant s$,*

$$\begin{aligned}&\varphi_{s,t}(\nu_0, \nu_1)\\&\quad = \exp\left\{ \left(1 - e^{-\lambda(t-s)}\right)(-|\nu_0|^\alpha - |\nu_1|^\alpha) - e^{-\lambda(t-s)}|\nu_0 + \nu_1|^\alpha \right\}\end{aligned} \tag{13}$$

Другими словами, суммы независимых одинаково распределенных нормированных процессов случайного индекса $\{L_N\}$, $s \geqslant 0$ имеют в пределе при $N \to \infty$ совместные парные распределения, характеристические функции которых имеют вид (13).

Доказательство. Во-первых, заметим, что характеристическая функция (13) похожа на характеристическую функцию (7) из примера 3 с той лишь разницей, что в Примере 3 возникает смесь характеристических функций, а в Лемме 2 свертка масштабированных распределений с теми же самыми характеристическими функциями, причем коэффициенты смеси совпадают с коэффициентами масштаба.

Во вторых заметим, что так как пуассоновский процесс имеет стационарные приращения, то достаточно вычислить для некоторого $s > 0$ характеристическую функцию вектора $(L_N(0), L_N(s))$, которую мы обозначим $\varphi(\nu_0, \nu_1) \equiv \varphi_s(\nu_0, \nu_1)$.

В дальнейшем знак $\sharp$ – "диез" используется для обозначения мощности множества. Для упрощения обозначений в доказательстве будем использовать обозначение $\xi_j^{[i]} = \xi_j^i$, $j \in \mathbb{Z}_+$, $i \in \mathbb{N}$. Также для упрощения, в силу того, что $\Pi(s;\, \lambda)$ совпадает по распределению с

$\Pi(\lambda s;\,1)$, мы доказывем Лемму 2 для случая $\lambda = 1$. Символ $\overline{\overline{o}}(\cdot)$ обозначает функцию "o - малое" при $N \to \infty$.

Зафиксируем натуральное N. Применив повторное математическое ожидание относительно разбиения Ω следующими событиями $A_k = \{\omega : \ \sharp\{j : \Pi_j(0)(\omega) = \Pi_j(s)(\omega)\} = k\ \}, \ \ k = 1, \dots N,$ получим

$$\varphi(\nu_0,\nu_1) \ = \mathbb{E}\exp\left\{\frac{i\nu_0}{N^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{N}\xi_{\Pi_j}(0) + \frac{i\nu_1}{N^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{N}\xi_{\Pi_j}(s)\right\}$$
$$= \mathbb{E}\mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{i}{N^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{N}\left(\nu_0\xi_{\Pi_j}(0) + \nu_1\xi_{\Pi_j}(s)\right)\right\}|\sharp\{j : \Pi_j(0) = \Pi_j(s)\}\right)$$
$$\triangleq I_1.$$

Далее воспользуемся независимостью всей совокупности управляющих пуассоновских процессов $\{\Pi_j(s)\}_{j\in\mathbb{N}}$ от формирующих последовательностей $\{\{\xi_i^1\}_{i\in\mathbb{Z}_+}, \dots \{\xi_i^N\}_{i\in\mathbb{Z}_+}\}$, одинаковым распределением членов управляющих последовательностей по всей совокупности этих последовательностей и тем, что событие $\{\Pi_j(0) = \Pi_j(s)\}$ означает что случайная величина ξ_0^j к моменту (непрерывного) времени s не заместилась на независимую копию, а событие $\{\Pi_j(0) \neq \Pi_j(s)\}$ означает что случайная величина ξ_0^j заместилась на независимую копию, которую в силу того, что вычисляются математические ожидания, можно положить равной ξ_1^j.

Перенумеруем рассматриваемые процессы случайного индекса справа налево по первому скачку соответствующего пуассоновского процесса. Здесь это понадобится затем, чтобы, сначала шли номера (процессов случайного индекса) $1 \le j \le N$, для которых выполнено событие $\{\Pi_j(0) = \Pi_j(s)\}$. Продолжим цепочку равенств

$$I_1 = \sum_{k=0}^{N}\mathbb{P}(\sharp\{j : \Pi_j(0) = \Pi_j(s)\} = k)$$
$$\times\,\mathbb{E}\left(\exp\left\{\frac{i}{N^{1/\alpha}}\left(\sum_{j=1}^{k}(\nu_0+\nu_1)\xi_0^j \ + \sum_{j=k+1}^{N}(\nu_0\xi_0^j + \nu_1\xi_1^j)\right)\right\}\right) \triangleq I_2.$$

Вычислим первый сомножитель в I_2. Положим для простоты $\lambda = 1$.

Запишем распределение индикаторов, $j = 1, \dots N$,

$$\mathbb{I}_{\{\Pi_j(0)=\Pi_j(s)\}} = \begin{cases} 1, & \text{с вероятностью} \quad \exp\{-s\} \\ 0, & \text{с вероятностью} \quad 1 - \exp\{-s\}\,. \end{cases}$$

Теперь применим независимость этих индикаторов при разных $j = 1, \dots N$,

$$\mathbb{P}(\sharp\{j : \Pi_j(0) = \Pi_j(s)\} = k) = C_N^k e^{-ks} \left(1 - e^{-s}\right)^{N-k} \triangleq p_{k,N}(s)\,.$$

Воспользуемся тем, что при разных $j \neq m$ случайные величины $\xi_\cdot^j$ и $\xi_\cdot^m$ независимы (какое бы значение из $\mathbb{Z}_+$ ни принимала точка, стоящая вместо нижнего индекса), а значит суммы $\sum\limits_{j=1}^{k} (\nu_0 + \nu_1)\xi_0^j$ и $\sum\limits_{j=k+1}^{N} (\nu_0\xi_0^j + \nu_1\xi_1^j)$ в I_2 – тоже независимы. Следовательно математическое ожидание I_2 распадается в произведение двух математических ожиданий, каждое из которых мы отдельно вычислим, воспользовавшись знанием характеристической функции для ξ_0^j,

$$\mathbb{E}\exp\left\{\frac{i}{N^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{k}(\nu_0 + \nu_1)\xi_0^j\right\} = \exp\left\{-\frac{k}{N}|\nu_0 + \nu_1|^\alpha\right\}\,.$$

Второй сомножитель вычисляется с помощью замечания о том, что при $j \neq l$ случайные величины $\xi_j^{[\cdot]}$ и $\xi_l^{[\cdot]}$ независимы (какое бы натуральное значение ни принимала бы точка),

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\exp\left\{\frac{i}{N^{1/\alpha}}\sum_{j=k+1}^{N}(\nu_0\xi_0^j + \nu_1\xi_1^j)\right\} \\ &= \mathbb{E}\exp\left\{\frac{i}{N^{1/\alpha}}\sum_{j=k+1}^{N}\nu_0\xi_0^j\right\}\mathbb{E}\exp\left\{\frac{i}{N^{1/\alpha}}\sum_{j=k+1}^{N}\nu_1\xi_1^j\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{N-k}{N}|\nu_0|^\alpha\right\}\exp\left\{-\frac{N-k}{N}|\nu_1|^\alpha\right\} \\ &= \exp\left\{-\frac{N-k}{N}\left(|\nu_0|^\alpha + |\nu_1|^\alpha\right)\right\}\,. \end{aligned}$$

Теперь, подставив $p_{k,N}(s)$, нетрудно записать I_2 в форме биномиального разложения,

$$I_2 = \sum_{k=0}^{N} C_N^k \left[\left(1-e^{-s}\right)\exp\left\{-\frac{1}{N}\left(|\nu_0|^\alpha + |\nu_1|^\alpha\right)\right\}\right]^{N-k}$$

$$\times\left[e^{-s}\exp\left\{-\frac{1}{N}\left(|\nu_0 + \nu_1|^\alpha\right)\right\}\right]^k$$

$$= \left[\left(1-e^{-s}\right)\exp\left\{-\frac{1}{N}\left(|\nu_0|^\alpha + |\nu_1|^\alpha\right)\right\}\right.$$

$$\left.+e^{-s}\exp\left\{-\frac{1}{N}\left(|\nu_0 + \nu_1|^\alpha\right)\right\}\right]^N \triangleq I_3(N)$$

Представим выражение I_3 в виде замечательного предела при $N \to \infty$,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \exp\{-|\nu_0|^\alpha - |\nu_1|^\alpha\}\\
&\times\left[1-e^{-s}+e^{-s}\exp\left\{-\frac{1}{N}\left(|\nu_0+\nu_1|^\alpha - |\nu_0|^\alpha - |\nu_1|^\alpha\right)\right\}\right]^N\\
&= \exp\{-|\nu_0|^\alpha - |\nu_1|^\alpha\}\\
&\times\left[1+e^{-s}\left(\exp\left\{-\frac{1}{N}\left(-|\nu_0|^\alpha - |\nu_1|^\alpha + |\nu_0+\nu_1|^\alpha\right)\right\}-1\right)\right]^N\\
&= \exp\{-|\nu_0|^\alpha - |\nu_1|^\alpha\}\\
&\times\left[1+e^{-s}\left(-\frac{1}{N}\right)\left(|\nu_0+\nu_1|^\alpha - |\nu_0|^\alpha - |\nu_1|^\alpha\right) + \overline{\overline{o}}(1/N)\right]^N .
\end{aligned}$$

Возьмем предел при $N \to \infty$,

$$I_3 \to \exp\left\{-|\nu_0|^\alpha - |\nu_1|^\alpha - e^{-s}|\nu_0+\nu_1|^\alpha + e^{-s}|\nu_0|^\alpha + e^{-s}|\nu_1|^\alpha\right\}$$

$$= \exp\left\{\left(1-e^{-s}\right)\left(-|\nu_0|^\alpha - |\nu_1|^\alpha\right) - e^{-s}|\nu_0+\nu_1|^\alpha\right\} .$$

Лемма 2 доказана.

3. Применение к процессам типа Орнштейна-Уленбека

В этом разделе мы показываем, что в гауссовском случае, то есть, когда $\alpha = 2$, двумерная характеристическая функция для процесса Орнштейна–Уленбека совпадает с (13), а в случае $\alpha < 2$ – не совпадает.

Для случая $\alpha < 2$ под процессом Орнштейна-Уленбека мы понимаем процесс, который записывается как интеграл по α-устойчивой винеровской мере с экспоненциально убывающими весами. Такой интеграл возникает при характеризации саморазложимых распределений. Он введен З. Юреком (см., напр., [3]) и исследован О. Барндорф-фом–Нильсеном ([2], [4]) в связи с описанием модели стохастической волатильности с тяжелыми хвостами распределения волатильности для задач стохастической финансовой математики.

Определение 2. *Процесс Орнштейна–Уленбека U, определяется своим представлением в виде скользящего среднего с показательным ядром. В гауссовском случае,*

$$U(s) = U(0)e^{-\beta s} + \sqrt{\beta}\int\limits_0^s e^{-\beta(s-u)}\,\mathrm{d}\,B(u)\,, \quad s \geqslant 0\,, \tag{14}$$

где: $B(u)$, $u \geqslant 0$ – стандартное броуновское движение; $U(0) \in \mathcal{N}\{0, 2\}$ – независящая от $B(u)$ нормальная случайная величина; $\beta > 0$ – параметр вязкости процесса Орнштейна–Уленбека. Определим строго α-устойчивый процесс Орнштейна–Уленбека при $\beta > 0$, следуя [2],

$$U(s) = U(0)e^{-\beta s} + e^{-\beta s}\int\limits_0^s e^{\beta u}\,\mathrm{d}\,W(\beta u)\,, \quad s \geqslant 0\,, \tag{15}$$

где: $W(u)$, $u \geqslant 0$ – строго α-устойчивый процесс Леви; $U(0)$ – независящая от $W(u)$ строго α-устойчивая случайная величина с тем же параметром устойчивости.

В (14) нормировка подобрана таким образом, что процесс U стационарен, и характеристическая функция каждого его сечения имеет вид $\psi(\tau) = \exp\{-|\tau|^2\}$, $\tau \in \mathbb{R}$. Соответственно, в (15) нормировка подобрана таким образом, что процесс U также стационарен (см., напр., [4]), и характеристическая функция его сечений

$\psi(\tau) = \exp\{-|\tau|^\alpha\}$. Свойство самоподобия для процессов Леви дает то, что (14) является частным случаем (15) при $\alpha = 2$.

Опираясь на стационарность процесса U нетрудно вычислить характеристическую функцию его парных распределений, $0 < \alpha \le 2$,

$$-\log \varphi(\nu, \mu) = |\nu + p\mu|^\alpha + (1 - p^\alpha)|\mu|^\alpha\,, \tag{16}$$

где $\varphi(\nu, \mu)$ – характеристическая функция двумерного случайного вектора $(U(s), U(t))$, совпадающая с характеристической функцией вектора $(U(0), U(t-s))$, $0 \le s \le t$; $p = \exp\{-\beta(t-s)\}$; ν, μ – вещественные переменные.

В тех же самых обозначениях, лишь при замене β на λ, вследствие Леммы 2, характеристическая функция (13) вектора $(L(s), L(t))$ из Леммы 2 удовлетворяет равенству

$$-\log \phi(\nu, \mu) = (1 - p)\left(|\nu|^\alpha + |\mu|^\alpha\right) + p|\nu + \mu|^\alpha\,, \tag{17}$$

В гауссовском случае, то есть при $\alpha = 2$, характеристическая функция из (17) задает стационарный процесс. Более того, легко вычислить, что при $\alpha = 2$ характеристические функции (16) и (17) совпадают! Этого нельзя сказать о случаях $0 < \alpha < 2$.

Замечание 1. Механизм формирования характеристической функции вида (17) следующий. Обобщая (12), по суммам $\{L_N(s)\}$, устремляя N к бесконечности, мы строим в пространстве Скорохода $\mathcal{D}_{[0,1]}$ процесс Леви $L_s(v)$, $v \in [0,1]$, по переменной v, заданный на уровне $s \geqslant 0$ (то есть когда пуассоновское время равно s). То есть мы берем слабые пределы случайных ломаных

$$L_s(v;\ N) = \frac{1}{N^{1/\alpha}} \sum_{j=1}^{[Nv]} \xi_{\Pi_j}(s)\,, \tag{18}$$

где $[Nv]$ – целая часть Nv. Аналогично, по суммам $\{L_N(t)\}$ мы строим процесс Леви $L_t(v)$, $v \in [0,1]$ по переменной v на (пуассоновском) уровне $t \geqslant s$. Тогда для вектора $(L(s), L(t))$ из Леммы 2 выполняется: $L(s) = L_s(1)$ и $L(t) = L_t(1)$. При этом, на основе идеи о перестановке пуассоновских процессов (упорядочивания их по первому скачку), которая использовалась в начале доказательства Леммы 2, имеем, что процесс $L_t(v)$, ,$v \in [0,1]$, должен быть устроен следующим образом. Он в точности копирует процесс $L_s(v)$

до момента времени $v = \exp\{-\lambda(t-s)\}$, то есть $L_t(v) = L_s(v)$ при $v \geqslant \exp\{-\lambda(t-s)\}$. От момента $v = \exp\{-\lambda(t-s)\}$ до единицы к $L_s(\exp\{-\lambda(t-s)\})$ пристыковывается независимый процесс Леви L, то есть $L_t(v) = L_s(\exp\{-\lambda(t-s)\}) + L(v - \exp\{-\lambda(t-s)\})$ при $\exp\{-\lambda(t-s) \leq v \leq 1$. Простые вычисления показывают, что именно такой конструкции для процессов $L_s(v)$ и $L_t(v)$ соответствует характеристическая функция из (17).

Литература

1. В. Ю. Королев, В. Е. Бенинг, С. Я. Шоргин, *Математические основы теории риска.* Физматлит, 544 (2007).
2. O. E. Barndorff–Nielsen, it Superposition of Ornstein-Uhlenbeck type processes. — Теория вероятн. и ее примен., **45** (2) (2000), 289–311.
3. O. E. Barndorff–Nielsen, and N. Shephard, *Non-Gaussian Ornstein-Uhlenbeck – based models and some of their uses in financial economics.* — J. Royal Statist. Soc., **63** (2), (2001), 167–241.
4. Z. J. Jurec and J. D. Mason, *Operator-Limit Distributions in Probability Theory.* New York, Wiley (1993).

Rusakov O. V. Sums of independent Poisson subordinators and their connections with strictly α-stable processes of the Ornstein-Uhlenbeck type.

We give a construction by which the discrete time of a sequence of independent identically distributed random variables changes with the Poisson time. The Poisson time is independent of this sequence. We name similarly defined process with continuous time as the random index process. We establish a number of properties of the random index processes. We study the asymptotic of sums of independent identically distributed random index processes for the case when elements of the initial sequence have the strictly α-stable distribution. By calculated characteristic functions we establish the relationships of these sums with the strictly α-stable processes of the Ornstein-Uhlenbeck Type.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: ovirusakov@yahoo.co.uk

Поступило 11 декабря 2008 г.