Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 361, 2008 г.

Л. В. Розовский

О МАЛЫХ УКЛОНЕНИЯХ МОДИФИЦИРОВАННЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

1. Результаты

Пусть $X_1, X_2, \ldots$ – независимые копии случайной величины X с функцией распределения F. Положим $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geqslant 1$; $S_0 = 0$. Ниже предполагается, что при некоторых положительных B_n распределение случайной величины S_n/B_n слабо сходится к невырожденому распределению F_α, такому, что

$$0 < F_\alpha(0) < 1. \tag{1.1}$$

Отметим (см. [1], [2, (1.5)–(1.8) при $a_n = 0$]), что F_α необходимо является строго устойчивым распределением с некоторым характеристическим показателем $\alpha \in (0, 2]$; кроме того, условие (1.1) при $\alpha \geqslant 1$ выполняется, и $\mathbf{E}X = 0$, если $\alpha > 1$.

В дальнейшем $d(t)$ – непрерывная на $[0, 1]$ функция со степенным убыванием в нуле.

Введем "модифицированные" суммы S_k^* и размах R_n^*, положив

$$S_k^* = S_k + d\,(k/n)\; S_n, \quad 0 \leqslant k \leqslant n;$$

$$m_n^* = \min_{0\leqslant k\leqslant n} S_k^*, \quad M_n^* = \max_{0\leqslant k\leqslant n} S_k^*, \quad R_n^* = M_n^* - m_n^*. \tag{1.2}$$

Заметим, что если $d(t) = 0$, то "модифицированные" суммы и размах превращаются в обыкновенные; если же $d(t) = -t$ и $\alpha = 2$, то S_k^*/B_n, $0 \leqslant k \leqslant n$, является дискретным аналогом броуновского моста.

Мы будем изучать асимптотическое поведение сумм вида

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n\; \mathbf{P}\Big(\frac{1}{B_n}\, R_n^* \leqslant \frac{r}{\phi_n}\Big), \quad r \nearrow \infty,$$

Работа над статьей была поддержана грантом НШ-638.2008.1 и грантом РФФИ No. 06-01-00179-а.

где

$$f_n \geqslant 0, \quad \sum_{n\geqslant 1} f_n = \infty, \quad \phi_n \nearrow \infty. \tag{1.3}$$

Схожие постановки задач можно найти в [2]–[8].

Приведем результаты. Всюду в дальнейшем будем предполагать, что последовательность ϕ_n не убывая растет к бесконечности.

Теорема 1. *Пусть постоянная $\nu \in (0, \alpha]$.*

Предположим, что при некотором $\gamma > 1/\nu$

$$d(t) = O\left(t^{\gamma}\right), \ t \searrow 0; \tag{1.4}$$

$$\phi_{n+1} \sim \phi_n, \quad \limsup \log \phi_n / \log n \leqslant 1/\nu; \tag{1.5}$$

положительная функция $g(u)$ правильно меняется на бесконечности с некоторым показателем ρ,

$$0 \leqslant \rho < \alpha(\gamma\nu - 1), \tag{1.6}$$

причем (если $\rho = 0$)

$$\int_1^\infty g(u)\frac{du}{u} = \infty. \tag{1.7}$$

Обозначим

$$f_n = g(\phi_n)\,\frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\phi_n}, \quad \hat g(r) = \int_1^r g(u)\frac{du}{u}.$$

Тогда, если $\rho > 0$, то при любом $p \in (0, 1)$

$$\lim_{r\nearrow\infty} \frac{1}{g(r)} \sum_{n\geqslant 1} f_n \ \mathbf{P}(-p\,r\,\frac{B_n}{\phi_n} \leqslant m_n^* \leqslant M_n^* \leqslant (1-p)\,r\,\frac{B_n}{\phi_n}) = C_\alpha(\rho; p), \tag{1.8}$$

$$\lim_{r\nearrow\infty} \frac{1}{g(r)} \sum_{n\geqslant 1} f_n \ \mathbf{P}(R_n^* \leqslant r\,B_n/\phi_n) = C_\alpha(\rho), \tag{1.9}$$

где $C_\alpha(\rho; p)$ и $C_\alpha(\rho)$ – некоторые положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров и функции d;

если $\rho = 0$, то соотношения (1.8) *и* (1.9) *сохраняют справедливость при замене множителя $1/g(r)$ в левой части этих равенств на $1/\hat{g}(r)$, а постоянных в правой их части – на единицы.*

Отметим, что если $d(t) = 0$, то условие (1.4) выполняется при *любом* положительном γ и, следовательно, в (1.5) можно положить $\limsup \log \phi_n / \log n < \infty$, а в (1.6) – $0 \leqslant \rho < \infty$; если $d(t) = -t$, то (1.4) справедливо лишь при $\nu > 1$.

Замечание 1. Пусть $\alpha = 2$. Если $d(t) = 0$, то

$$C_2(\rho; p) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{\rho} \Gamma(\rho/2) \sum_{k \geqslant 0} (2k+1)^{-1-\rho} \sin{(2k+1)\pi p}, \qquad (1.10)$$

$$C_2(\rho) = \frac{4}{\pi^2}(1+\rho) \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{\rho} \Gamma(\rho/2) \sum_{k \geqslant 0} (2k+1)^{-(2+\rho)}. \qquad (1.11)$$

Если $d(t) = -t$, то

$$C_2(\rho; p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{\rho} \Gamma(\frac{\rho+1}{2}) \sum_{k \geqslant 1} k^{-1-\rho} \sin^2 k\pi p, \qquad (1.12)$$

$$C_2(\rho) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\sqrt{2}}{\pi}\right)^{\rho} \Gamma(\frac{\rho+3}{2}) \sum_{k \geqslant 1} k^{-1-\rho}. \qquad (1.13)$$

Положим

$$\tau_n = n \, \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\phi_n}. \qquad (1.14)$$

Замечание 2. Условие (1.5) вытекает из соотношения

$$\limsup \tau_n \leqslant 1/\nu, \qquad (1.15)$$

которое, в свою очередь, равносильно тому, что последовательность ϕ_n/n^{δ} монотонно убывает, начиная с некоторого места, при любом $\delta > 1/\nu$.

Замечание 3. Пусть

$$\lim_{u \to \infty} u \, \phi'(u)/\phi(u) = \tau > 0. \qquad (1.16)$$

Тогда, если $\phi_n = \phi(n)$, то $\lim \tau_n = \tau$; если $\phi_n = \phi(\ln_k n)$ $(k = 1, 2, \dots)$, где $\ln_1 n = \log n$, $\ln_2 n = \log\log n$, … , то $\tau_n \sim \tau / \prod_{j=1}^{k} \ln_j n$.

Следствие 1. *Пусть*

$$\mathbf{E}X = 0,\ \mathbf{E}X^2 = 1. \tag{1.17}$$

Тогда при любом положительном ρ

$$\lim_{r\nearrow\infty} r^{-\rho} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(\log n)^{\rho/2-1}}{n}\, \mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n} |S_k| \leqslant r\sqrt{\frac{\pi^2 n}{8\log n}}\right) =$$

$$= \frac{4}{\pi}\,\Gamma(\rho/2) \sum_{k\geqslant 0}(-1)^k\,(2k+1)^{-(\rho+1)}; \tag{1.18}$$

$$\lim_{r\nearrow\infty} r^{-\rho} \sum_{n\geqslant 1} \frac{(\log n)^{\rho/2-1}}{n}\, \mathbf{P}\left(\max_{1\leqslant l<k\leqslant n} |S_k - S_l| \leqslant r\sqrt{\frac{\pi^2 n}{2\log n}}\right) =$$

$$= \frac{8}{\pi^2}\,(1+\rho)\,\Gamma(\rho/2) \sum_{k\geqslant 0}(2k+1)^{-(\rho+2)}.$$

Следствие 1 вытекает из Теоремы 1 ($\alpha = 2$, $B_n = \sqrt{n}$, $g(u) = u^\rho$, $\phi_n = \sqrt{\log n}$, $\gamma = \infty$), Замечания 1 ((1.10), (1.11)) и Замечания 3.

Отметим, что равенство (1.18) при дополнительном предположении $\mathbf{E}X^2 \log^{\rho/2}|X| < \infty$ было получено в [8].

Ниже рассмотрим подробнее случай (1.17). Мы покажем, что при некоторых дополнительных предположениях утверждения Теоремы 1 сохраняют справедливость, в случае нарушения условия (1.6), т.е. когда при $0 < \nu \leqslant 2$

положительная функция $g(u)$*правильно меняется на бесконечности*

$$\text{\textit{с некоторым показателем} } \rho \geqslant 2(\gamma\nu - 1) > 0. \tag{1.19}$$

Положим $R(t) = \mathbf{P}(|X| > t)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* (1.4), (1.17), (1.19), (1.15) *и, кроме того,*

$$\max_{k>n} \tau_k\, k^{-\delta} = O\,(1)\tau_n\, n^{-\delta},\ n \to \infty\ (\exists\delta > 0). \tag{1.20}$$

Если

$$\limsup_{\varepsilon\searrow 0}\sum_{n\geqslant 1}\tau_n\,(\varepsilon\phi_n)^{\beta}\,R(\,(\varepsilon\phi_n)^{\omega}\,\sqrt{n})<\infty\ (\exists\beta>\rho,\ 0<\omega<\gamma\nu-1),\tag{1.21}$$

то (при $\alpha=2$ *и* $B_n=\sqrt{n}$*) имеет место* (1.8) *и* (1.9).

Отметим, что условие (1.20), как правило (например, в предположениях Замечания 3), выполняется и, в отличие от (1.21), не накладывает дополнительных ограничений на X.

Замечание 4. Пусть выполняются условия (1.16), (1.17) и $\rho\geqslant 2(\gamma\nu-1)$. Соотношение (1.21) справедливо в следующих случаях:
1) $\phi_n=\phi(n)$ и

$$\mathbf{E}|X|^{2+\omega}<\infty\ \Big(\exists\ \omega>\omega_0=2\tau(\rho-2(\gamma\nu-1))/(2\tau(\gamma\nu-1)+1)\Big)\tag{1.22}$$

(заметим, что при (1.19) $\omega_0\geqslant 0$);
2) $\phi_n=\phi(\ln_k n)$ (см.Замечание 3), $k\geqslant 2$ или $k=1$ и $\rho<2(\gamma\nu-1)+1/\tau$;
3) $\phi_n=\phi(\log n),\ \rho\geqslant 2(\gamma\nu-1)+1/\tau$ и

$$\mathbf{E}X^2\log^{\beta}|X|<\infty\ \Big(\exists\ \beta>\tau(\rho-2(\gamma\nu-1))-1\Big).\tag{1.23}$$

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* (1.4), (1.17), (1.16) ($\tau\leqslant 1/\nu$), (1.19) *и* (1.22). *Тогда при любых положительных* $p,q,$ *таких, что* $p+q=1$,

$$\lim_{r\nearrow\infty}\frac{\tau}{g(r)}\sum_{n\geqslant 1}\frac{g(\phi(n))}{n}\,\mathbf{P}(-p\,r\,\frac{\sqrt{n}}{\phi(n)}\leqslant m_n^*\leqslant M_n^*\leqslant q\,r\,\frac{\sqrt{n}}{\phi(n)})=C_2(\rho;p),$$

$$\lim_{r\nearrow\infty}\frac{\tau}{g(r)}\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{g(\phi(n))}{n}\,\mathbf{P}(R_n^*\leqslant r\,\sqrt{n}/\phi(n))=C_2(\rho),$$

где положительные постоянные $C_\alpha(\rho;p)$ *и* $C_\alpha(\rho)$ *зависят от указанных параметров и функции* d *из условия* (1.4).

Следствие 3. *Пусть выполнены условия* (1.4), (1.17), (1.16) ($\tau \leqslant 1/\nu$), (1.19) *и* $\phi_n = \phi(\ln_k n)$, $k = 1, 2, \ldots$. *Тогда при любых положительных* p, q, *таких, что* $p + q = 1$,

$$\lim_{r\nearrow\infty} \frac{\tau}{g(r)} \sum_{n:\ln_k n>1} \frac{g(\phi_n)}{n\prod\limits_{j=1}^{k} \ln_j n}\, \mathbf{P}\Big(-p\,r\,\frac{\sqrt{n}}{\phi_n} \leqslant m_n^* \leqslant M_n^* \leqslant q\,r\,\frac{\sqrt{n}}{\phi_n}\Big) = C_2(\rho;p),$$

$$\lim_{r\nearrow\infty} \frac{\tau}{g(r)} \sum_{n:\ln_k n>1} \frac{g(\phi_n)}{n\prod\limits_{j=1}^{k} \ln_j n}\, \mathbf{P}(R_n^* \leqslant r\sqrt{n}/\phi_n) = C_2(\rho), \tag{1.24}$$

если $k \geqslant 2$ *или* $k = 1$ *и* $2(\gamma\nu - 1) \leqslant \rho < 2(\gamma\nu - 1) + 1/\tau$, *или если* $k = 1$ *и выполнено условие* (1.22).

Замечание 5. Принимая во внимание Теорему 1, видим, что соотношения (1.24) сохраняют справедливость без дополнительных моментных ограничений при любом $\rho > 0$ в случае $k \geqslant 2$ и при $0 < \rho < 2(\gamma\nu - 1) + 1/\tau$, если $k = 1$.

2. Доказательства

При доказательстве Теоремы 1 будем пользоваться рассуждениями из [7]. Проверим соотношение (1.8).

Обозначим $P_n(a) = \mathbf{P}(-p\,a\,B_n \leqslant m_n^* \leqslant M_n^* \leqslant (1-p)\,a\,B_n)$, $\quad a > 0$.

Выберем положительную функцию $M = M(r)$ как угодно медленно растущую к бесконечности при $r \nearrow \infty$. Пусть $n_1 = \max(n : \phi_n \leqslant r)$, $n_2 = \max(n : \phi_n \leqslant rM)$, а

$$S(r) = \left(\sum_{1\leqslant n<M} + \sum_{M\leqslant n\leqslant n_2} + \sum_{n>n_2} \right) f_n\, P_n(r/\phi_n) = S_1 + S_2 + S_3 \tag{2.1}$$

(см. обозначения в Теореме 1).

Применяя известные теоремы о сходимости вероятностных процессов ([9], [10]), найдем, что $P_n(a) \to \mathcal{P}(a)$ равномерно по a при $n \to \infty$, где

$$\mathcal{P}(a) = \mathbf{P}(-p\,a \leqslant \xi(t) + d(t)\,\xi(1) \leqslant (1-p)\,a;\ 0 \leqslant t \leqslant 1),$$

а $\{\xi(t); t \geqslant 0\}$ представляет некоторый случайный однородный с независимыми приращениями процесс, такой, что $\mathbf{P}(\xi(t) < x) = F_\alpha(x\,t^{-1/\alpha})$ при любых положительных t.

Учитывая, что в силу (1.1)(подробнее, см.[1])

$$\mathbf{P}(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\xi(t) + d(t)\,\xi(1)| \leqslant \varepsilon) \geqslant \mathbf{P}(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |\xi(t)| \\ \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \min(1, 1/\sup_{0\leqslant t\leqslant 1} |g(t)|)) > 0 \quad (\forall \varepsilon > 0),$$

заключаем

$$P_n(r/\phi_n) \sim \mathcal{P}(r/\phi_n),\ r \nearrow \infty,$$

равномерно по $n : M \leqslant n \leqslant n_2$, и, поэтому,

$$S_2 \sim \sum_{M\leqslant n\leqslant n_2} f_n\ \mathcal{P}(r/\phi_n),\ r \nearrow \infty. \tag{2.2}$$

Принимая во внимание (см. (1.7) и (1.3)), что

$$\psi(r) = \sum_{n\geqslant 1} f_n\ \mathcal{P}(r/\phi_n) \to \infty, \quad r \nearrow \infty, \tag{2.3}$$

получим

$$\sum_{1\leqslant n<M} f_n\,(P_n(r/\phi_n) + \mathcal{P}(r/\phi_n)) \leqslant 2 \sum_{1\leqslant n<M} f_n = o\,(\psi(r)),\ r \nearrow \infty, \tag{2.4}$$

если M растет к бесконечности достаточно медленно.

Далее мы собираемся доказать, что

$$S(r) \sim \psi(r),\ r \nearrow \infty. \tag{2.5}$$

Учитывая (2.1)–(2.4), для этого достаточно убедиться в том, что

$$\sum_{n>n_2} f_n\,(P_n(r/\phi_n) + \mathcal{P}(r/\phi_n)) = o\,(\psi(r)),\ r \nearrow \infty. \tag{2.6}$$

При любом целом m, $1 \leqslant m \leqslant n$,

$$P_n(a) \leqslant \mathbf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant m} |S_k + d\,(k/n)\ S_n| \leqslant a\,B_n) \leqslant \mathbf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant m} |S_k| \leqslant 2a\,B_n) +$$

$$+\mathbf{P}(\max_{1\leqslant k\leqslant m}|d\,(k/n)\;S_n|>a\,B_n)=P_n^{(1)}(a)+P_n^{(2)}(a). \tag{2.7}$$

Так же, как в [1, (32)], найдем

$$P_n^{(1)}(a)\leqslant \mathbf{P}^l(\max_{1\leqslant i\leqslant j}S_i-\min_{1\leqslant i\leqslant j}S_i\leqslant 4a\,B_n)\leqslant \mathbf{P}^l(\max_{1\leqslant i\leqslant j}|S_i|\leqslant 4a\,B_n), \tag{2.8}$$

где $1\leqslant j\leqslant m$ и $l=[m/j]$.

Пусть $n>n_2$, положительная постоянная η произвольно мала, $a=r/\phi_n$, $m=[na^{\nu-\eta}]$, $j=[m/|\log a|]$. Из условия (1.5) следует, что $\phi_n<n^{1/\nu+\eta/\nu^2)}$ при всех достаточно больших n. Поскольку $a<M^{-1}$, если $n>n_2$, отсюда получим

$$m\to\infty,\quad \frac{m}{n}\sim a^{\nu-\eta},\quad a\,(n/m)^{\gamma}\sim a^{1-\gamma\nu+\eta\gamma}\to\infty,$$

$$l\sim|\log a|,\quad a\frac{B_n}{B_j}=a\left(n/j\right)^{1/\alpha+o\,(1)}=a^{\eta/\alpha+(1-\nu/\alpha)+o\,(1)}\to 0,\ r\nearrow\infty. \tag{2.9}$$

Из (2.8), (2.9) найдем, что $P_n^{(1)}(a)$, $n>n_2$, с ростом r убывает быстрее любой степени a и, в частности, при всех достаточно больших r

$$P_n^{(1)}(r/\phi_n)\leqslant (r/\phi_n)^{\alpha(\gamma\nu-1)},\ n>n_2. \tag{2.10}$$

Из (2.7), (2.9) и (1.4) следует, что при некотором положительном c

$$P_n^{(2)}(a)\leqslant \mathbf{P}(|S_n|>c\,B_n\,a\,(n/m)^{\gamma}). \tag{2.11}$$

Если $\alpha<2$, из [2, (2.5), (1.5)–(1.8)] и (2.9)) найдем

$$P_n^{(2)}(a)=\,O(a\,(n/m)^{\gamma})^{-\alpha+o(1)}=\,O(a^{\alpha(\gamma\nu-1)-\eta\gamma\nu+o(1)},\ r\nearrow\infty. \tag{2.12}$$

Если же $\alpha=2$ (см. [7, (2.16) при $t=2$, (1.1), (2.7)]), то

$$P_n^{(2)}(a)=\,O(a^{2(\gamma\nu-1)+o(1)},\ r\nearrow\infty. \tag{2.13}$$

Принимая во внимание произвольную малость η и учитывая (2.7), (2.10)–(2.13), получим при любом $c<\alpha(\gamma\nu-1)$ и всех достаточно больших r

$$\mathbf{P}_n(r/\phi_n)\leqslant (r/\phi_n)^c,\ n>n_2.$$

Рассуждая аналогично, придем к такой же оценке для $\mathcal{P}(r/\phi_n)$.

В итоге, имеем при любом $c < \alpha(\gamma\nu - 1)$ и всех достаточно больших r

$$\sum_{n>n_2} f_n \left(P_n(r/\phi_n) + \mathcal{P}(r/\phi_n)\right) \leqslant \sum_{n>n_2} f_n \left(r/\phi_n\right)^c. \tag{2.14}$$

Пусть в (2.14) $c = \rho + \eta$ (см. (1.6)), где $\eta > 0$. Учитывая свойства правильно меняющихся функций и то, что $\phi_n > rM$ при $n > n_2$, в условиях теоремы 1 получим:

$$\sum_{n>n_2} f_n \left(r/\phi_n\right)^c = o(1)\, g(r) = o(1)\, \hat{g}(r), \ \ r \nearrow \infty. \tag{2.15}$$

С другой стороны (см. также (2.3) и (2.4)), при некотором $\delta > 0$

$$\psi(r) \geqslant \mathcal{P}(1) \sum_{n=M}^{n_1} f_n \geqslant \delta \int\limits_{\phi(M)}^{\infty} g(u) \frac{du}{u} \geqslant \delta\, \hat{g}(r)/2.$$

Отсюда, из (2.5) и (2.14) получим (2.6) и, следовательно, (2.5). Остается показать, что $\psi(r)$ при $r \nearrow \infty$ имеет нужную асимптотику. Этот факт вытекает из равенства

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n\ \mathcal{P}(r/\phi_n) \sim \int\limits_{1}^{\infty} g(u)\, \mathcal{P}(r/u) \frac{du}{u}, \quad r \nearrow \infty,$$

которое проверяется так же, как [7, (3.1)], и утверждения, аналогичного [7, Замечание 3], из которого следует, что

$$C_\alpha(\rho; p) = \int\limits_{0}^{\infty} u^{\rho-1}\, \mathcal{P}(1/u)\, du, \quad \rho > 0. \tag{2.16}$$

Соотношение (1.8), таким образом, получено.

Равенство (1.9) доказывается аналогично. При этом используются оценки (см. (1.2))

$$\mathbf{P}(\max_{0\leqslant k\leqslant n} |S_k^*| \leqslant \varepsilon/2) \leqslant \mathbf{P}(R_n^* \leqslant \varepsilon) \leqslant \mathbf{P}(\max_{0\leqslant k\leqslant n} |S_k^*| \leqslant \varepsilon).$$

Заметим, что при $\rho > 0$

$$C_\alpha(\rho) = \int\limits_0^\infty u^{\rho-1}\,\hat{\mathcal{P}}(1/u)\,du, \tag{2.17}$$

где

$$\hat{\mathcal{P}}(a) = \mathbf{P}(\sup_{0\leqslant t\leqslant 1}(\xi(t) + d(t)\,\xi(1)) - \inf_{0\leqslant t\leqslant 1}(\xi(t) + d(t)\,\xi(1)) \leqslant a).$$

Доказательство теоремы 1 завершено.

Проверим Замечание 1. Пусть $\alpha = 2$, то есть $\xi(\cdot)$ является стандартным винеровским процессом $W(\cdot)$.

Соотношение (1.10) вытекает из (2.16) и равенства (см. [11])

$$\mathcal{P}(a) = \mathbf{P}(-pa < W(t) < (1-p)a;\ 0 \leqslant t \leqslant 1) =$$
$$= \frac{4}{\pi}\sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{2j+1}e^{-((2j+1)\pi)^2/(2a^2)}\sin{(2j+1)\pi p}.$$

Для получения (1.11) воспользуемся следующим представлением плотности случайной величины $R = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} W(t) - \inf\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} W(t)$ (см. [12]):

$$\frac{d\mathbf{P}(R < r)}{dr} = \delta(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ r^{-1}L'(r/2),$$

где

$$L(z) = \sqrt{2\pi}\ z^{-1}\sum_{k\geqslant 1}e^{-(2k-1)^2\pi^2/z^2}. \tag{2.18}$$

При $\alpha = 2$ и $d(t) = 0$ в (2.17), очевидно, $\widehat{\mathcal{P}}(r) = \mathbf{P}(R < r)$. Теперь,

$$C_2(\rho) = \rho\, I = \int\limits_0^\infty \mathbf{P}(R < 1/u)\,du^\rho = \int\limits_0^\infty u^{\rho-2}\delta(1/u)\,du$$
$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty u^{\rho-1}\,L'(1/2u)\,du$$
$$= 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty u^{\rho+1}\,(-dL(1/2u)) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,(1+\rho)\int\limits_0^\infty u^{\rho}L(1/2u)\,du.$$

Отсюда и из (2.18) следует (1.11).

Пусть теперь $d(t) = -t$ и $\hat{W}(t) = W(t) - tW(1)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Тогда (см. [13, Гл. IV.4.26 и 1.15.8 при $a = -py$, $b = (1-p)y$ и $y > 0$])

$$\mathcal{P}(y) = \mathbf{P}(-p\,y < \hat{W}(t) < (1-p)\,y;\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$
$$= \sum_k (e^{-2k^2y^2} - e^{-2(ky+p)^2}).$$

Воспользовавшись здесь формулой суммирования Пуассона [12, Гл. XIX, (5.12)], найдем

$$\mathcal{P}(y) = \sqrt{\pi/2}\,y^{-1} \sum_n e^{-(\pi n)^2/(2y^2)}\,(1 - \cos 2\pi np) =$$
$$= 4\sqrt{\pi/2}\,y^{-1} \sum_{n\geqslant 1} \sin^2 \pi np\; e^{-(\pi n)^2/(2y^2)}. \tag{2.19}$$

Равенство (1.12) вытекает из (2.16) и (2.19).

Далее проверим (1.13). Пусть $R^* = \sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \hat{W}(t) - \inf\limits_{0\leqslant t\leqslant 1} \hat{W}(t)$. Снова используя [13, Гл. IV.4.26 и 1.15.8(2)] и [12, Гл. XIX, (5.12)], получим

$$\mathbf{P}(R^* < y) = 1 + 2\sum_{k\geqslant 1}(1 - 4k^2y^2)\,e^{-2k^2y^2} = L(y) + yL'(y) = (yL(y))',$$

где

$$L(y) = \sqrt{\pi/2}\;y^{-1}\;(1 + 2\sum_{n\geqslant 1} e^{-n^2\pi^2/(2y^2)}).$$

Отсюда (см. (2.17)),

$$\int_0^\infty u^{\rho-1}\,(L(1/u)/u)'\,du = -\int_0^\infty u^{1+\rho}\,d(L(1/u)/u - \sqrt{\pi/2})$$
$$= (1+\rho)\int_0^\infty (L(1/u)/u - \sqrt{\pi/2})\,u^\rho\,du$$
$$= 2(1+\rho)\sqrt{\pi/2}\sum_{n\geqslant 1}\int_0^\infty e^{-n^2\pi^2u^2/2}\,u^\rho\,dy$$
$$= (1+\rho)\,\Gamma(\frac{1+\rho}{2})\sqrt{\pi/2}\;2^{(1+\rho)/2}\,\pi^{-1-\rho}\sum_{n\geqslant 1} n^{-1-\rho} = C_2(\rho).$$

Проверим замечание 2. Если выполнено (1.15), то, очевидно,

$$\frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\phi_n} \sim \log \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} = o(1), \ n \to \infty,$$

откуда следует первое условие из (1.5) и то, что (1.15) равносильно сооотношению

$$\limsup n \log \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n} \leqslant 1/\nu. \tag{2.20}$$

Из (2.20) найдем:

$$\log \frac{\phi_n}{\phi_m} \leqslant (1/\nu + \varepsilon) \sum_{k=m}^{n} 1/k \sim (1/\nu + \varepsilon) \log n, \ n \to \infty,$$

при всех $n > m$, $m = m(\varepsilon)$ и любом произвольно малом $\varepsilon > 0$. Таким образом, второе утверждение в (1.5) также справедливо.

Пусть некоторое $\delta > 1/\nu$. Если $\bar{\phi}_n = \phi_n/n^\delta$ убывает, то (см.(1.14)) $\tau_n \leqslant n \, \left((1+\frac{1}{n})^\delta - 1\right) \sim \delta$. Отсюда вытекает (1.15). Обратно, из (1.15) следует, что при $\delta > \bar{\delta} > 1/\nu$ и всех достаточно больших n

$$\bar{\phi}_{n+1} - \bar{\phi}_n \leqslant \frac{\bar{\delta}\,\phi_n}{n}(n+1)^{-\delta} - (n+1)^{-\delta}\,\phi_n \, \left((1+\frac{1}{n})^\delta - 1\right) < 0,$$

т.е. ϕ_n/n^δ убывает при всех достаточно больших n.

Замечание 2 проверено.

Докажем теорему 2. Пусть $\alpha = 2$ и (без потери общности) $B_n = \sqrt{n}$. Рассуждения (2.1)– (2.9) не меняются и, в частности, приводят к соотношению

$$P_n^{(1)}(r/\phi_n) \leqslant (r/\phi_n)^t, \ n > n_2. \tag{2.21}$$

при *любом* $t > 0$ и всех достаточно больших r.

Чтобы в условиях теоремы 2 доказать (1.8), оценим правую часть в (2.11) по [7, (2.16)]. Обозначим $c\,a\,(n/m)^\gamma$ через x. Имеем,

$$\mathbf{P}(|S_n| > x) \leqslant A \left(x^{-t} + \frac{n}{(x\sqrt{n})^t} \int\limits_0^{x\sqrt{n}} u^{t-1}\, R(u) du \right), \ n \geqslant n_2,$$

где постоянная t может быть как угодно велика, а A не зависит от n.

Рассуждая, как в [7, (2.17)–(2.25); см. также Теорему 1 и (1.20)] и используя (2.21), (2.14), (2.15), ..., получим оценку

$$\sum_{n>n_2} f_n\,(P_n(r/\phi_n) + \mathcal{P}(r/\phi_n)) = o(1)\,\psi(r) + O(1) \sum_{n>n_1} n\,f_n\,R(x\,\sqrt{n}). \tag{2.22}$$

Условия (1.21) и (1.17) позволяют показать, что

$$\sum_{n>n_1} n\,f_n\,R(x\,\sqrt{n}) = o(1)\,g(r),\ r \to \infty.$$

Отсюда и из (2.22) следует (2.5). Далее, как в теореме 1.

Замечание 4 проверяется с помощью замечания 3 заменой суммы в (1.21) соответствующим интегралом.

Следствия 2 и 3 вытекают из теоремы 2 и замечания 4.

Литература

1. А. А. Могульский, *Малые уклонения в пространстве траекторий.* — Теория вероятн. и ее примен. **19** (1974), 755–765.
2. Л. В. Розовский, *О точной асимптотике в слабом законе больших чисел для сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения устойчивого закона.* — Теория вероятн. и ее примен. **48** (2003), 589–596.
3. A. Spataru, *Precise asymptotics in Spitzer's law of large numbers.* — J. Theor. Probability **12** (1999), 811–819.
4. A. Gut, A. Spataru, *Precise asymptotics in the Baum–Katz and Davis laws of large numbers.* — J. Math. Anal. Appl. **248** (2000), 233–246.
5. A. Gut, A. Spataru, *Precise asymptotics in the law of the iterated logarithm.* — Ann. Probab. **28** (2000), 1870–1883.
6. L. X. Zhang, *On the rates of the other law of the logarithm.* 2003, Manuscript. (http:/www.math.zju.edu.cn/zlx/mypapers2/otherLL.pdf).
7. Л. В. Розовский, *О точной асимптотике в слабом законе больших чисел для сумм независимых случайных величин с общей функцией распределения из области притяжения устойчивого закона.* 2. — Теория вероятн. и ее примен. **49** (2004), стр.??–??.
8. T. Pang and Z. Lin, *On the rates of the Chung-type law of logarithm.* 2006, Manuscript.
9. Ю. В. Прохоров, *Сходимость случайных процессов и предельные теоремы теории вероятностей.* — Теория вероятн. и ее примен. **1** (1956), 177–238.
10. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* М. (1986).
11. В. Феллер, *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т. 2, Мир, М. (1984).

12. W. Feller, *The asymptotic distribution of the range of sums of independent random variables.* — Ann. Math. Stat. **22**, No. 3 (1951), 427–432.
13. А. Н. Бородин, П. Салминен, *Справочник по броуновскому движению.* Лань, СПб. (2000).

Rozovsky L. V. Small deviations of modified sums of independent random variables.

Let $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $n \geqslant 1$, $S_0 = 0$, where $X_1, X_2, \ldots$ are independent identically distributed random variables such that the distributions of S_n/B_n converge weakly to nondegenerate distribution F_α as $n \to \infty$ for some positive B_n. We study the asymptotic behavior of sums such as

$$\sum_{n\geqslant 1} f_n \, \mathbf{P}\Big(\frac{1}{B_n}\, R_n^* \leqslant \frac{r}{\phi_n}\Big), \quad r \nearrow \infty,$$

where

$$R_n^* = \max_{0\leqslant k\leqslant n} \left(S_k + d\,(k/n)\; S_n\right) - \min_{0\leqslant k\leqslant n} \left(S_k + d\,(k/n)\; S_n\right),$$

a function $d(t)$ is continuous on $[0,1]$ and has a power decrease at zero point

$$f_n \geqslant 0, \quad \sum_{n\geqslant 1} f_n = \infty, \quad \phi_n \nearrow \infty.$$

Санкт-Петербургская
химико-фармацевтическая академия

E-mail: l_rozovsky@mail.ru

Поступило 15 октября 2008 г.