Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 361, 2008 г.

С. С. Расова, Б. П. Харламов

ОПТИМАЛЬНЫЙ ЛОКАЛЬНЫЙ МОМЕНТ ПЕРВОГО ВЫХОДА

1. Постановка задачи

Многие прикладные задачи состоят в выборе обоснованного момента остановки τ некоторого случайного процесса $(X_t)_0^\infty$. Классическая задача оптимальной остановки сводится к нахождению максимума (минимума) некоторого функционала (функционал цели), заданного на множестве марковских моментов относительно натурального потока сигма-алгебр событий. В рассматриваемой оптимизационной задаче такой функционал имеет вид функции $R(U, V)$ от двух переменных:

$$U = U_\tau = E \exp\left(- \int\limits_0^\tau h(X_t)\, dt \right), \tag{1}$$

$$V = V_\tau = E \int\limits_0^\tau \exp\left(- \int\limits_0^t h(X_s)\, ds \right) dt, \tag{2}$$

h – положительная неубывающая функция. В теории массового обслуживания, в теории надежности, в финансовой математике процесс (X_t) интерпретируется как степень деградации системы, а эти компоненты имеют смысл:

$$U_\tau = P(\zeta \geqslant \tau), \quad V_\tau = E\zeta - E(\zeta - \tau)^+,$$

где ζ – некоторый неконтролируемый случайный момент (отказ), распределение которого зависит от реализации случайного процесса (X_t). При этом $h(X_t)$ – функция интенсивности случайной величины ζ в момент t (опасность отказа), которая может рассматриваться как наблюдаемая величина, зависящая определенным образом от деградации исследуемой системы; τ – марковский момент относительно натурального потока сигма-алгебр событий, порожденных процессом

Поддержано грантом РФФИ НШ-4222.2006.1 и Программой ПРАН-22.

(X_t). Тот случай, когда помимо момента отказа в непредсказуемый момент ζ отказом является также достижение некоторого предельного уровня деградации c, можно рассмотреть в рамках этой модели, положив $h(x) = +\infty$ при $x \geqslant c$. В настоящей статье этот случай мы рассматривать не будем.

Функционал U_τ характеризует потери, возникающие при слишком позднем сигнале остановки, когда нежелательное событие произошло до начала профилактических мероприятий. Функционал V_τ характеризует потери, возникающие при слишком раннем моменте остановки, когда плата за профилактические мероприятия перед нежелательным событием становится больше предполагаемого ущерба. Функционал $R(U_\tau, V_\tau)$ возникает при оценке стационарного поведения системы [3, 5, 7].

Анализ функционала цели показывает, что, если частные производные R'_1 и R'_2 в точке (U,V) совпадают по знаку (где $R'_k(x_1,x_2) = \partial R(x_1,x_2)/\partial x_k$ $(k = 1,2)$), то для непрерывного процесса необходимым условием минимума в точке τ является уравнение

$$h(X_\tau) = \frac{R'_2(U,V)}{R'_1(U,V)} \tag{3}$$

P-почти наверное на множестве $\{\tau < \infty\}$. Это означает, что значение почти всех выборочных траекторий в момент времени τ должно быть одним и тем же, равным значению функции h^{-1} от правой части уравнения (3). Очевидно, что таким свойством обладает момент первого выхода выше данного уровня. По причине, которая будет ясна позднее, мы называем марковские моменты, обладающие свойством (3), локальными моментами первого выхода.

В классе неубывающих процессов множество моментов первого выхода, определяемое из уравнения (3), совпадает с множеством локальных моментов первого выхода. В результате уравнение (3) вырождается в уравнение:

$$h(b) = \frac{R'_2(g_1(b), g_2(b))}{R'_1(g_1(b), g_2(b))} \quad (\tau_b < \infty),$$

где τ_b – момент первого выхода из интервала $(-\infty, b)$,

$$g_1(b) = E\exp\left(-\int_0^{\tau_b} h(X_t)\,dt\right),$$

$$g_2(b) = E\int_0^{\tau_b} \exp\left(-\int_0^{t} h(X_s)\,ds\right)dt.$$

Это уравнение допускает решение (хотя бы численное) для некоторых классов неубывающих процессов. Определенный интерес представляют непрерывные неубывающие процессы из класса обращенных процессов с независимыми положительными приращениями [4, 6]. Для этих процессов

$$g_1(b) = \exp\left(-\int_0^{b} \beta(x)\,dx\right),$$

$$g_2(b) = \int_0^{b} \exp\left(-\int_0^{x} \beta(y)\,dy\right)\frac{\beta(x)}{x}\,dx,$$

где $\beta(x)$ – функция, определяемая в терминах разложения Леви–Хинчина соответствующего процесса с независимыми приращениями. Некоторые частные случаи были рассмотрены в работах [3, 5, 7].

Однако наибольший интерес представляет уравнение (3), когда исходный случайный процесс не является монотонным. В этом случае уравнению (3) могут удовлетворять не только моменты первого выхода выше некоторого уровня, но и большое множество других марковских моментов.

Очевидно, что решение проблемы оптимальной остановки зависит от вида функции R, которая зависит от рассматриваемой ситуации и её адекватной модели. В первую очередь была исследована линейная функция R. Результаты исследования приводятся в настоящей статье. В этом случае правая часть уравнения (3) – постоянная величина, равная отношению коэффициентов. Этот случай реализуется в задаче об оптимальном (для клиента) выборе момента начала страхования [5]. В упрощенном виде ситуация выглядит следующим образом. Страховое событие происходит в случайный момент ζ. Клиент заключает страховой договор в момент τ, если до этого момента не наступило страховое событие. Клиент выплачивает страховую премию в размере v в единицу времени, начиная с момента τ и до момента ζ. В момент ζ он получает от страховой компании сумму w. Затраты клиента составляют

$$f_\tau = v\,(\zeta - \tau)_+ - w\,I_{\zeta > \tau} + c,$$

где c – ущерб, вызванный страховым событием; $(\zeta - \tau)^+ = \max\{0, \zeta - \tau\}$; I_A – индикатор события A. Средние потери клиента

$$F_\tau = vE(\zeta - \tau;\, \zeta > \tau) - wP\{\zeta > \tau\} + Ec. \tag{4}$$

Предполагается, что опасность наступления страхового события пропорциональна степени износа некоторой детали, служащей диагностическим параметром объекта. Чтобы быть более реалистичными, предположим, что степень износа известна клиенту, но не известна страховщику. Клиенту не выгодно начинать страхование при малой опасности отказа, так как при этом будет слишком большой период времени выплачивания страхового взноса (премии) v страховщику. Но также не выгодно ждать слишком долго, так как в случае отказа до заключения страхового договора он не получает страхового возмещения w. В результате он приходит к оптимизационной задаче $F_\tau \to \min\limits_\tau$, где τ ищется среди всех марковских моментов времени. Необходимым условием минимума функции потерь для непрерывного процесса здесь является соотношение

$$h(X(\tau)) = v/w. \tag{5}$$

Таким образом, τ – это локальный момент первого выхода выше уровня $b = h^{-1}(v/w)$.

2. Обозначения и предварительные результаты

Рассмотрим одномерный случайный процесс (X_t) $(t \geqslant 0)$ с траекториями из пространства Скорохода $\mathcal{D}$. Пусть $\mathcal{T}$ – множество всех марковских моментов относительно натуральной фильтрации этого процесса. Назовём $\tau \in \mathcal{T}$ локальным моментом первого выхода выше уровня b, если почти наверное $X_\tau \geqslant b$ и $X_{\tau-} \leqslant b$ на множестве $\tau < \infty$. Очевидно, если процесс непрерывен в точке τ, то $X_\tau = b$. Пусть $\mathcal{T}(b)$

– множество всех локальных моментов первого выхода выше уровня b. Ясно, что глобальный момент первого выхода выше уровня b, т.е. $\tau = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \geqslant b\}$, принадлежит $\mathcal{T}(b)$. Очевидно также, что для процессов, неоднократно пересекающих данный уровень, локальный момент первого выхода определен не однозначно. Мы будем рассматривать задачу поиска максимума (минимума) функционала, заданного на $\mathcal{T}(b)$ в том случае, когда это множество достаточно богато. В дальнейшем имеет смысл рассматривать вместо одной меры P (согласованное) семейство мер (P_x), где нижним индексом отмечена начальная точка траектории. Функция потерь (4) в этом случае имеет вид

$$F_\tau(x) = C - v\,V_\tau(x) - w\,U_\tau(x),$$

где $C = v\,E_x\zeta + E_x c$, $U_\tau(x)$, $V_\tau(x)$ определены формулами (1), (2) соответственно относительно меры P_x. Перепишем эту функцию в виде

$$F_\tau(x) = C_1 - w\,H_\tau(h(b)|\,x), \tag{6}$$

где $C_1 = C - w$ и

$$H_\tau(a|\,x) = E_x \int_0^\tau \exp\biggl(-\int_0^t h(X_s)\,ds\biggr)(a - h(X_t))\,dt \quad (a > 0). \tag{7}$$

Отсюда получаем необходимые условия локального минимума. А именно, для момента $\tau \in \mathcal{T}$, ограниченной положительной измеримой функции η, заданной на $\mathcal{D}$, и $\epsilon > 0$ получаем

$$F_{\tau-\epsilon\eta}(x) - F_\tau(x)$$

$$= w\,E_x\biggl(\int_{\tau-\epsilon\eta}^{\tau} \exp\biggl(-\int_0^t h(X_s)\,ds\biggr)(h(b) - h(X_t))\,dt;\, \tau < \infty\biggr).$$

Для τ, являющейся точкой локального минимума, необходимо, чтобы эта разность была неотрицательной при всех достаточно малых $\epsilon > 0$. Отсюда следует, что P_x-почти наверное $h(X_{\tau-0}) \leqslant h(b)$ на множестве $\{\tau < \infty\}$. Аналогично, сравнивая $F_{\tau+\epsilon\eta}$ и F_τ, получаем второе условие: P_x-почти наверное $h(X_{\tau+0}) \geqslant h(b)$ на множестве $\{\tau < \infty\}$. Для процесса непрерывного в окрестности точки τ из этих двух условий следует, во-первых, $h(X_\tau) = h(b)$, и, во-вторых, что данное значение процесс получает при пересечении уровня $h^{-1}(h(b))$ снизу вверх.

Обозначим $\sigma_\Delta = \inf\{t \geqslant 0 : X_t \notin \Delta\}$, где $\Delta \subset \mathbb{R}$. Для полубесконечных интервалов введем дополнительные обозначения: $\mu_b = \sigma_{(-\infty,b)}$ и $\nu_b = \sigma_{(b,\infty)}$. Обозначим $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \tau_1 + \tau_2 \circ \theta_{\tau_1}$, где $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}$, $\tau_1 < \infty$ и θ_t – оператор сдвига на множестве траекторий; на множестве $\{\tau_1 = \infty\}$ определим $\tau_1 \dot{+} \tau_2 = \infty$. Пусть $\alpha_{b,r} = \nu_{b-r} \dot{+} \mu_b$ – комбинированный марковский момент, где $r \geqslant 0$. Далее, пусть $\alpha^1_{b,r} = \alpha_{b,r}$, $\alpha^{n+1}_{b,r} = \alpha^n_{b,r} \dot{+} \alpha^1_{b,r}$ $(n \geqslant 1)$ и $\alpha^0_{b,r} = 0$.

В дальнейшем мы будем рассматривать процессы, которые почти наверное непрерывны в некоторой окрестности искомого марковского момента τ. Таковыми будут диффузионные процессы и кусочно непрерывно возрастающие с отрицательными скачками. Для таких процессов при любом $r > 0$ существует возрастающая последовательность элементов $\tau \in \mathcal{T}(b)$. При $x < b \equiv h^{-1}(h(b))$ такой последовательностью будет $\mu_b, \mu_b \dot{+} \alpha^1_{b,r}, \mu_b \dot{+} \alpha^2_{b,r}, \ldots$, а при $x \geqslant b$ – та же последовательность без начального члена и без первого слагаемого в остальных членах. Очевидно, что для любой последовательности положительных чисел $(r_n)_1^\infty$ можно построить последовательность локальных первых моментов выхода выше уровня b вида

$$\tau_n = \mu_b \dot{+} \sum_{k=1}^{n} \alpha_{b,r_k} \circ \theta_{\tau_{k-1}} \quad (n \geqslant 0)$$

(или без слагаемого μ_b; в дальнейшем предполагаем, что $x < b$). Назовем такие элементы множества $\mathcal{T}(b)$ простыми локальными моментами первого выхода выше уровня b. Для построенной выше возрастающей последовательности простых элементов можно рассмотреть смесь (рандомизацию) этих элементов вида

$$\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k I_{A_k},$$

где $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$, $\bigcup A_k = \mathcal{D}$, $A_k \in \mathcal{F}_{\tau_k}$, где $\mathcal{F}_{\tau_k}$ – сигма-алгебра подмножеств множества $\mathcal{D}$, порожденная натуральным потоком сигма-алгебр $(\mathcal{F}_t)$ и марковским моментом τ_k. Назовем такое семейство множеств допустимым разбиением, соответствующим данной последовательности марковских моментов. Очевидно, $\tau \in \mathcal{T}(b)$.

Покажем, что при $r_1 < r_2$ момент α_{b,r_2} является смесью моментов α_{b,r_1}. Используя свойство $\tau \leqslant \sigma_\Delta \Longrightarrow \sigma_\Delta = \tau\dot{+}\sigma_\Delta$, имеем на множестве $\{\alpha^{n-1}_{b,r_1} \leqslant \nu_{b-r_2} < \alpha^n_{b,r_1}\}$

$$\begin{aligned}\alpha_{b,r_2} \equiv \nu_{b-r_2}\dot{+}\mu_b = \alpha^{n-1}_{b,r_1}\dot{+}\nu_{b-r_2}\dot{+}\mu_b &= \alpha^{n-1}_{b,r_1}\dot{+}\nu_{b-r_1}\dot{+}\nu_{b-r_2}\dot{+}\mu_b\\ &= \tau_{n-1} + (\nu_{b-r_2}\dot{+}\mu_b)\circ\theta_{\tau_{n-1}},\end{aligned}$$

где $\tau_{n-1} = \alpha^{n-1}_{b,r_1}\dot{+}\nu_{b-r_1}$. С другой стороны,

$$\begin{aligned}\{\alpha^{n-1}_{b,r_1} \leqslant \nu_{b-r_2} < \alpha^n_{b,r_1}\} &\subset \{\alpha^{n-1}_{b,r_1}\dot{+}\nu_{b-r_2} < \alpha^n_{b,r_1}\}\\ &= \{\alpha^{n-1}_{b,r_1}\dot{+}\nu_{b-r_1}\dot{+}\nu_{b-r_2} < \alpha^{n-1}_{b,r_1}\dot{+}\nu_{b-r_1}\dot{+}\mu_b\}\\ &\equiv \{\tau_{n-1}\dot{+}\nu_{b-r_2} < \tau_{n-1}\dot{+}\mu_b\} = \theta^{-1}_{\tau_{n-1}}\{\nu_{b-r_2} < \mu_b\}.\end{aligned}$$

На этом множестве $(\nu_{b-r_2}\dot{+}\mu_b)\circ\theta_{\tau_{n-1}} = \mu_b\circ\theta_{\tau_{n-1}}$, откуда $\alpha_{b,r_2} = \alpha_{b,r_1}$. Следовательно,

$$\alpha_{b,r_2} = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha^n_{b,r_1} I_{A_n}, \tag{8}$$

где $A_n = \{\alpha^{n-1}_{b,r_1} \leqslant \nu_{b-r_2} < \alpha^n_{b,r_1}\}$ принадлежит сигма-алгебре предшествующих моменту α^n_{b,r_1} событий.

Из очевидного соотношения $\tau\dot{+}\sigma_\Delta \geqslant \sigma_\Delta$ $(\forall\,\tau \in \mathcal{T},\ \Delta \subset \mathbb{R})$ следует, что функция $\alpha_{b,r}$ убывает при $r \to 0$. Если $\lim\limits_{r\to 0}\alpha_{b,r} = \alpha_{b,0} > 0$ и $\alpha^n_{b,0} \to \infty$ P_x-п.н., то произвольный локальный момент первого выхода выше уровня b имеет вид

$$\tau = \sum_{n=0}^{\infty} (\mu_b\dot{+}\alpha^n_{b,0}) I_{A_n},$$

где $(A_n)_0^\infty$ – некоторое допустимое разбиение, соответствующее последовательности $(\mu_b\dot{+}\alpha^n_{b,0})$. Будем называть в этом случае $\mathcal{T}(b)$ дискретным. Этот случай реализуется для кусочно-возрастающих процессов.

Если $\lim_{r\to 0}\alpha_{b,r} = 0$ P_x-п.н., то соответствующее $\mathcal{T}(b)$ будем называть непрерывным. В этом случае для произвольного $\tau \in \mathcal{T}(b)$ справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* (P_x) *– семейство мер марковского процесса, для которого* $\alpha_{b,r} \to 0$ $(r \to 0)$ *и при любом* $r > 0$ $\alpha_{b,r}^n \to \infty$ $(n \to \infty)$ P_b*-п.н. Тогда* $(\forall x \in \mathbb{R})$ *смешанный момент*

$$\tau_r = \mu_b I(\tau = \mu_b) + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n I(\beta_{n-1} < \tau \leqslant \beta_n)$$

(где $\beta_n = \mu_b \dot{+} \alpha_{b,r}^n$ $(n \geqslant 1,\, \beta_0 = \mu_b)$*) определен и* P_x*-п.н. сходится к* τ *при* $r \to 0$.

Доказательство. Функция τ_r определена P_x-п.н., если

$$P_x(\mu_b \dot{+} \alpha_{b,r}^n \to \infty) = 1 \quad (n \to \infty).$$

Тогда

$$P_x(\mu_b \dot{+} \alpha_{b,r}^n \to \infty) = P_x(\alpha_{b,r}^n \circ \theta_{\mu_b} \to \infty,\, \mu_b < \infty) + P_x(\mu_b = \infty)$$

$$= P_x(\mu_b < \infty) P_b(\alpha_{b,r}^n \to \infty) + P_x(\mu_b = \infty) = 1.$$

Рассмотрев 4 возможных варианта расположения X_{τ_1} и X_{τ_2} относительно множества Δ, убеждаемся в том, что из $\tau_1 \leqslant \tau_2$ следует $\tau_1 \dot{+} \sigma_\Delta \leqslant \tau_2 \dot{+} \sigma_\Delta$. Отсюда

$$\begin{aligned}
\tau_r - \tau &= \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_n - \tau) I(\beta_{n-1} < \tau \leqslant \beta_n) \\
&\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\tau \dot{+} \alpha_{b,r} - \tau) I(\beta_{n-1} < \tau \leqslant \beta_n) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{b,r} \circ \theta_\tau) I(\beta_{n-1} < \tau \leqslant \beta_n).
\end{aligned}$$

Из формулы (3) следует, что последовательность (τ_r) монотонно убывает при $r \to 0$. Для доказательства теоремы достаточно доказать, что $\tau_r - \tau \to 0$ по вероятности P_x. Имеем $(\forall \epsilon > 0)$

$$P_x(\tau_r - \tau > \epsilon) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} P_x\bigl(\alpha_{b,r} \circ \theta_\tau > \epsilon,\, \beta_{n-1} < \tau \leqslant \beta_n\bigr)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_x(P_{X_\tau}(\alpha_{b,r} > \epsilon);\ \beta_{n-1} < \tau \leqslant \beta_n)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} P_b(\alpha_{b,r} > \epsilon) P_x(\beta_{n-1} < \tau \leqslant \beta_n) \leqslant P_b(\alpha_{b,r} > \epsilon) \to 0 \quad (r \to 0).$$

В последней строчке использовано свойство $X_\tau = b$. □

Доказанная теорема используется при анализе страхования с деградацией диффузионного вида. Заметим, что при доказательстве нигде не было использовано марковское свойство относительно фиксированного момента времени, а только лишь относительно моментов первого выхода из открытых множеств. Поэтому теорема верна также в классе полумарковских процессов общего вида (так называемых непрерывных полумарковских процессов [4]).

3. Сравнение потерь

Для определения оптимального момента из множества $\mathcal{T}(b)$ рассмотрим значения функции потерь на простых моментах из этого класса. Согласно формуле (6), достаточно изучить функцию H. Согласно (7) для двух марковских моментов имеем

$$H_{\tau_1 \dot{+} \tau_2}(a|\, x) = H_{\tau_1}(a|\, x) + E_x \int\limits_{\tau_1}^{\tau_1 \dot{+} \tau_2} \exp\bigg(- \int\limits_0^t h(X_s)\, ds \bigg) (a - h(X_t))\, dt$$

$$= H_{\tau_1}(a|\, x) + E_x \Bigg(\exp\bigg(- \int\limits_0^{\tau_1} h(X_s)\, ds \bigg)$$

$$\times \Bigg(\int\limits_0^{\tau_2} \exp\bigg(- \int\limits_0^t h(X_s)\, ds \bigg) (a - h(X_t))\, dt \circ \theta_{\tau_1} \Bigg)\Bigg).$$

Для однородного полумарковского процесса общего вида (частным случаем которого является однородный строго марковский процесс) получаем

$$H_{\tau_1 \dot{+} \tau_2}(a|\, x) = H_{\tau_1}(a|\, x) + E_x \Bigg(\exp\bigg(- \int\limits_0^{\tau_1} h(X_s)\, ds \bigg) H_{\tau_2}(a|\, X_{\tau_1}) \Bigg).$$

В дальнейшем (за исключением примера в конце статьи) рассматриваем именно этот случай – однородный полумарковский процесс общего вида. Пусть $\tau_1 \in \mathcal{T}(b)$. Тогда

$$H_{\tau_1 \dot{+} \tau_2}(a|\, x) = H_{\tau_1}(a|\, x) + U_{\tau_1}(x) H_{\tau_2}(a|\, b).$$

Применяя эту формулу к $F_\tau(x)$, мы видим, что при $\tau_2 = \alpha_{b,r}$ знак разности $F_{\tau_1 \dot{+} \tau_2}(x) - F_{\tau_1}(x)$ не зависит от τ_1:

$$F_{\tau_1 \dot{+} \tau_2}(x) - F_{\tau_1}(x) = -w\, U_{\tau_1}(x) G_r(b),$$

где

$$G_r(b) \equiv H_{\alpha_{b,r}}(h(b)|\, b) = H_{\nu_{b-r}}(h(b)|\, b) + U_{\nu_{b-r}}(b) H_{\mu_b}(h(b)|\, b-r). \quad (9)$$

Функция $G_r(b)$, определяющая знак, может быть как положительной, так и отрицательной. Действительно,

$$H_{\nu_{b-r}}(h(b)|\, b) = H_{\nu_{b-r}}(h(b-r)|\, b) + (h(b) - h(b-r)) V_{\nu_{b-r}}(b).$$

Первое слагаемое в этой сумме отрицательно. Остальные слагаемые в разложении $G_r(b)$ положительны. Примеры показывают возможность любого знака в зависимости от сочетания параметров модели.

Покажем, что знак этой функции не зависит от r.

Теорема 2. *При любых $0 \leqslant r_1 < r_2$, при которых $P_x(\alpha_{b,r_1} > 0) > 0$, справедлива формула*

$$G_{r_2}(b) = \frac{G_{r_1}(b)}{1 - E_b(\exp(-\int_0^{\alpha_{b,r_1}} h(X_s)\, ds); \alpha_{b,r_1} \leqslant \nu_{b-r_2})},$$

Доказательство. Обозначим

$$f(t) = \exp\left(-\int_0^t h(X_s)\, ds\right)(h(b) - h(X_t)).$$

Согласно (8) имеем

$$G_{r_2}(b) = E_b \int_0^{\alpha_{b,r_2}} f(t)\, dt = \sum_{n=1}^{\infty} E_b\left(\int_0^{\alpha_{b,r_1}^n} f(t)\, dt;\ \alpha_{b,r_1}^{n-1} \leqslant \nu_{b-r_2} < \alpha_{b,r_1}^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} E_b\Bigl(\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\alpha_{b,r_1}^{k-1}}^{\alpha_{b,r_1}^{k}} f(t)\,dt;\ \alpha_{b,r_1}^{n-1} \leqslant \nu_{b-r_2} < \alpha_{b,r_1}^{n}\Bigr)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E_b\Bigl(\int\limits_{\alpha_{b,r_1}^{k-1}}^{\alpha_{b,r_1}^{k}} f(t)\,dt;\ \alpha_{b,r_1}^{k-1} \leqslant \nu_{b-r_2}\Bigr)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E_b\Bigl(\exp\Bigl(-\int\limits_{0}^{\alpha_{b,r_1}^{k-1}} h(X_s)\,ds\Bigr)(\int\limits_{0}^{\alpha_{b,r_1}} f(t)\,dt \circ \theta_{\alpha_{b,r_1}^{k-1}});\ \alpha_{b,r_1}^{k-1} \leqslant \nu_{b-r_2}\Bigr)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} E_b\Bigl(\exp\Bigl(-\int\limits_{0}^{\alpha_{b,r_1}^{k-1}} h(X_s)\,ds\Bigr);\ \alpha_{b,r_1}^{k-1} \leqslant \nu_{b-r_2}\Bigr) E_b \int\limits_{0}^{\alpha_{b,r_1}} f(t)\,dt$$

$$= G_{r_1}(b) \sum_{k=0}^{\infty} E_b\Bigl(\exp\Bigl(-\int\limits_{0}^{\alpha_{b,r_1}^{k}} h(X_s)\,ds\Bigr);\ \alpha_{b,r_1}^{k} \leqslant \nu_{b-r_2}\Bigr).$$

С другой стороны,

$$E_b\Bigl(\exp\Bigl(-\int\limits_{0}^{\alpha_{b,r_1}^{k}} h(X_s)\,ds\Bigr);\ \alpha_{b,r_1}^{k} \leqslant \nu_{b-r_2}\Bigr)$$

$$= E_b\Bigl(\exp\Bigl(-\int\limits_{0}^{\alpha_{b,r_1}^{k-1}} h(X_s)\,ds\Bigr)\Bigl(\exp\Bigl(-\int\limits_{0}^{\alpha_{b,r_1}} h(X_s)\,ds\Bigr) \circ \theta_{\alpha_{b,r_1}^{k-1}}\Bigr);$$

$$\alpha_{b,r_1}^{k-1} \leqslant \nu_{b-r_2}, \alpha_{b,r_1}^{k-1} \dot{+} \alpha_{b,r_1} \leqslant \alpha_{b,r_1}^{k-1} \dot{+} \nu_{b-r_2}\Bigr)$$

$$= E_b\Bigl(\exp\Bigl(-\int\limits_{0}^{\alpha_{b,r_1}^{k-1}} h(X_s)\,ds\Bigr);\ \alpha_{b,r_1}^{k-1} \leqslant \nu_{b-r_2}\Bigr)$$

$$\times E_b\biggl(\exp\biggl(-\int\limits_0^{\alpha_{b,r_1}} h(X_s)\,ds\biggr);\ \alpha_{b,r_1}\leqslant\nu_{b-r_2}\biggr)$$

$$=\biggl(E_b\biggl(\exp\biggl(-\int\limits_0^{\alpha_{b,r_1}} h(X_s)\,ds\biggr);\ \alpha_{b,r_1}\leqslant\nu_{b-r_2}\biggr)\biggr)^k.$$

Отсюда

$$G_{r_2}(b)=G_{r_1}(b)\sum_{k=0}^{\infty}\biggl(E_b\biggl(\exp\biggl(-\int\limits_0^{\alpha_{b,r_1}} h(X_s)\,ds\biggr);\ \alpha_{b,r_1}\leqslant\nu_{b-r_2}\biggr)\biggr)^k$$

$$=\frac{G_{r_1}(b)}{1-E_b\biggl(\exp\biggl(-\int\limits_0^{\alpha_{b,r_1}} h(X_s)\,ds\biggr);\ \alpha_{b,r_1}\leqslant\nu_{b-r_2}\biggr)}.\quad\square$$

Итак, знак функции $G_r(b)$ не зависит от r. А это значит, что для любой положительной последовательности $(r_k)_1^n$ последовательность $(F_{\tau_k})_0^n$ (где $\tau_0=\mu_b$, $\tau_k=\tau_{k-1}\dot{+}\alpha_{b,r_k}$ $(k\geqslant 1)$) или не убывает, или не возрастает. Для дискретного множества $\mathcal{T}(b)$ характер изменения последовательности определяет функция $G_0(b)$, для непрерывного $\mathcal{T}(b)$ информация об изменении последовательности значений функции потерь содержится в производной функции $G_r(b)$ по r при $r=0$. В рассмотренном ниже примере такая производная существует и может быть вычислена. Ясно, как поступать, если ограничиться простыми локальными моментами первого выхода вида τ_k. Для достижения минимума потерь при $G_0(b)\leqslant 0$ (дискретный случай) или при $G_0'(b)\geqslant 0$ (непрерывный случай) следует остановиться в момент μ_b, при $G_0(b)>0$ ($G_0'(b)<0$) оптимальный момент остановки – τ_n, для бесконечной последовательности "отступов" (r_k) оптимального момента не существует (каждый следующий лучше предыдущего). Мы покажем, что эта стратегия верна также и для смешанных локальных моментов первого выхода выше уровня b.

Пусть $\tau=\sum_{k=0}^n \tau_k I_{A_k}$, где $A_i\cap A_j=\emptyset$ $(i\neq j)$, $\bigcup_0^n A_k=\mathcal{D}$, $A_k\in\mathcal{F}_{\tau_k}$ $(k=0,\dots,n)$. При этом, согласно (6), (7) и обозначению из теоремы 2

$$F_\tau(x)=C_1-w\sum_{k=0}^n E_x\biggl(\int\limits_0^{\tau_k} f(t)\,dt;\ A_k\biggr)$$

$$= C_1 - w\,E_x\bigg(\int\limits_0^{\tau_0} f(t)\,dt;\,A_0\bigg) - w\sum_{k=1}^n E_x\bigg(\int\limits_0^{\tau_k} f(t)\,dt;\,A_k\bigg)$$

$$= F_{\tau_0}(x) - w\sum_{k=1}^n E_x\bigg(\int\limits_{\tau_0}^{\tau_k} f(t)\,dt;\,A_k\bigg)$$

$$= F_{\tau_0}(x) - w\sum_{k=1}^n E_x\bigg(\sum_{l=1}^k \int\limits_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} f(t)\,dt;\,A_k\bigg) = F_{\tau_0}(x)$$

$$-w\sum_{l=1}^n E_x\bigg(\exp\bigg(-\int\limits_0^{\tau_{l-1}} h(X_s)\,ds\bigg)\bigg(\int\limits_0^{\alpha_{b,r_l}} f(t)\,dt\circ\theta_{\tau_{l-1}}\bigg);\,\bigcup_{k=l}^n A_k\bigg).$$

Пользуясь тем, что $\bigcup_{k=l}^n A_k \in \mathcal{F}_{\tau_{l-1}}$, получаем

$$F_\tau(x) = F_{\tau_0}(x) - w\sum_{l=1}^n E_x\bigg(\exp\bigg(-\int\limits_0^{\tau_{l-1}} h(X_s)\,ds\bigg);\,\bigcup_{k=l}^n A_k\bigg)\,E_b\int\limits_0^{\alpha_{b,r_l}} f(t)\,dt$$

$$= F_{\tau_0}(x) - w\sum_{l=1}^n E_x\bigg(\exp\bigg(-\int\limits_0^{\tau_{l-1}} h(X_s)\,ds\bigg);\,\bigcup_{k=l}^n A_k\bigg)\,G_{r_l}(b). \tag{10}$$

С другой стороны,

$$F_\tau(x) = F_{\tau_n}(x) - w\sum_{k=0}^n E_x\bigg(\int\limits_0^{\tau_k} f(t)\,dt;\,A_k\bigg) + w\,E_x\int\limits_0^{\tau_n} f(t)\,dt$$

$$= F_{\tau_n}(x) + w\sum_{k=0}^n E_x\bigg(\int\limits_{\tau_k}^{\tau_n} f(t)\,dt;\,A_k\bigg)$$

$$= F_{\tau_n}(x) + w\sum_{k=1}^n\sum_{l=k}^n E_x\bigg(\int\limits_{\tau_{l-1}}^{\tau_l} f(t)\,dt;\,A_{k-1}\bigg)$$

$$= F_{\tau_n}(x) + w\sum_{l=1}^n E_x\bigg(\exp\bigg(-\int\limits_0^{\alpha_{b,r_l}} h(X_s)\,ds\bigg);\,\bigcup_{k=0}^{l-1} A_k\bigg)\,G_{r_l}(b). \tag{11}$$

Из выражений (10) и (11) следует, что значение $F_\tau(x)$ в полумарковском (общего вида) случае всегда находится между значениями $F_{\tau_0}(x)$ и $F_{\tau_n}(x)$. Интересно отметить, что для однородного процесса, не являющегося полумарковским, это не всегда так, чему будет дан пример. На данном этапе мы займемся определением знака функции $G_0'(b)$ для процесса диффузионного вида.

4. Пример степени деградации диффузионного вида

Пусть (X_t) $(t \geqslant 0)$ – винеровский процесс, $h(x) = \max(\epsilon, x)$ для некоторого $\epsilon \in (0, b)$. Обозначим

$$f_a(x) = \begin{cases} U_{\mu_a}(x), & x < a, \\ U_{\nu_a}(x), & x > a, \end{cases} \qquad g_a(x) = \begin{cases} V_{\mu_a}(x), & x < a, \\ V_{\nu_a}(x), & x > a \end{cases} \qquad (a > \epsilon),$$

где U и V определены формулами (1) и (2). В нашем случае, согласно формулам (7) и (9),

$$\begin{aligned} G_r(b) &= H_{\alpha_{b,r}}(h(b)|b) = H_{\nu_{b-r}}(h(b)|b) + U_{\nu_{b-r}}(b) H_{\mu_b}(h(b)|b-r) \\ &= h(b)(g_{b-r}(b) + f_{b-r}(b) g_b(b-r)) + f_{b-r}(b) f_b(b-r) - 1. \end{aligned} \tag{12}$$

По следствиям из формулы Фейнмана–Каца функции f_a и g_a являются решениями дифференциальных уравнений

$$\frac{1}{2} f_a'' - h(x)\, f_a = 0, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2} g_a'' - h(x)\, g_a = -1 \tag{14}$$

соответственно с граничными условиями: $f_a(a) = 1$, $f_a(\infty) = f_a(-\infty) = 0$, $g_a(a) = 0$, функция g_a ограничена на бесконечности. Благодаря разрыву производной функции h в точке ϵ решения при $x < a$ получаются путем гладкого "склеивания" решений с коэффициентами $h(x) = x$ (на интервале (ϵ, a)) и $h(x) = \epsilon$ (на интервале $(-\infty, \epsilon)$).

Уравнение (13) на интервале (ϵ, a) эквивалентно уравнению

$$f_a'' - 2x f_a = 0. \tag{15}$$

Уравнение (15) с помощью замены $\xi = 2^{\frac{1}{3}} x$ можно свести к уравнению Эйри $y'' - \xi y = 0$ (см. [1]). Решение уравнения Эйри можно записать в виде $y = C_1\mathrm{Ai}\,(\xi) + C_2\mathrm{Bi}\,(\xi)$, где $\mathrm{Ai}\,(\xi)$ и $\mathrm{Bi}\,(\xi)$ – функции Эйри первого и второго рода соответственно, которые можно выразить через модифицированные функции Бесселя порядка $\pm\frac{1}{3}$ следующим образом:

$$\mathrm{Ai}\,(\xi) = \frac{1}{3}\sqrt{\xi}\big(I_{-\frac{1}{3}}(z) - I_{\frac{1}{3}}(z)\big), \quad \mathrm{Bi}(\xi) = \sqrt{\frac{1}{3}\,\xi}\big(I_{-\frac{1}{3}}(z) + I_{\frac{1}{3}}(z)\big),$$

где

$$z = \frac{2}{3}\,\xi^{\frac{3}{2}}, \quad I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\Big(\frac{z}{2}\Big)^{2k+\nu}, \quad \nu = \pm\frac{1}{3}.$$

Тогда общим решением уравнения (15) будет

$$f_1(x) = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x), \tag{16}$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные и

$$\phi_1(x) = \frac{2^{\frac{1}{6}}}{3}\sqrt{x}\bigg(I_{-\frac{1}{3}}\bigg(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\bigg) - I_{\frac{1}{3}}\bigg(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\bigg)\bigg), \tag{17}$$

$$\phi_2(x) = \frac{2^{\frac{1}{6}}}{\sqrt{3}}\sqrt{x}\bigg(I_{-\frac{1}{3}}\bigg(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\bigg) + I_{\frac{1}{3}}\bigg(\frac{2\sqrt{2}}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\bigg)\bigg). \tag{18}$$

При $h(x) = \epsilon$ уравнение (15) принимает вид $f_a'' - 2\epsilon f_a = 0$. Общее решение этого уравнения:

$$f_2(x) = C_3\exp(-x\sqrt{2\epsilon}) + C_4\exp(x\sqrt{2\epsilon}) \quad (x \in (-\infty, \epsilon]).$$

Учитывая граничные условия, полагаем $C_3 = 0$. Условия для нахождения неизвестных постоянных:

$$\begin{cases} f_1(a) = 1, \\ f_1(\epsilon) = f_2(\epsilon), \\ {f_1}'(\epsilon) = {f_2}'(\epsilon), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} C_1\phi_1(a) + C_2\phi_2(a) = 1, \\ C_1\phi_1(\epsilon) + C_2\phi_2(\epsilon) = C_4\exp(\epsilon\sqrt{2\epsilon}), \\ C_1{\phi_1}'(\epsilon) + C_2{\phi_2}'(\epsilon) = C_4\sqrt{2\epsilon}\exp(\epsilon\sqrt{2\epsilon}). \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получаем:

$$C_1 = \frac{1}{\phi_1(a)} - \frac{\phi_2(a)}{\phi_1(a)}\,C_2,$$
$$C_2 = \frac{-({\phi_1}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon))}{\phi_1(a)({\phi_2}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_2(\epsilon)) - \phi_2(a)({\phi_1}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon))}. \tag{19}$$

Отсюда получаем

$$f_a(x) = \frac{\phi_1(x)}{\phi_1(a)}$$
$$+\frac{({\phi_1}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon))(\phi_2(a)\phi_1(x) - \phi_1(a)\phi_2(x))}{\phi_1(a)(\phi_1(a)({\phi_2}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_2(\epsilon)) - \phi_2(a)({\phi_1}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon)))}. \tag{20}$$

При $x > a$ решение (15) имеет вид $f(x) = \widetilde{C}_1\phi_1(x) + \widetilde{C}_2\phi_2(x)$, где $\widetilde{C}_2 = 0$, благодаря граничному условию, так как $\phi_1(x) \to 0$ и $\phi_2(x) \to \infty$ при $x \to \infty$. Из условия $f_a(a) = 1$ находим, что $\widetilde{C}_1 = 1/\phi_1(a)$, откуда

$$f_a(x) = \phi_1(x)/\phi_1(a). \tag{21}$$

Найдем теперь общее решение уравнения (14), которое на интервале (ϵ, a) эквивалентно уравнению

$$g_1'' - 2xg_1 = -2. \tag{22}$$

Частное решение в виде степенного ряда:

$$g_0(x) = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+1}3^k k!}{(3k+2)!}\,x^{3k+2}. \tag{23}$$

Тогда общее решение (8) имеет вид

$$g_1(x) = \widehat{C}_1\phi_1(x) + \widehat{C}_2\phi_2(x) + g_0(x). \tag{24}$$

При $x < \epsilon < a$ имеем $h(x) = \epsilon$, и уравнение (22) имеет вид $g_2'' - 2\epsilon g_2 + 2 = 0$. Частное решение этого уравнения: $1/\epsilon$. Общее решение: $g_2(x) = \widehat{C}_3\exp(-x\sqrt{2\epsilon}) + \widehat{C}_4\exp(x\sqrt{2\epsilon}) + 1/\epsilon$. Из граничного условия следует, что $\widehat{C}_3 = 0$. Условия для нахождения неизвестных постоянных при $x < a$:

$$\begin{cases} g_1(a) = 0, \\ g_1(\epsilon) = g_2(\epsilon), \\ {g_1}'(\epsilon) = {g_2}'(\epsilon), \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \widehat{C}_1\phi_1(a) + \widehat{C}_2\phi_2(a) + g_0(a) = 0, \\ \widehat{C}_1\phi_1(\epsilon) + \widehat{C}_2\phi_2(\epsilon) + g_0(\epsilon) = \widehat{C}_4 \exp(\epsilon\sqrt{2\epsilon}) + 1/\epsilon, \\ \widehat{C}_1{\phi_1}'(\epsilon) + \widehat{C}_2{\phi_2}'(\epsilon) + {g_0}'(\epsilon) = \widehat{C}_4\sqrt{2\epsilon}\exp(\epsilon\sqrt{2\epsilon}). \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем:

$$\widehat{C}_1 = -\frac{g_0(a)}{\phi_1(a)} - \frac{\phi_2(a)}{\phi_1(a)}\widehat{C}_2,$$

$$\widehat{C}_2 = \frac{\phi_1(a)\Big(-\sqrt{2/\epsilon} - \Big({g_0}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,g_0(\epsilon)\Big)\Big) + g_0(a)\Big({\phi_1}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon)\Big)}{\phi_1(a)\Big({\phi_2}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_2(\epsilon)\Big) - \phi_2(a)\Big({\phi_1}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon)\Big)}. \tag{25}$$

Отсюда

$$g_a(x) = -\frac{g_0(a)\phi_1(x)}{\phi_1(a)} + \frac{\phi_1(a)\phi_2(x) - \phi_2(a)\phi_1(x)}{\phi_1(a)}$$

$$\times\frac{\phi_1(a)\Big(-\sqrt{2/\epsilon} - \Big({g_0}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,g_0(\epsilon)\Big)\Big) + g_0(a)\Big({\phi_1}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon)\Big)}{\phi_1(a)\Big({\phi_2}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_2(\epsilon)\Big) - \phi_2(a)\Big({\phi_1}'(\epsilon) - \sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon)\Big)} + g_0(x). \tag{26}$$

При $x > a$ решение уравнения (22) при данных граничных условиях имеет вид $g(x) = \widehat{C}_3\phi_1(x) + g_0(x)$. Из условия $g(a) = 0$ находим $\widehat{C}_3 = -g_0(a)/\phi_1(a)$, откуда

$$g_a(x) = -\frac{g_0(a)\phi_1(x)}{\phi_1(a)} + g_0(x). \tag{27}$$

Из формулы (12) видно, что $G_0(b)=0$. Поэтому для определения знака функции $G_r(b)$ при $r>0$ достаточно определить знак $\partial G_r(b)/\partial r$ при $r=0$. Обозначим точкой производную по нижнему индексу от функций $G_r(b)$, $f_a(x)$, $g_a(x)$ и штрихом – по аргументу, стоящему в скобках. Тогда

$$\dot G_0(b)=-b(\dot g_{b-0}(b)+g_b'(b-0))-\dot f_{b-0}(b)-f_b'(b-0).$$

Из формулы (29) получаем

$$f_b'(b-0)=\frac{\partial}{\partial x}f_b(x)|_{x=b}=\frac{\phi_1'(b)}{\phi_1(b)}$$

$$+\frac{({\phi_1}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon))(\phi_2(b)\phi_1'(b)-\phi_1(b)\phi_2'(b))}{\phi_1(b)(\phi_1(b)({\phi_2}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_2(\epsilon))-\phi_2(b)({\phi_1}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon)))}.$$

Из формулы (26) получаем

$$g_b'(b-0)=\frac{\partial}{\partial x}g_b(x)|_{x=b}=-\frac{g_0(b)\phi_1'(b)}{\phi_1(b)}+\frac{\phi_1(b)\phi_2'(b)-\phi_2(b)\phi_1'(b)}{\phi_1(b)}$$

$$\times\frac{\phi_1(b)\big(-\sqrt{2/\epsilon}-\big({g_0}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,g_0(\epsilon)\big)\big)+g_0(b)\big({\phi_1}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon)\big)}{\phi_1(b)\big({\phi_2}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_2(\epsilon)\big)-\phi_2(b)\big({\phi_1}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon)\big)}+g_0'(b).$$

Из формулы (21) получаем

$$\dot f_{b-0}(b)=\frac{\partial}{\partial a}f_a(b)|_{a=b}=-\frac{\phi_1'(b)}{\phi_1(b)}.$$

Из формулы (27) получаем

$$\dot g_{b-0}(b)=\frac{\partial}{\partial a}g_a(b)|_{a=b}=-\frac{g_0'(b)\phi_1(b)-g_0(b)\phi_1'(b)}{\phi_1(b)}.$$

$$\dot G_0(b)=-b\bigg(\frac{\phi_1(b)\phi_2'(b)-\phi_2(b)\phi_1'(b)}{\phi_1(b)}$$

$$\times\frac{\phi_1(b)\big(-\sqrt{2/\epsilon}-\big({g_0}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,g_0(\epsilon)\big)\big)+g_0(b)\big({\phi_1}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon)\big)}{\phi_1(b)\big({\phi_2}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_2(\epsilon)\big)-\phi_2(b)\big({\phi_1}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon)\big)}\bigg)$$

$$-\frac{({\phi_1}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon))(\phi_2(b)\phi_1'(b)-\phi_1(b)\phi_2'(b))}{\phi_1(b)(\phi_1(b)({\phi_2}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_2(\epsilon))-\phi_2(b)({\phi_1}'(\epsilon)-\sqrt{2\epsilon}\,\phi_1(\epsilon)))}.$$

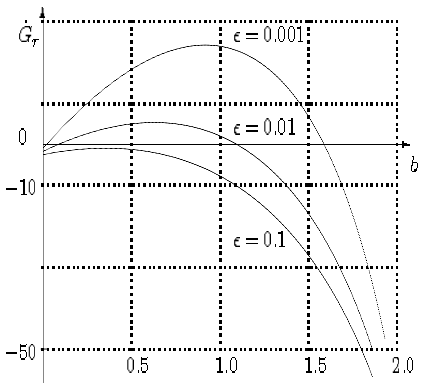

Рис. 1. Производная от $G_r(b)$ по r при $r = 0$.

На рисунке 1 изображены полученные с помощью компьютера три варианта кривых $\dot{G}_0(b)$ при различных значениях параметра ϵ. Из них только одна кривая дает однозначное оптимальное значение локального момента первого выхода ($\epsilon = 0.1$). Этим значением будет глобальный момент первого выхода. Для двух других знак функции меняется и соответственно меняется оптимальная стратегия поведения в зависимости от b.

5. Пример процесса с нетривиальным оптимальным моментом остановки

Рассмотрим процесс восстановления N_t $(t \geqslant 0)$ с моментами восстановления $(\sigma_n)_1^\infty$, где разности $T_n = \sigma_n - \sigma_{n-1}$ – независимые одинаково распределенные положительные случайные величины ($n \geqslant 1$, $\sigma_0 = 0$). С этим процессом свяжем процесс регенерации (X_t): для любого $t > 0$, принадлежащего интервалу $[\sigma_{n-1}, \sigma_n)$, полагаем $X_t = (c/T_n)(t - \sigma_{n-1})$. Таким образом, – это "пила" с "зубьями" равной высоты, но разной длины. Пусть $b \in (0, c)$. Тогда моменты (τ_n) пересечения процессом уровня b являются локальными моментами первого выхода, но не являются моментами регенерации для данного процесса (относительно этих моментов процесс не обладает марковским свойством). Мы будем рассматривать смеси таких моментов, принадлежащие множеству $\mathcal{T}(b)$, т.е. вида $\tau = \sum_{n=1}^\infty \tau_n I_{A_k}$, где $A_n \in \mathcal{F}_{\tau_n}$. Заметим, что благодаря кусочной линейности процесса значение σ_n однозначно восстанавливается по X_{τ_n} и предыдущим значениям процесса.

А именно, $\sigma_n = \sigma_{n-1} + (c/X_{\tau_n})(\tau_n - \sigma_{n-1})$. Следовательно, $\mathcal{F}_{\tau_n} = \mathcal{F}_{\sigma_n}$, причем, $\mathcal{F}_{\sigma_n} = \mathcal{F}_{\sigma_n -}$, так как все скачки равны c.

Сначала рассмотрим конечную смесь, то есть случай $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega \equiv \mathcal{D}$, где $n \geqslant 2$. С учетом непересекаемости множеств можно записать $A_k = \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{k-1} A_k$ для $k = 2, \ldots, n-1$ и $A_n = \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{n-1}$. Найти минимум функции потерь F_τ для конечной смеси можно методом обратной индукции Беллмана. Однако, вычисления при этом будут чересчур громоздки. Мы покажем, как найти минимум в более узком классе последовательностей множеств при так называемой марковской стратегии выбора. Пусть $A_k = \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{k-1} \widehat{B}_k$, где $\widehat{B}_k \in \sigma\{X_{\tau_k}\}$. Последнее множество может быть записано в виде $\widehat{B}_k = \theta^{-1}_{\sigma_{k-1}} B_k$, где $B_k \in \mathcal{F}_{\tau_1}$. Это связано с представлением $X_{\tau_k} = X_{\tau_1} \circ \theta_{\sigma_{k-1}}$. Согласно формуле (6) найти минимум функции потерь означает найти максимум функции H_τ. В дальнейшем полагаем $h(t) = t$ и начальную точку x равной нулю. Обозначив $E = E_0$ и

$$f(t) = \exp\left(-\int\limits_0^t X_s\, ds\right)(b - X_t),$$

имеем

$$\begin{aligned}
H_\tau \equiv H_\tau(b|\,0) &= \sum_{k=1}^{n} E\left(\int\limits_0^{\tau_k} f(t)\, dt;\ A_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{k} E\left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f(t)\, dt;\ A_k\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E\left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f(t)\, dt;\ \bigcup_{k=i}^{n} A_k\right) = \sum_{i=1}^{n} E\left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f(t)\, dt;\ \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{i-1}\right) \\
&= E\int\limits_0^{\tau_1} f(t)\, dt + \sum_{i=2}^{n} E\left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} f(t)\, dt;\ \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{i-1}\right) \\
&= H_{\tau_1} + \sum_{i=2}^{n} E\left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\sigma_{i-1}} f(t)\, dt + \int\limits_{\sigma_{i-1}}^{\tau_i} f(t)\, dt;\ \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{i-1}\right) \\
&= H_{\tau_1} + \sum_{i=2}^{n} E\left(\int\limits_{\tau_{i-1}}^{\sigma_{i-1}} f(t)\, dt + \exp\left(-\int\limits_0^{\sigma_{i-1}} X_s\, ds\right)\right.
\end{aligned}$$

$$\times\Bigg(\int\limits_0^{\tau_1} f(t)\,dt\circ\theta_{\sigma_{i-1}}\Bigg);\,\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{i-1}\Bigg).$$

Применяя свойство регенерации относительно моментов σ_{i-1} и заменяя индексы суммирования, получаем $H_\tau = H_{\tau_1} + S_{n-1}$, где

$$S_{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} E\Bigg(\int\limits_{\tau_k}^{\sigma_k} f(t)\,dt + \exp\Bigg(-\int\limits_0^{\sigma_k} X_s\,ds\Bigg) H_{\tau_1};\,\overline{A}_1\cdots\overline{A}_k\Bigg).$$

Имеем

$$H_\tau = H_{\tau_1} + S_{n-2} + E\Bigg(\exp\Bigg(-\int\limits_0^{\sigma_{n-2}} X_s\,ds\Bigg)\Bigg(\int\limits_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt\circ\theta_{\sigma_{n-2}}\Bigg)$$

$$+\exp\Bigg(-\int\limits_0^{\sigma_{n-2}} X_s\,ds\Bigg)\Bigg(\exp\Bigg(-\int\limits_0^{\sigma_1} X_s\,ds\Bigg)\circ\theta_{\sigma_{n-2}}\Bigg) H_{\tau_1};\,\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{n-1}\Bigg).$$

Далее, используя специальный вид множеств A_k (откуда $\overline{A}_1\cdots\overline{A}_k = \overline{A}_1\cdots\overline{A}_{k-1}\theta^{-1}_{\sigma_{k-1}}\overline{B}_k$) и свойство регенерации, получаем

$$H_\tau = H_{\tau_1} + S_{n-2} + E\Bigg(\exp\Bigg(-\int\limits_0^{\sigma_{n-2}} X_s\,ds\Bigg);\,\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{n-2}\Bigg)$$

$$\times E\Bigg(\int\limits_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt + \exp\Bigg(-\int\limits_0^{\sigma_1} X_s\,ds\Bigg) H_{\tau_1};\,\overline{B}_{n-1}\Bigg).$$

Для нахождения максимума функции H_τ по всем $B_1,\ldots,B_{n-1}$ из $\mathcal{F}_{\tau_1}$ будем находить его последовательно, начиная с последнего. Тогда

$$\max_{B_{n-1}} H_\tau = H_{\tau_1} + S_{n-2} + E\Bigg(\exp\Bigg(-\int\limits_0^{\sigma_{n-2}} X_s\,ds\Bigg);\,\overline{A}_1\cdots\overline{A}_{n-2}\Bigg) M_1,$$

где

$$M_1 = \max_{B_{n-1}} E\Bigg(\int\limits_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt + \exp\Bigg(-\int\limits_0^{\sigma_1} X_s\,ds\Bigg) H_{\tau_1};\,\overline{B}_{n-1}\Bigg)$$

$$= E\left(\int_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt + \exp\left(-\int_0^{\sigma_1} X_s\,ds\right) H_{\tau_1}\right)^+$$

(где $a^+ = \max\{a,0\}$). При этом максимум реализуется на множестве

$$B_{n-1}^* = \left\{\int_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt + \exp\left(-\int_0^{\sigma_1} X_s\,ds\right) H_{\tau_1} < 0\right\} \in \mathcal{F}_{\tau_1}.$$

При $n = 2$ процедура нахождения максимума окончена: $\max\limits_{B_1} H_\tau = H_{\tau_1} + M_1$. Частный максимум при $n > 2$ можно записать в виде

$$\max_{B_{n-1}} H_\tau = H_{\tau_1} + S_{n-3} + E\left(\exp\left(-\int_0^{\sigma_{n-3}} X_s\,ds\right);\, \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{n-3}\right)$$

$$\times E\left(\int_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt + \exp\left(-\int_0^{\sigma_1} X_s\,ds\right)(H_{\tau_1} + M_1);\, \overline{B}_{n-2}\right)$$

и следовательно

$$\max_{B_{n-2},B_{n-1}} H_\tau = H_{\tau_1} + S_{n-3} + E\left(\exp\left(-\int_0^{\sigma_{n-3}} X_s\,ds\right);\, \overline{A}_1 \cdots \overline{A}_{n-3}\right) M_2,$$

где

$$M_2 = \max_{B_{n-2}} E\left(\int_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt + \exp\left(-\int_0^{\sigma_1} X_s\,ds\right)(H_{\tau_1} + M_1);\, \overline{B}_{n-2}\right)$$

$$= E\left(\int_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt + \exp\left(-\int_0^{\sigma_1} X_s\,ds\right)(H_{\tau_1} + M_1)\right)^+,$$

и максимум реализуется на множестве

$$B_{n-2}^* = \left\{\int_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt + \exp\left(-\int_0^{\sigma_1} X_s\,ds\right)(H_{\tau_1} + M_1) < 0\right\}.$$

Используя метод обратной индукции, находим

$$\max_{B_1,\dots,B_{n-1}} H_\tau = H_{\tau_1} + M_{n-1},$$

где последовательность $(M_k)_2^{n-1}$ определяется итеративно:

$$M_k = E\biggl(\int\limits_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt + \exp\biggl(-\int\limits_0^{\sigma_1} X_s\,ds\biggr)(H_{\tau_1} + M_{k-1})\biggr)^+,$$

и, соответственно,

$$B^*_{n-k} = \biggl\{\int\limits_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt + \exp\biggl(-\int\limits_0^{\sigma_1} X_s\,ds\biggr)(H_{\tau_1} + M_{k-1}) < 0\biggr\}.$$

Легко понять, что последовательность (M_k) возрастающая. Её ограниченность следует из ограниченности последовательности (H_{τ_n}). Действительно,

$$\begin{aligned} H_{\tau_n} &\equiv H_{\tau_n}(b|\,0) \leqslant H_{\sigma_n}(c|\,0) = \sum_{k=1}^n E\biggl(\int\limits_{\sigma_{k-1}}^{\sigma_k} f_c(t)\,dt\biggr) \\ &= \sum_{k=1}^n \biggl(E\exp\biggl(-\int\limits_0^{\sigma_1} X_t\,dt\biggr)\biggr)^{k-1} E\int\limits_0^{\sigma_1} f_c(t)\,dt \\ &\leqslant \frac{E\int_0^{\sigma_1} f_c(t)\,dt}{1 - E\exp\Bigl(-\int_0^{\sigma_1} X_t\,dt\Bigr)} < \infty; \end{aligned}$$

(здесь $f_c(t)$ – это функция $f(t)$ с заменой b на c). Пусть $M = \lim M_n$ $(n \to \infty)$. Этот предел удовлетворяет уравнению

$$M = E\biggl(\int\limits_{\tau_1}^{\sigma_1} f(t)\,dt + \exp\biggl(-\int\limits_0^{\sigma_1} X_t\,dt\biggr)(H_{\tau_1} + M)\biggr)^+. \tag{28}$$

Ясно, что все M_n равны нулю, если $M_1 = 0$. В этом случае случайная величина, стоящая в скобках в правой части уравнения (28), почти всюду отрицательна. Этот случай реализуется при малых значениях b (при $b = 0$ и $M = 0$ эта величина равна $\exp\left(-\int_0^{\sigma_1} X_t\,dt\right) - 1$). Здесь оптимальным является тривиальный случай первого выхода за уровень b. При значениях b близких к c отрицательный член в правой части уравнения (28) становится близким к нулю, но конечного решения уравнения не существует (при $b = c$ эта величина равна $M \exp\left(-\int_0^{\sigma_1} X_t\,dt\right)$). В этом случае выбранная стратегия не позволяет остановиться ни на каком конечном шаге – оптимального решения не существует. Нетривиальное оптимальное решение в классе марковских стратегий – невырожденная смесь простых локальных моментов первого выхода – реализуется при некоторых средних значениях величины b. В нашем случае

$$f(t) = \exp(-ct^2/(2\sigma_1))(b - ct/\sigma_1), \quad \int_0^{\sigma_1} X_t\,dt = c\sigma_1/2, \quad \tau_1 = b\,\sigma_1/c.$$

Полагая распределение величины σ_1 экспоненциальным с параметром λ, получаем

$$H_{\tau_1} = (b/\sqrt{2\lambda c})\ \arctan(b/\sqrt{2\lambda c}).$$

Уравнение (28) перепишется в виде $M = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}(A(x,M))^+\,dt$, где

$$A(x,M) = \int_{bx/c}^{x} e^{-ct^2/2x}(b - ct/x)\,dt + e^{-cx/2}((b/\sqrt{2\lambda c})\ \arctan(b/\sqrt{2\lambda c}) + M).$$

Делая замену переменных, получаем

$$A(x,M) = e^{-cx/2}\left(-cx\int_{b/c}^{1} e^{cx(1-u^2)}(u - b/c)\,du + (b/\sqrt{2\lambda c})\ \arctan(b/\sqrt{2\lambda c}) + M\right).$$

Выражение, стоящее в скобках, монотонно убывает по x от положительных значений к отрицательным. Поэтому уравнение (28) можно переписать в виде

$$M = \max_m \int_0^m \lambda e^{-\lambda x} A(x,M)\,dx,$$

что удобно в вычислительном отношении. При параметрах $c = 1$ и $\lambda = 1/2$ с помощью компьютера получены следующие приближенные значения H_{τ_1} и решения уравнения (28) для трех значений b:

b	H_{τ_1}	M
0.5	0.23	0.1
0.8	0.54	0.5
0.9	0.66	0.67

Таким образом, например, при $b = 0.9$, достигая в момент t очередной раз уровень 0.9, следует проверить текущее значение выражения

$$0.67 + 0.66 - \sigma \int_{0.9}^{1} e^{\sigma(1-u^2)/2}(u - 0.9)\, du,$$

где $\sigma = \tau/(0.9)$ и $\tau = t - \sigma_{N_t}$ (время до начала текущего интервала). Если это выражение отрицательно, то следует остановиться; если положительно, – перейти к следующему локальному моменту первого выхода за уровень 0.9. Это и есть оптимальная марковская стратегия – смесь простых локальных моментов первого выхода за данный уровень.

Литература

1. В. Ф. Зайцев, А. Д Полянин, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.* М., Физматлит, 2001.
2. С. С. Расова. *Выбор момента начала страхования при немонотонной деградации.* — Вестник СПбГУ **4** (2007), 83–95.
3. Б. П. Харламов *Оптимальный режим обслуживания системы с наблюдаемой опасностью отказов.* — Автоматика и телемеханика, Наука, М. (1998), 117–134.
4. Б. П. Харламов, *Непрерывные полумарковские процессы.* СПб: Наука, 2001.
5. Б. П. Харламов, *О выборе момента начала страхования.* — Автоматика и телемеханика **7**, 2003, 134–142.
6. Б. П. Харламов, *Обращенный процесс с независимыми положительными приращениями: конечномерные распределения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **311**, 2004, 286–297.
7. B. P. Harlamov, *Optimal prophylaxis policy for systems with partly observable parameters.* — In: Statistical and Probabilistic Models in Reliability (V. Ionescu, N. Limnios. eds). Birkhauser Boston (1999), pp. 265–278.

Rasova S. S., Harlamov B. P. Optimal local first exit time.

A random process and the corresponding class of so called local first exit times are considered. For a special functional depending on Markov times the problem to find the optimal one is investigated. A description of the class is obtained. For diffusion Markov processes the folowing alternative is proved: either the global first exit time is optimal (trivial case), or in the given class there are no optimal Markov times. For a non-Markov piecewise increasing process a non-trivial example of the local first exit time is constructed. An application of the problem to insurance is discussed.

Институт проблем
машиноведения РАН

E-mail: harlamov@random.ipme.ru

Поступило 12 ноября 2007 г.