Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 361, 2008 г.

В. В. Петров

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СУММ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Мы рассматриваем последовательность неотрицательных случайных величин $\{X_n\}$ с конечными дисперсиями и исследуем условия, достаточные для соотношения

$$S_n/ES_n \to 1 \quad \text{п.н.}, \tag{1}$$

где $S_n = X_1+X_2+\cdots+X_n$. Результаты этого типа будем называть теоремами о (сильной) устойчивости сумм случайных величин. Слабая устойчивость сумм неотрицательных независимых случайных величин, соответствующая соотношению (1) с заменой сходимости почти наверное сходимостью по вероятности, исследована в книге Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогорова [1]. Некоторые достаточные условия для соотношения (1) получены Этемади [2].

Следуя [3, гл. 9], будем использовать обозначение Ψ_c для множества функций $\psi(x)$ таких, что каждая $\psi(x)$ положительна и не убывает в области $x > x_0$ при некотором x_0 и ряд $\Sigma\, 1/(n\psi(n))$ сходится. Здесь $\Sigma f(n)$ означает суммирование по всем целым положительным n, для которых значения $f(n)$ определены и неотрицательны. Значение x_0 не предполагается одним и тем же для различных функций ψ. Если в этом определении мы заменим слово “сходится” словом “расходится”, то мы получим определение класса функций Ψ_d. Примерами функций класса Ψ_c являются функции x^p и $(\log x)^{1+p}$ при любом $p > 0$. Функции $\log x$ и $\log\log x$ принадлежат классу Ψ_d.

Теорема 1. *Пусть $\{X_n\}$ – последовательность неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями. Пусть выполнены условия*

$$ES_n \to \infty, \quad EX_n/ES_n \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{2}$$

$$\operatorname{Var} S_n = O((ES_n)^2/\psi(ES_n)) \quad \textit{для некоторой функции} \quad \psi \in \Psi_c. \tag{3}$$

Работа поддержана грантом РФФИ 07-01-00688 и грантом НШ-638.2008.1 .

Тогда имеет место соотношение (1).

Заметим, что условие (3) выполнено, если $\operatorname{Var} S_n = O((ES_n)^p)$ при некотором $p < 2$, а также в случае выполнения более слабого условия $\operatorname{Var} S_n = O((ES_n)^2/(\log ES_n)^q))$ при некотором $q > 1$.

Мы получим теорему 1 как следствие более общего результата об усиленном законе больших чисел для сумм взвешенных неотрицательных случайных величин.

Теорема 2. . *Пусть* $\{X_n\}$ – *последовательность неотрицательных случайных величин с конечными дисперсиями,* $\{w_n\}$ – *последовательность положительных чисел. Положим*

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} w_k X_k, \quad W_n = \sum_{k=1}^{n} w_k.$$

Пусть выполнены условия

$$W_n \to \infty, \quad w_n/W_n \to 0 \quad (n \to \infty), \tag{4}$$

$$\sum_{k=m}^{n} w_k \, EX_k \leqslant C \sum_{k=m}^{n} w_k \tag{5}$$

для всех достаточно больших $n - m$, *где* C – *постоянная,*

$$\operatorname{Var} T_n = O(W_n^2/\psi(W_n)) \quad \text{для некоторой функции} \quad \psi \in \Psi_c. \tag{6}$$

Тогда

$$(T_n - ET_n)/W_n \to 0 \ \text{ п.н.} \tag{7}$$

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится следующее предложение.

Лемма. *Если* $\psi(x) \in \Psi_c$, *то ряд* $\Sigma 1/\psi(b^n)$ *сходится для любого* $b > 1$.

Доказательство этой леммы можно найти, например, в [4].

Пусть $b > 1$. Положим $k_n = \inf\{k : W_k \geqslant b^n\}$. Справедливы неравенства $b^n \leqslant W_{k_n} < b^{n+1}$,

$$W_{k_{n+1}}/W_{k_n} < b^2. \tag{8}$$

По неравенству Чебышева имеем

$$P\big(\big|T_{k_n} - ET_{k_n}\big| \geqslant \varepsilon W_{k_n}\big) \leqslant \varepsilon^{-2} \operatorname{Var} T_{k_n}/W_{k_n}^2$$

для любого $\varepsilon > 0$. В силу условия (6) и леммы получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\left|T_{k_n} - ET_{k_n}\right| \geqslant \varepsilon W_{k_n}\right) \leqslant C\varepsilon^{-2} \sum_{n=1}^{\infty} 1/\psi(W_{k_n}) < \infty,$$

где C – постоянная. Согласно лемме Бореля–Кантелли, отсюда следует равенство

$$P\left(\left|T_{k_n} - ET_{k_n}\right| \geqslant \varepsilon W_{k_n} \text{ i.o.}\right) = 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0.$$

Поэтому

$$\left(T_{k_n} - ET_{k_n}\right)/W_{k_n} \to 0 \ \text{ п.н.} \tag{9}$$

Если $k_n \leqslant k < k_{n+1}$, то в силу неотрицательности исходных случайных величин имеем

$$\frac{T_k - ET_k}{W_k} \leqslant \frac{|T_{k_{n+1}} - ET_{k_{n+1}}|}{W_{k_{n+1}}} \cdot \frac{W_{k_{n+1}}}{W_{k_n}} + \frac{ET_{k_{n+1}} - ET_{k_n}}{W_{k_n}}. \tag{10}$$

Первое слагаемое в правой части (10) сходится к нулю почти наверное вследствие (8) и (9). Второе слагаемое не превосходит $C(W_{k_{n+1}} - W_{k_n})/W_{k_n} \leqslant C(b^2 - 1)$ в силу (5) и (8).

Имеют место аналогичные оценки снизу для левой части (10) (вывод этих оценок такой же, как в доказательстве теоремы 1 из [4]). Отсюда заключаем, что

$$\limsup_{k\to\infty} |T_k - ET_k|/W_k \leqslant C(b^2 - 1) \quad \text{п.н}$$

Правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой за счет выбора числа b достаточно близким к 1. Отсюда следует соотношение (7).

Отметим еще одно следствие теоремы 2 (доказанное ранее в [4]): если последовательность неотрицательных случайных величин $\{X_n\}$ удовлетворяет условиям $E(S_n - S_m) \leqslant C(n - m)$ для всех достаточно больших $n - m$,

$$\operatorname{Var} S_n = O(n^2/\psi(n)) \quad \text{для некоторой функции} \quad \psi \in \Psi_c,$$

то $(S_n - ES_n)/n \to 0$ п.н. Этот результат немедленно следует из теоремы 2 при $w_n = 1$ для всех n.

Завершим теперь доказательство теоремы 1. Как и в [2], введем последовательность случайных величин $\{Y_n\}$, где $Y_n = X_n/EX_n$, считая без ограничения общности, что $EX_n > 0$ для всех n. Положим $w_n = EX_n$. Эти последовательности удовлетворяют условиям теоремы 2, при этом $T_n = S_n$, $W_n = ES_n$. Поэтому из (7) следует (1).

Теорема 1 приобретает особый интерес, если заметить, что она перестает быть верной при замене условия (3) более слабым условием

$$\operatorname{Var} S_n = O((ES_n)^2/\psi(ES_n)) \quad \text{для некоторой функции} \quad \psi \in \Psi_d, \tag{11}$$

так что условие

$$\operatorname{Var} S_n = O((ES_n)^2) \quad \text{или даже} \quad \operatorname{Var} S_n = O((ES_n)^2/\log ES_n)$$

вместе с условием (2) не гарантируют выполнение соотношения (1).

Теорема 3. *Для любой функции $\psi \in \Psi_d$ такой, что $\psi(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и $n/\psi(n)$ не убывает в области $n > n_0$ при некотором n_0, существует последовательность неотрицательных попарно независимых случайных величин с двумя значениями, для которой выполнены условия (2) и $\operatorname{Var} S_n = O((ES_n)^2/\psi(ES_n))$, но соотношение (1) не имеет места.*

Доказательство. Пусть функция $\psi(x)$ обладает указанными свойствами. Пусть целое число N таково, что $N > n_0$, $\psi(N) > 3$. Пусть $\{X_n\}$ – последовательность попарно независимых случайных величин, такая, что случайная величина X_n при $n \leqslant N$ и при четном $n > N$ имеет значения 0 и 2 с вероятностью 1/2 для каждого, а при нечетном $n > N$ – значения 0 с вероятностью $1 - 1/(n\psi(n))$ и n с вероятностью $1/(n\psi(n))$. Справедливы равенства

$$EX_n = 1 \ \text{ и } \ EX_n^2 = 2, \quad \text{если} \ \ n \leqslant N \ \ \text{или если} \ \ n \ \ \text{четное}, \ n > N,$$

$$EX_n = 1/\psi(n) \ \text{ и } \ EX_n^2 = n/\psi(n), \quad \text{если} \ \ n \ \ \text{нечетное} \ , \ n > N.$$

Поэтому при $n > N$ получаем

$$ES_n = N + \Sigma' \, 1/\psi(k) + [(n - N + 1)/2],$$

где Σ' означает суммирование по нечетным k, удовлетворяющим условию $N < k \leqslant n$,

$$\begin{aligned}\operatorname{Var} S_n = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var} X_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} EX_k^2 &\leqslant 2N + (n - N + 1) + \Sigma' k/\psi(k) \\ &\leqslant n + N + 1 + n(n - N)/\psi(n) \leqslant Cn^2/\psi(n).\end{aligned}$$

При этом мы использовали условие неубывания функции $n/\psi(n)$. Далее,

$$n/3 < ES_n < n \tag{12}$$

для всех достаточно больших n, так что $n^2/\psi(n) \leqslant 9(ES_n)^2/\psi(ES_n)$ и, следовательно, $\operatorname{Var} S_n = O((ES_n)^2/\psi(ES_n))$. Условие (2) выполнено очевидным образом. Покажем, что соотношение (1) не выполнено.

Если бы (1) было выполнено, то $(S_n - ES_n)/ES_n \to 0$ п.н. Используя (12) и равенство $S_n = S_{n-1} + X_n$, получаем $(X_n - EX_n)/n \to 0$ п.н. Отсюда следует соотношение $X_n/n \to 0$ п.н., которое противоречит равенству $P(X_n = n \text{ i.o.}) = 1$, вытекающему из условия $\psi \in \Psi_d$, равенств

$$\Sigma P(X_n = n) = \Sigma\, 1/(n\psi(n)) = \infty$$

и леммы Бореля–Кантелли.

Литература

1. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров, *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* Гостехтеоретиздат, Москва–Ленинград, 1949.
2. N. Etemadi, *Stability of sums of weighted nonnegative random variables.* — J. Multivariate Analysis **13** (1983), 361–365.
3. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, Москва, 1972.
4. В. В. Петров, *Об усиленном законе больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **53**, No. 2 (2008), 379–382.

Petrov V. V. On stability of sums of nonnegative random variables.

We present sufficient conditions for stability of sums of nonnegative random variables having finite moments of the second order. We demonstrate that these conditions are nonimprovable in some sense.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: valentin@VP15136.spb.edu

Поступило 16 ноября 2008 г.