Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 361, 2008 г.

Я. Ю. Никитин, П. П. Спорышева

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ЭФФЕКТИВНОСТИ КРИТЕРИЕВ СОГЛАСИЯ, ОСНОВАННЫХ НА ЭМПИРИЧЕСКОМ ПРОЦЕССЕ ДЕОВЕЛЬСА

1. Введение

Существует множество свободных от распределения критериев согласия, основанных на разности эмпирической функции распределения (ф.р.) F_n и непрерывной теоретической ф.р. F_0. Классическими примерами могут служить критерии Колмогорова–Смирнова и Крамера-фон Мизеса–Смирнова, а также более поздние критерии, предлагавшиеся Андерсоном и Дарлингом, Ватсоном, Реньи, Хмаладзе и другими. Большинство их описано в [8] и [10]. Предельная теория этих критериев основана на том хорошо известном факте [3], что эмпирический процесс $\xi_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F_0(t))$, $t \in R^1$, слабо сходится в пространстве Скорохода $D(R^1)$ к процессу $B(F_0(t))$, где B – стандартный броуновский мост на $[0,1]$. Распределение функционалов от броуновского моста хорошо изучено [8, 4], что позволяет найти критические значения для рассматриваемых статистик.

Недавно П. Деовельс [5] обнаружил неожиданное совпадение по распределению на $[0,1]$ двух гауссовских процессов

$$B(t) \overset{d}{=} B(t) - 12t(1-t)\int_0^1 B(u)du. \tag{1}$$

Отсюда вытекает, что модифицированный эмпирический процесс (мы будем называть его процессом Деовельса)

$$\widetilde{\xi}_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F_0(t) - 12F_0(t)(1-F_0(t))J(F_n, F_0)) \tag{2}$$

слабо сходится в указанном смысле к предельному процессу, имеющему то же распределение, что и $B(F_0(t))$. Здесь и в дальнейшем для любых ф.р. G и F мы обозначаем $J(G,F) := \int_{-\infty}^{\infty} (G(u) - F(u))dF(u)$.

Работа поддержана грантами РФФИ 06-01-00179 и 07-01-00159 и грантом научной школы 638.2008.1 .

Различные функционалы от процесса Деовельса могут служить новыми свободными от распределения статистиками для проверки согласия, возможно, более эффективными, чем классические. При этом их предельные распределения совпадают с распределениями соответствующих функционалов от броуновского моста, что очень удобно.

Мы построим аналоги известных статистик, опишем для них вероятности больших уклонений, найдем главные части локальных наклонов по Бахадуру, вычислим бахадуровскую эффективность для конкретных альтернатив. В заключение мы укажем условия, при которых аналог статистики Колмогорова локально оптимален.

2. Построение новых статистик

Пусть $X_1, X_2, \dots, X_n$ – выборка с непрерывной ф.р. F, F_n – эмпирическая ф.р., построенная по этой выборке. Рассматривается проверка гипотезы согласия $H_0 : F = F_0$, где F_0 – некоторая известная непрерывная ф.р., против альтернативы общего вида $A_0 : F \neq F_0$.

Представляется интересным рассмотреть модификации известных статистик, основанные не на классическом эмпирическом процессе $\sqrt{n}(F_n(t) - F_0(t))$, а на процессе Деовельса (2), который, как отмечалось во введении, слабо сходится к процессу $B(F_0(t))$.

Введем новые статистики. Аналог статистики Колмогорова имеет вид

$$\widetilde{D}_n = \sup_{-\infty<t<\infty} |F_n(t) - F_0(t) - 12F_0(t)(1 - F_0(t))J(F_n, F_0)|,$$

односторонние статистики Смирнова $\widetilde{D}_n^+$ и $\widetilde{D}_n^-$ вводятся аналогично. Аналог статистики Ватсона–Дарлинга выглядит так:

$$\widetilde{G}_n = \sup_{-\infty<t<\infty} \Big|F_n(t) - F_0(t) - 12F_0(t)(1 - F_0(t))J(F_n, F_0) - \int_{-\infty}^{\infty} (F_n(s) - F_0(s) - 12F_0(s)(1 - F_0(s))J(F_n, F_0))dF_0(s)\Big|.$$

Односторонние статистики $\widetilde{G}_n^+$ и $\widetilde{G}_n^-$ вводятся сходным образом. Рассмотрим также интегральные статистики, в частности, аналог статистики Крамера-фон Мизеса–Смирнова ω_n^2:

$$\widetilde{\omega}_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Big(F_n(t) - F_0(t) - 12F_0(t)(1 - F_0(t))J(F_n, F_0)\Big)^2 dF_0(t),$$

и аналог статистики Ватсона U_n^2:

$$\widetilde{U}_n^2 = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Big(F_n(t) - F_0(t) - 12F_0(t)(1-F_0(t))J(F_n, F_0)$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{\infty} (F_n(s) - F_0(s) - 12F_0(s)(1-F_0(s))J(F_n, F_0)) \Big)^2 dF_0(t).$$

Формулы для вычисления новых статистик по выборке $X_1, \ldots, X_n$ несколько отличаются от классических и являются более громоздкими. Мы приведем для примера простейшую формулу - формулу для статистики $\widetilde{D}_n^+$. Пусть $X_{(k)}$ - k-я порядковая статистика исходной выборки, $Y_k = F_0(X_k)$, $\bar{Y} = n^{-1}\sum_{k=1}^n Y_k$, $Y_{(k)} = F_0(X_{(k)})$. Тогда

$$\widetilde{D}_n^+ = \max_{1\le k\le n} (\frac{k}{n} - 12Y_{(k)}(1-Y_{(k)})\bar{Y} + 6Y_{(k)}^2 - 7Y_{(k)}).$$

3. Большие уклонения

Качество новых статистик будем измерять на основе понятия асимптотической эффективности по Бахадуру [2]. Другие виды эффективности в этой задаче не помогают: питменовская эффективность требует асимптотической нормальности, а эффективность по Ходжесу-Леману слишком груба и не различает двусторонние статистики [10].

За определением и основными свойствами бахадуровской эффективности последовательности статистик $\{T_n\}$ мы отсылаем читателя к [2] и [10]. Мерой бахадуровской эффективности является точный наклон $c_T(\theta)$ - неслучайная положительная функция параметра θ, описывающего альтернативу. Способ вычисления точных наклонов содержится в [2], §7 и [10], гл. I. Он опирается на асимптотику больших уклонений изучаемой последовательности статистик при H_0.

Новые статистики не слишком сильно отличаются от классических, и для описания их больших уклонений применимы методы, описанные в [10]. После ряда вычислений получаем следующую теорему

Теорема 3.1. *При справедливости H_0 и $a \in (0,1)$ имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln \mathbf{P}(\widetilde{D}_n \ge a) = -g_{\widetilde{D}}(a),$$

где функция $g_{\widetilde{D}}$ *непрерывна, причем* $g_{\widetilde{D}}(a) \sim 2a^2, a \to 0$.

Аналогичные формулы справедливы для статистик $\widetilde{D}_n^+$, $\widetilde{D}_n^-$, $\widetilde{G}_n$, $\widetilde{G}_n^+$, $\widetilde{G}_n^-$, $\widetilde{\omega}_n^2$ *и* $\widetilde{U}_n^2$ *с непрерывными функциями* $g_{\widetilde{D}^+}$, $g_{\widetilde{D}^-}$, $g_{\widetilde{G}}$, $g_{\widetilde{G}^+}$, $g_{\widetilde{G}^-}$, $g_{\widetilde{\omega}^2}$ *и* $g_{\widetilde{U}^2}$, *причем при* $a \to 0$

$$g_{\widetilde{D}^+}(a) \sim 2a^2, \quad g_{\widetilde{D}^-}(a) \sim 2a^2, \quad g_{\widetilde{G}}(a) \sim 6a^2, \quad g_{\widetilde{G}^+}(a) \sim 6a^2,$$
$$g_{\widetilde{G}^-}(a) \sim 6a^2, \quad g_{\widetilde{\omega}^2}(a) \sim \frac{1}{2}\pi^2 a, \quad g_{\widetilde{U}^2}(a) \sim 2\pi^2 a.$$

4. Локальные точные наклоны

Будем считать, что истинная ф.р. выборки F_0 имеет плотность f_0, а альтернативная функция распределения $\theta(x)$ определяется плотностью $f(x,\theta), \theta \geq 0$, причем $f(x,0) = f_0(x)$. Используя теорему Гливенко–Кантелли и результаты из [10], мы получаем следующие выражения для локальных точных наклонов, т.е. главных частей точных наклонов при $\theta \to 0$:

$$c_{\widetilde{D}}(\theta) \sim 4\Big(\sup_t |\theta(t) - F_0(t) - 12F_0(t)(1 - F_0(t))J(\theta, F_0)|\Big)^2,$$
$$c_{\widetilde{G}}(\theta) \sim 12\Big(\sup_t \Big|\theta(t) - F_0(t) - 12F_0(t)(1 - F_0(t))J(\theta, F_0)$$
$$- \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\theta(s) - F_0(s) - 12F_0(s)(1 - F_0(s))J(\theta, F_0)\Big)dF_0(s)\Big|\Big)^2,$$
$$c_{\widetilde{\omega}^2}(\theta) \sim \pi^2\Big[\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\theta(t) - F_0(t) - 12F_0(t)(1 - F_0(t))J(\theta, F_0)\Big)^2 dF_0(t)\Big],$$
$$c_{\widetilde{U}^2}(\theta) \sim 4\pi^2\Big[\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\theta(t) - F_0(t) - 12F_0(t)(1 - F_0(t))J(\theta, F_0)$$
$$- \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\theta(s) - F_0(s) - 12F_0(s)(1 - F_0(s))J(\theta, F_0)\Big)dF_0(s)\Big)^2 dF_0(t)\Big].$$

Согласно неравенству Бахадура–Рагавачари [7], для любых последовательностей тестовых статистик $\{T_n\}$

$$c_T(\theta) \leq 2K(\theta) = 2\int \ln\frac{f(x,\theta)}{f_0(x)} f(x,\theta)dx. \tag{3}$$

Локальная асимптотическая эффективность по Бахадуру последовательности статистик $\{T_n\}$ определяется тогда следующим образом:

$$\boldsymbol{e}_T^{B,\,\mathrm{loc}} = \lim_{\theta\to 0}\frac{c_T(\theta)}{2K(\theta)}.$$

Рассмотрим конкретные альтернативы: альтернативу сдвига и скошенную альтернативу, и вычислим эффективность новых статистик, рассматривая в качестве распределения выборки гауссовское, логистическое, лапласовское распределения, а также закон Коши.

4.1. Альтернатива сдвига.

Для статистики $\widetilde{D}_n$ в гауссовском случае, т.е. при $F_0(x) = \Phi(x)$, $\theta(x) = \Phi(x+\theta)$, получаем при $\theta \to 0$

$$\begin{aligned} c_{\widetilde{D}}(\theta) &\sim 4\sup_x \mid \varphi(x) - 12\Phi(x)(1-\Phi(x))\int_{-\infty}^{\infty}\varphi^2(y)dy \mid^2 \theta^2 \\ &= 4\theta^2\sup_x \mid \varphi(x) - \frac{6}{\sqrt{\pi}}\Phi(x)(1-\Phi(x)) \mid^2 := 4\theta^2\sup_x \mid k(x) \mid^2 . \end{aligned}$$

Рассмотрим производную $k'(x) = \frac{6}{\sqrt{\pi}}\varphi(x)(2\Phi(x) - 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{6}x)$. Ясно, что эта функция обращается в нуль при $x = 0$, а два других нуля лежат вблизи точек $\pm 6/\sqrt{\pi}$. Отсюда следует, что максимум функции $4\sup_x \mid k(x) \mid^2$ достигается в нуле и равен $(3-\sqrt{2})^2/\pi \approx 0.800$.

Сходным образом убеждаемся в том, что для статистики $\widetilde{D}_n^+$ супремум равен нулю, так что эта статистика в данном случае несостоятельна. Получаем при $\theta \to 0$: $c_{\widetilde{D}}(\theta) \sim c_{\widetilde{D}^-}(\theta) \sim 0.800\ \theta^2$. Аналогично находим результаты для остальных рассматриваемых нами статистик и распределений, что позволяет составить таблицу локальных эффективностей для рассмотренных нами новых и классических статистик.

Статистики	Распределения			
	Гауссовское	Логистическое	Коши	Лапласа
$\widetilde{D}_n, \widetilde{D}_n^-$	0.800	0.750	0.318	0.444
$\widetilde{G}_n, \widetilde{G}_n^-$	0.955	1.000	0.608	0.750
$\widetilde{\omega}^2$	0.984	0.987	0.542	0.699
$\widetilde{U}^2$	0.794	0.687	0.168	0.329
D_n	0.637	0.750	0.814	1.000
G_n	0.955	1.000	0.608	0.750
ω^2	0.911	0.987	0.760	0.261
U^2	0.490	0.660	1.000	0.206

Таблица 1. Локальные эффективности при альтернативе сдвига.

Данные для классических статистик были взяты из [10]. Из таблицы мы видим, что новые статистики порой лучше прежних: например, для гауссовского распределения новые статистики показывают лучшие результаты, чем классические, а эффективность $\widetilde{\omega}^2$ равна 0.984, что является близким к оптимальному значением. В случае логистического распределения изменения несущественны, для распределений Лапласа и Коши эффективность новых статистик в ряде случаев улучшилась, но есть и ухудшения.

4.2. Скошенная альтернатива. Рассмотрим теперь скошенную (skew) альтернативу, см., например, [1]. Пусть F_0 симметричная функция распределения, тогда "скошенная" плотность и ее ф.р. имеют вид

$$h(x,\theta) := 2f_0(x)F_0(x\theta), \quad H(x,\theta) = \int\limits_{-\infty}^{x} 2f_0(u)F_0(u\theta)du, \ \theta \geqslant 0.$$

При широких условиях [6], при $\theta \to 0$

$$H(x,\theta) - F(x) \sim 2\theta f(0) \int\limits_{-\infty}^{x} uf(u)du.$$

Тогда для статистики $\widetilde{D}_n$ в случае гауссовского распределения мы получаем при $\theta \to 0$:

$$c_{\widetilde{D}}(\theta) \sim 4\theta^2 \sup_x \Big| \frac{1}{\pi}\varphi(x) - \frac{6\sqrt{2}}{\pi}\Phi(x)(1-\Phi(x)) \Big|^2 \sim 0.510\,\theta^2.$$

Совершенно аналогично вычисляются главные части точных наклонов для остальных распределений (кроме Коши) и остальных статистик. Составим таблицу локальных индексов для сравнения новых статистик в случае скошенной альтернативы.

Статистики	Распределения		
	Гауссовское	Логистическое	Лапласа
$\widetilde{D}_n, \widetilde{D}_n^+$	0.801	0.792	0.781
$\widetilde{G}_n, \widetilde{G}_n^-$	0.953	0.912	0.844
$\widetilde{\omega}^2$	0.983	0.955	0.908
$\widetilde{U}^2$	0.794	0.821	0.855
D_n	0.637	0.584	0.500
G_n	0.953	0.912	0.844
ω^2	0.907	0.854	0.776
U^2	0.485	0.420	0.331

Таблица 2. Локальные эффективности при скошенной альтернативе.

Как видно из таблицы 2, новые статистики почти везде лучше или, по крайней мере, не хуже прежних. Эффективность статистики $\widetilde{\omega}^2$ высока и близка к оптимальной для рассмотренных распределений.

5. Локальная оптимальность

При вычислении асимптотической эффективности обычно возникает вопрос [10, гл. 6]: для каких распределений построенные новые статистики будут локально оптимальными? Здесь мы дадим ответ для статистики типа Колмогорова $\widetilde{D}_n$.

Вернемся к неравенству Бахадура–Рагавачари (3). Пусть альтернативная ф.р. $G(x;\theta)$ и альтернативная плотность $g(x;\theta)$ принадлежат некоторому функциональному классу $\mathfrak{G}$, определяемому общими априорными условиями из [10, гл. 6]. Множество тех семейств из $\mathfrak{G}$, для которых выполняется условие локальной асимптотической оптимальности (ЛАО) по Бахадуру:

$$c_T(\theta) \sim 2K(\theta), \theta \to 0, \tag{4}$$

будем называть областью ЛАО последовательности статистик $\{T_n\}$ в $\mathfrak{G}$. Нас интересует описание области ЛАО в классе $\mathfrak{G}$ для построенных нами новых статистик Колмогорова–Смирнова.

Пусть V – некоторое множество вещественных функций на отрезке $[0,1]$. Будем называть V ведущим множеством для заданной последовательности $\{T_n\}$ в $\mathfrak{G}$, если условие ЛАО (4) имеет место в том и только том случае, когда

$$G'_\theta(G^{-1}(x;0);0) \in V.$$

Элементы множества V будем называть ведущими функциями. Область ЛАО данной последовательности $\{T_n\}$ состоит из тех и только тех семейств $\{G(x;\theta)\}$, для которых

$$G(x;\theta) = G(x;0) + \upsilon(G(x;0))\theta + o(\theta)$$

при $\theta \to 0$ и $\upsilon \in V$. Если характер зависимости семейства $\{G(x;\theta)\}$ от параметра θ известен, то, решая дифференциальное уравнение вида

$$G'_\theta(x;0) = \upsilon\Big(G(x;0)\Big), \upsilon \in V,$$

получим те ф.р. $G(x;0)$, для которых $\{T_n\}$ является ЛАО.

Теорема 5.1. *Ведущее множество для последовательности* $\{\widetilde{D}_n\}$ *в* $\mathfrak{G}$ *имеет вид*

$$V(\widetilde{D}) = C\{(2\min(t,1-t) - 3(\min(t,1-t))^2\}, C \in \mathbb{R}^1.$$

Доказательство. Из результатов предыдущих параграфов следует, что локальный точный наклон последовательности $\{\widetilde{D}_n\}$ имеет вид:

$$c_{\widetilde{D}}(\theta) \sim 4\Big(\sup_x |G'_\theta(x;0) - 12G(x;0)(1-G(x;0))\int G'_\theta(y;0)dG(y;0)|\Big)^2\theta^2.$$

Ввиду положительности плотности $g(x;0)$ для элементов $\mathfrak{G}$ существует непрерывная и строго монотонная функция $G^{-1}(x;0)$, обратная к $G(x;0)$. Сделаем замену $\psi(x) = G'_\theta(G^{-1}(x;0);0)$ и получим при $\theta \to 0$

$$c_{\widetilde{D}}(\theta) \sim 4 \sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} (\psi(u) - 12u(1-u) \int\limits_0^1 \psi(s)ds)^2 \theta^2,$$

$$2K(\theta) \sim \theta^2 \int\limits_0^1 {\psi'}^2(u)du,$$

причем выполняются краевые условия $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Таким образом, осталось выяснить, когда в неравенстве

$$4 \sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} (\psi(u) - 12u(1-u) \int\limits_0^1 \psi(s)ds)^2 \leqslant \int\limits_0^1 {\psi'}^2(u)du, \tag{5}$$

вытекающем из (3), достигается равенство. Для этого зафиксируем $s \in [0,1]$ и будем искать такие абсолютно непрерывные функции ψ, удовлетворяющие краевым условиям, которые максимизируют функцию $\psi(s) - 12s(1-s)\int\limits_0^1 \psi(u)du$ при условии $\int\limits_0^1 {\psi'}^2(u)du = 1$. Используя представление $\psi(s) = \int\limits_0^1 \chi_{[0,s]}(u)\psi'(u)du$ и применяя принцип Эйлера-Лагранжа, получим краевую задачу для экстремалей:

$$\psi'(t) = \mu_1(\chi_{[0,s]}(t) + 12s(1-s)t) + \mu_2, \quad \psi(0) = \psi(1) = 0,$$

откуда выводим

$$\psi(t) = \begin{cases} (\mu_1 + \mu_2)t + 6\mu_1 s(1-s)t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant s, \\ \mu_2 t + 6\mu_1 s(1-s)t^2 - \mu_2 - 6\mu_1 s(1-s), s \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}.$$

Учитывая непрерывность экстремали в точке s и условие нормировки, находим, что для некоторой константы C

$$\psi(t) = C \begin{cases} 6\sqrt{s(1-s)}t^2 - (6s-1)\sqrt{\frac{1-s}{s}}t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant s, \\ 6\sqrt{s(1-s)}t^2 + (6s-7)\sqrt{\frac{s}{1-s}}t + \sqrt{\frac{s}{1-s}}, s \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Заметим, что для этой функции $\psi(t)$ в неравенстве (5) достигается равенство только при $s = \frac{1}{2}$. Отсюда следует заключение теоремы.

Для классической статистики Колмогорова ведущая функция есть $C\min(t, 1-t)$ [10].

Знание ведущего множества последовательности статистик позволяет явно описать соответствующую область ЛАО для конкретных альтернатив. Рассмотрим в качестве примера семейства с параметром сдвига. Пусть $G(x;\theta) = G(x+\theta), x \in \mathbb{R}^1$. Ф.р. G из области ЛАО могут быть найдены из дифференциального уравнения в ф.р.

$$G' = \upsilon(G), \upsilon \in V.$$

Используя найденные ранее представления для ведущих множеств, мы можем получить описание области ЛАО статистики $\widetilde{D}_n$. Эта область состоит из ф.р. вида $G\left(\frac{x-\gamma}{\sigma}\right), x, \gamma \in \mathbb{R}^1, \sigma > 0$, но мы укажем лишь соответствующую плотность $g(x)$.

Теорема 5.2. *При альтернативе сдвига последовательность* $\{\widetilde{D}_n\}$ *является ЛАО лишь для распределений с плотностью* $g^*(x) = \frac{2e^{|x|}}{(3+e^{|x|})^2}$.

Доказательство. Из теоремы 5.1 следует, что нам нужно проинтегрировать в ф.р. уравнение

$$G' = C(2\min(G, 1-G) - 3(\min(G, 1-G))^2), C > 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение, мы получаем (с точностью до сдвига и масштаба) распределение с плотностью

$$g^*(x) = \frac{2e^{|x|}}{(3+e^{|x|})^2}.$$

На рисунке 1 построен график найденной бимодальной плотности.

Для сравнения заметим, что для классической статистики Колмогорова в роли плотности g^* выступает плотность Лапласа.

6. Заключение

Итак, мы построили новый класс статистик, которые могут конкурировать со своими классическими аналогами. Из таблиц 1 и 2 видно,

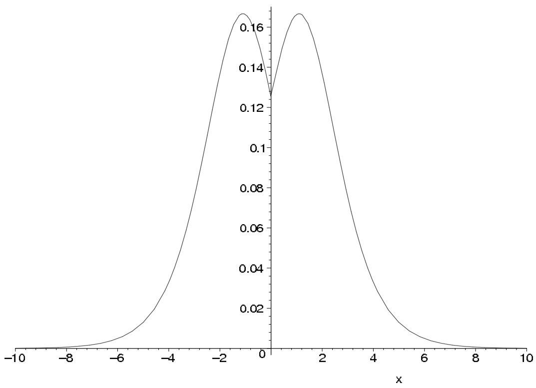

Рис. 1. График плотности $g^*(x)$.

что эффективность по Бахадуру новых статистик часто лучше, чем у прежних статистик.

Тождество Деовельса (1) допускает ряд обобщений. Пусть $q(t)$ – суммируемый вес на $[0,1]$, положим

$$m(t)=\int_0^1(\min(t,s)-ts)q(s)ds,\ \kappa=\int_0^1 m(t)q(t)dt.$$

Тогда легко проверяется равенство по распределению

$$B(t)\stackrel{d}{=}B(t)-2\kappa^{-1}m(t)\int_0^1 B(u)q(u)du. \qquad (6)$$

При $q(t)=1$ получаем $m(t)=\frac{1}{2}t(1-t),\kappa=\frac{1}{12}$, что эквивалентно (1). Более общее семейство преобразований рассматривается в [9].

Представляет интерес изучение взвешенных эмпирических процессов, отвечающих правой части равенства (6), и изучение эффективности соответствующих статистик для проверки согласия.

Литература

1. A. Azzalini, *A class of distributions which includes the normal ones.* — Scand. J. Stat., **12** (1985), 171–178.
2. R. R. Bahadur, *Some limit theorems in statistics.* SIAM, Philadelphia, 1971.

3. P. Billingsley, *Convergence of probability measures.* Wiley, 1968.
4. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian motion: Facts and formulae.* 2nd ed. Basel, Birkhauser, 2002.
5. P. Deheuvels *A Karhunen-Loève expansion for a mean-centered Brownian bridge.* — Statistics and Probability Letters, **77** (2007), 1190–1200.
6. A. Durio, Ya. Yu. Nikitin, *Local Bahadur efficiency of some goodness-of-fit tests under skew alternatives.* — Journ. Statist. Plann. and Infer., **115** (2003), No. 1, 171–179.
7. M. Raghavachari, *On a theorem of Bahadur on the rate of convergence of test statistics.* — Ann. Math. Stat., **41** (1970), No. 4, 1695–1699.
8. G. R. Shorack, J. A. Wellner, *Empirical Processes with Applications to Statistics.* Wiley, 1986.
9. А. И. Назаров, *Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций.* — SPbMS El. Prepr. Archive, No. 2008-02 (2008). Сдано в печать в журнал Теория вероятн. и ее примен.
10. Y. Nikitin, *Asymptotic efficiency of nonparametric tests.* Cambridge University Press, 1995.

Nikitin Ya. Yu., Sporysheva P. P. On the efficiency of tests of fit based on the Deheuvels' empirical process.

We consider some goodness-of-fit tests which are functionals of the modified empirical process defined in the spirit of the paper [5]. We calculate their Bahadur efficiency for simple alternatives and find the conditions of local optimality for the analogue of Kolmogorov test.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: yanikit47@mail.ru

Поступило 29 ноября 2008 г.