Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 361, 2008 г.

В. А. Егоров

ДВУХСТОРОННИЕ ОЦЕНКИ ПОСТОЯННЫХ В НЕРАВЕНСТВАХ МАРЦИНКЕВИЧА

Оцениванием хвостов распределений сумм независимых случайных величин занимались на протяжении всего развития теории вероятностей. Достаточно отметить классическое неравенство Чебышева, показательные оценки А. Н. Колмогорова [1] и С. Н. Бернштейна [2], работы Хефдинга [3], Беннета [4], неравенства Д. Х. Фука и С. В. Нагаева [5] и работы автора [8–11]. Обширную библиографию на эту тему можно найти, например, в монографиях В. В. Петрова [6, 7]. Одним из эффективных способов оценивания хвостов распределений сумм независимых случайных величин является применение неравенств Марцинкевича или Розенталя с последующим использованием неравенств чебышевского типа. Использование таких оценок с точной асимптотикой постоянных приводит к точным оценкам вероятностей больших уклонений и к вытекающим из них точным сильным оценкам скорости роста сумм независимых случайных величин.

Пусть $\{X_k\}_{k=1}^n-$ независимые случайные величины, такие, что $EX_k = 0, E|X_k|^p < \infty$, $k = 1, 2, \dots , n$, для некоторого $p > 2$.

Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k, \quad T_n = \sum_{k=1}^n X_k^2.$$

Мы будем интересоваться верхними и нижними оценками моментов сумм S_n при $p \to \infty$ и $n \to \infty$.

Используя L^p- нормы ($||X||_p = (E|X|^p)^{1/p}$), классические неравенства Марцинкевича можно записать в виде (см. [6, 7])

$$B(p)\sqrt{||T_n||_{p/2}} \le ||S_n||_p \le C(p)\sqrt{||T_n||_{p/2}}, \tag{1}$$

где $B(p)$, $C(p)$ – положительные постоянные, зависящие только от p.

Работа частично поддержена грантами РФФИ 06-01-00179а и НШ-638.2008.1 .

Другое известное неравенство, неравенство Розенталя, имеет вид (см. [6, 7])

$$||S_n||_p \le L(A_{p,n} + 2^{p^2/4} A_{2,n}^{p/2})^{1/p}, \tag{2}$$

где $L > 0$ – постоянная, $A_{r,n} = \sum_{i=1}^{n} E|X_i|^r$.

Правые части этих неравенств можно было бы успешно использовать для получения оптимальных сильных верхних оценок в предельных теоремах теории вероятностей, если знать асимптотику постоянных $L = L(p)$ и $C(p)$ при $p = p(n) \to \infty$ и оптимальный порядок множителя при $A_{2,n}^{p/2}$.

В работе автора [8] эта асимптотика в случае неравенств Марцинкевича была найдена для независимых симметрично распределенных слагаемых. Была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\{|X_k\}_{k=1}^{n}$ *– независимые симметричные случайные величины,* $E|X_k|^p < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда*

$$||S_n||_p \le C(p)\sqrt{||T_n||_{p/2}}, \quad C(p) = C^{1/p}\sqrt{\frac{p}{e}}, \tag{3}$$

где $C > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Вычисления показывают, что для нормально распределенных слагаемых можно написать такую же оценку для нижнего неравенства Марцинкевича, асимптотически эквивалентную верхней оценке при $p \to \infty$.

Поскольку в этой теореме, кроме симметричности и существования соответствующих моментов, отсутствуют ограничения на слагаемые, мы можем использовать ее для получения оценок для самонормированных сумм этих слагаемых. Так, в [8] получен следующий результат.

Следствие 1.. *Положим* $t_n = \frac{S_n}{\sqrt{T_n}}$. *Тогда в условиях теоремы* 1 *справедливо неравенство*

$$E|t_n|^p \le C\left(\frac{p}{e}\right)^{p/2}, \tag{4}$$

или, что то же самое,

$$||t_n||_p \le C^{1/p}\sqrt{\frac{p}{e}}. \tag{5}$$

Непосредственным следствием этих соотношений является неравенство

$$P(t_n > x) < C \exp\Big\{ -\frac{x^2}{2} \Big\}. \tag{6}$$

Отметим, что правая часть приведенных неравенств не зависит от n и что оценка (6) является неулучшаемой по x, что указывает на оптимальность оценок (3) и (4).

Применение неравенств симметризации не позволяет получить аналогичные следствию результаты для несимметричных центрированных математическими ожиданиями случайных слагаемых. (В лучшем случае удается получить оценки для сумм, центрированных определенными условными математическими ожиданиями (см. [8]).) Более того,как показано в [8], без серьезных дополнительных предположений для несимметричных центрированных математическими ожиданиями случайных слагаемых следствие 1 не справедливо. Что касается теоремы 1, то неравенства симметризации позволяют получить для несимметричных случайных величин аналогичные, но более грубые, верхние оценки.

Действительно, согласно [12, стр. 260],

$$E|S_n - \mu S_n|^p \leq 2E|S_n^s|^p \leq C\Big(\frac{p}{e}\Big)^{p/2} E\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - X_i')^2}\right)^p$$

$$\leq C\left(\frac{p}{e}\right)^{p/2} E\left(\sqrt{\sum_{i=1}^n {X_i}^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n {X_i'}^2}\right)^p \leq C2^p ET_n^{p/2}.$$

Здесь $S_n^s = S_n - S_n'$ – симметризованная величина S_n, а X_n', и S_n' – независимые экземпляры X_n, и S_n' – соответственно.

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$||S_n - \mu S_n||_p \leq C^{1/p} 2\sqrt{\frac{p}{e}}\,\sqrt{||T_n||_{p/2}}.$$

Поскольку $|\mu S_n| \leq \sqrt{2B_n}$, где $B_n = DS_n$, имеем

$$||S_n||_p \leq C^{1/p} 2\sqrt{\frac{p}{e}}\,\sqrt{||T_n||_{p/2}} + \sqrt{2B_n}.$$

Поскольку при $p > 2$ справедливо неравенство $B_n \le ||T_n||_{p/2}$, имеем

$$||S_n||_p \le \left(C^{1/p} 2\sqrt{\frac{p}{e}} + \sqrt{2}\right)\sqrt{||T_n||_{p/2}}.$$

Таким образом, мы получили следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $\{X_k\}_{k=1}^n$ *– независимые случайные величины, центрированные своими математическими ожиданиями. Пусть* $E|X_k|^p < \infty$, $k = 1, 2, \dots, n$. *Тогда*

$$||S_n||_p \le C(p)\sqrt{||T_n||_{p/2}}, \quad C(p) = C^{1/p} 2\sqrt{\frac{p}{e}} + \sqrt{2}, \tag{7}$$

где $C > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Легко видеть, что в этой теореме, увеличив немного постоянную C, можно положить $C(p) = C^{1/p} 2\sqrt{\frac{p}{e}}$. Таким образом, использование симметризации ухудшает оценку в два раза.

С помощью новых комбинаторных методов, при дополнительных предположениях бесконечной малости слагаемых в работе автора [10] были получены аналогичные оценки с асимптотически оптимальными постоянными для несимметричных центрированных математическими ожиданиями случайных величин.

Теорема 3. *Пусть* $\{X_k\}_{k=1}^n$ *– независимые случайные величины,* $EX_k = 0, k = 1, 2, \dots n$. *Пусть* $ES_n^2 = B_n$, $p = p(n) \to \infty$ *и для некоторого* $\epsilon > 0$ *выполнено условие*

$$|X_k| < \epsilon \frac{\sqrt{B_n}}{p}. \tag{8}$$

Тогда

$$||S_n||_p < C(p) e^{\epsilon} \sqrt{\frac{pB_n}{e}}, \tag{9}$$

где $C(p) = C^{1/p} \exp\left(\frac{\ln p}{\sqrt{2p}}\right)$, $C > 0$ *– абсолютная постоянная.*

Отметим, что, поскольку при $p \ge 2$ $B_n = ||T_n||_1 \le ||T_n||_{p/2}$, неравенство (9) можно рассматривать как частный случай как неравенства Марцинкевича, так и неравенства Розенталя.

Отметим также, что при $\epsilon \to 0$ оценка в этой теореме асимптотически эквивалентна оценке теоремы 3.

Целью этой работы является получение в условиях бесконечной малости слагаемых (близких к условиям теоремы 3 (при $\epsilon \to 0$)) оптимальных нижних оценок постоянных в неравенствах Марцинкевича для независимых симметрично распределенных слагаемых. Эти оценки асимптотически эквивалентны соответствующим оптимальным верхним оценкам. Кроме того будут получены некоторые новые оценки для некоторых специальных симметрических функций.

Пусть $z = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$ – вектор с неотрицательными детерминированными компонентами, $T_n = T_n(z) = \sum_{j=1}^n z_j$. Обозначим

$$J_{n,k} = \{(j_1, j_2, \ldots, j_k) : 1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le n\},$$

$$R_{n,k} = R_{n,k}(z) = \sum_{J_{n,k}} z_{j_1} \cdot z_{j_2} \cdots z_{j_k}.$$

Это же обозначение будем использовать для соответствующих случайных симметрических функций от случайных величин $X_i, i = 1, \ldots, n$, положив $z_i = X_i^2, i = 1, \ldots, n$.

Теорема 4. *Пусть $\{X_k\}_{k=1}^n$ – независимые симметричные случайные величины, $E|X_k|^p < \infty$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $p = p(n) \to \infty$ и для некоторой последовательности $\epsilon_n \to 0$ для всех $i \le n$ выполнено условие*

$$(X_i)^2 < \epsilon_n \frac{B_n}{p}. \tag{10}$$

Тогда

$$B(p)\sqrt{||T_n||_{p/2}} \le ||S_n||_p \le C(p)\sqrt{||T_n||_{p/2}}, \tag{11}$$

где $C(p) = C^{1/p}\sqrt{\frac{p}{e}}$, $B(p) = \sqrt{\frac{p}{e}}(1 + o(1))$, $C > 0$ – абсолютная постоянная.

Для доказательства этой теоремы потребуются некоторые результаты автора [11], относящиеся не к случайным, а к детерминированным величинам, а также некоторые вероятностные обобщения этого результата, которые представляют самостоятельный интерес. В силу монотонности норм $||X||_p$, не умаляя общности, достаточно доказывать выводимые ниже неравенства только для $p = 2k$, для натуральных k.

Теорема 5. *Пусть*

$$\max_{j\le n} z_j \le \epsilon (R_{n,k})^{1/k} \quad \text{и} \quad \alpha = e\epsilon < \frac{1}{2}. \tag{12}$$

Пусть $A>0$ и выполнено следующее условие

$$\max_{j\le n} z_j \le \epsilon A \quad \text{and} \quad \alpha = e\epsilon < \frac{1}{2}. \tag{13}$$

Тогда если

$$(R_{n,k})^{1/k} \le A, \tag{14}$$

то справедливо неравенство

$$\frac{T_n}{kA} \le \frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k}. \tag{15}$$

Здесь

$$d_k = (\sqrt{2\pi k})^{1/k} e^{5/(24k^2)} \cdot \frac{1}{1-\alpha}.$$

С другой стороны, если

$$(R_{n,k})^{1/k} \ge A, \tag{16}$$

то справедливо неравенство

$$\frac{c_k}{e} \le \frac{T_n}{kA}. \tag{17}$$

Здесь

$$c_k = (\sqrt{2\pi k} e^{-\frac{1}{12k}})^{\frac{1}{k}}.$$

Из этой теоремы в ее обозначениях вытекает следующий результат.

Теорема 6. *Пусть $B>0$ и выполнено следующее условие*

$$\max_{j\le n} z_j \le B. \tag{18}$$

Тогда для любого положительного ϵ

$$T_n \le k\left((R_{n,k})^{1/k}\left(\frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon}{k}\right) + \frac{2B}{\epsilon}\right). \tag{19}$$

Доказательство теоремы 6. Положим в теореме 5 $A = (R_{n,k})^{1/k}$. Определим $z'_j = z_j$, если $z_j \le \epsilon(R_{n,k})^{1/k}$, $z'_j = 0$ в противном случае, $z''_j = z_j - z'_j$.

Применим теперь к числам z'_j теорему 5. В результате получим первое слагаемое в доказываемом неравенстве. Заметим, что число ненулевых значений z''_j при достаточно больших k не превосходит $\frac{2k}{\epsilon}$. Действительно, пусть k_1 – число ненулевых значений z''_j. Тогда $R_{n,k} > C^k_{k_1}(\epsilon)^k R_{n,k}$. Поэтому $C_{k_1}{}^k(\epsilon)^k < 1$. Используя формулу Стирлинга, и считая k достаточно большим, получим из этого неравенства $\frac{k_1-k}{k} < \frac{1}{\epsilon}$. Поэтому $k_1 < k(1+1/\epsilon) < 2/\epsilon$. Учитывая, что все слагаемые не превосходят B, получим второе слагаемое в доказываемом неравенстве.

Обратимся к вероятностной части работы.

Пусть – z_j, $j \le n$ – последовательность неотрицательных случайных величин. Введем условия зависимости этих величин. Будем говорить, что выполнено условие $D(k, C_k)$, если

$$ER_{n,k} \le (C_k)^k \sum_{J_{n,k}} Ez_{j_1} \cdot Ez_{j_2} \cdots Ez_{j_k}$$

для некоторой положительной постоянной C_k. Будем говорить, что выполнено условие D, если условие $D(k, C_k)$ выполнено для для некоторой последовательности $C_k \longrightarrow 1$.

Приведем примеры зависимостей, при которых выполнено условие $D(k,1)$.

1. Эти условия, очевидно, выполняются для независимых случайных величин z_j, $j \le n$.

2. Они выполняются для отрицательно ассоциированных случайных величин z_j, $j \le n$ (см. [11]), т.е. для величин, удовлетворяющих при любом натуральном k условию

$$E(z_{j_1} z_{j_2} \cdots z_{j_k}) \le Ez_{j_1} Ez_{j_2} \cdots Ez_{j_k}.$$

3. Они выполняются, если случайные величины $(z_j - Ez_j)$, $j \le n$, являются субмартингал-разностями (см. [11]).

Теорема 7. *Пусть $z_j, j = 1, \ldots, n$ – положительные случайные величины, удовлетворяющие условию зависимости D, $B_n = ET_n = E\sum_{j=1}^n z_j$. Пусть $k = k(n) \to \infty$, $\delta_n = \to 0$,*

$$\max_{j \le n} z_j \le \delta_n B_n. \tag{20}$$

Тогда

$$B_n \le ||T_n||_k \le B_n(1+o(1)).$$

Доказательство теоремы 7. Левая часть неравенства теоремы 7 следует из монотонности используемых нами норм: $||T_n||_k \ge ||T_n||_1 = B_n$, $k \ge 1$.

Для доказательства правой части неравенства положим в теореме 5 $A = (R_{n,k})^{1/k}$. Определим $z'_j = z_j$, если $z_j \le \epsilon (R_{n,k})^{1/k}$, $z'_j = 0$ в противном случае, $z''_j = z_j - z'_j$. Применим теперь к величинам z'_j теорему 5. В результате получим оценку для соответствующей части суммы T_n

$$T'_n \le \frac{(1+o(1))k(R_{n,k})^{1/k}}{e}.$$

Как было показано при доказательстве теоремы 6, количество ненулевых значений величин z''_j не превосходит при достаточно больших k отношения $\frac{2k}{\epsilon}$. Поэтому, если ϵ_n сходится к нулю медленнее чем δ_n, то получим, что для оставшейся части суммы T_n выполняется соотношение $T''_n = o(B_n)$.

Приведенные рассуждения приводят к неравенству

$$E(T_n)^k \le (\frac{(1+o(1))kE(R_{n,k})^{1/k}}{e} + o(B_n))^k.$$

Разлагая правую часть этого неравенства по биному Ньютона и применяя к слагаемым суммы в правой части неравенство $EZ^\alpha \le (EZ)^\alpha$, верное при всех $Z > 0$, $0 < \alpha < 1$, получим соотношение

$$E(T_n)^k \le (\frac{(1+o(1))k(ER_{n,k})^{1/k}}{e} + o(B_n))^k.$$

Далее, используя формулу Стирлинга, получим неравенство

$$(B_n)^k \ge k!ER_{n,k} \ge k^k e^{-k} ER_{n,k}(1+o(1))^k.$$

Таким образом, из последних двух неравенств следует неравенство

$$E(T_n)^k \le B_n^k(1+o(1))^k,$$

которое равносильно утверждению теоремы.

Следствие 2. *Пусть* $z_j, j = 1, \dots, n,$ – *положительные случайные величины, определяемые равенством* $z_j = (X_j)^2$,

$$\max_{j \le n} z_j = o((ER_{n,k})^{1/k}). \tag{21}$$

Тогда

$$||T_n||_k \le \frac{k}{e}(ER_{n,k}))^{1/k}(1 + o(1)).$$

Доказательство следствия 2. Пусть

$$\max_{j \le n} z_j \le \delta_n((ER_{n,k})^{1/k}), \tag{22}$$

где $\delta_n \to 0$. Пусть $\epsilon_n \to 0$ таким образом, что $\delta_n = o(\epsilon_n)$. Применяя теорему 6 с $B = \delta_n E(R_{n,k})^{1/k}$, получим

$$(T_n)^k \le k^k \left((R_{n,k})^{1/k} \Big(\frac{d_k}{e} + \frac{\epsilon_n}{k} \Big) + \frac{2\delta_n E(R_{n,k})^{1/k}}{\epsilon_n} \right)^k$$

$$\le k^k e^{-k}((1 + \gamma_n)(R_{n,k})^{1/k}) + \gamma_n E(R_{n,k})^{1/k})^k.$$

Здесь $\gamma_n \to 0$ – некоторая детерминированная последовательность. Поэтому

$$E(T_n)^k \le k^k e^{-k} \sum_m [C_k^m (1 + \gamma_n)^m E((R_{n,k})^{m/k})(\gamma_n E(R_{n,k})^{1/k}))^{(k-m)}].$$

Применяя к слагаемым суммы в правой части неравенство $EZ^\alpha \le (EZ)^\alpha$, верное при всех $Z > 0$, $0 < \alpha < 1$, получим соотношение

$$E(T_n)^k \le k^k e^{-k}(1 + 2\gamma)^k ER_{n,k}.$$

Это соотношение равносильно неравенству, доказываемому в следствии 2.

Следствие 3. *Пусть* $z_j, j = 1, \dots, n,$ – *положительные случайные величины, определяемые равенством* $z_j = (X_j)^2$,

$$\max_{j \le n} z_j = o\Big(\frac{B_n}{k} \Big). \tag{23}$$

Тогда

$$(ER_{n,k})^{1/k} \ge \frac{e}{k} B_n (1 + o(1)),$$

что равносильно в силу теоремы 7 соотношению

$$(ER_{n,k})^{1/k} \ge \frac{e}{k} ||T_n||_k (1 + o(1)).$$

Доказательство следствия 3. Пусть

$$\max_{j \le n} z_j \le \delta_n \frac{B_n}{k},$$

где $\delta_n \to 0$. Применяя теорему 6 с $B = \delta_n \frac{B_n}{k}$, получим, как и при доказательстве следствия 2,

$$E(T_n)^k \le k^k e^{-k} \sum_m \left[C_k^m (1 + \gamma_n)^m E((R_{n,k})^{m/k}) \Big(\gamma_n \Big(\frac{B_n}{k} \Big)^{(k-m)} \Big) \right].$$

Применяя к слагаемым суммы в правой части неравенство $EZ^{\alpha} \le (EZ)^{\alpha}$, верное при всех $Z > 0$, $0 < \alpha < 1$, получим соотношение

$$E(T_n)^k \le k^k e^{-k} \sum_m \left[C_k^m (1 + \gamma_n)^m (ER_{n,k})^{m/k} \Big(\gamma_n \Big(\frac{B_n}{k} \Big)^{(k-m)} \Big) \right]$$

$$= k^k e^{-k} \left((1 + \gamma_n)(ER_{n,k})^{1/k} + \gamma_n \frac{B_n}{k} \right)^k,$$

откуда следует неравенство

$$||T_n||_k \le \frac{k}{e} (ER_{n,k})^{1/k} (1 + o(1)) + B_n o(1).$$

В силу теоремы 7 это неравенство равносильно соотношению

$$B_n \le \frac{k}{e} (ER_{n,k})^{1/k} (1 + o(1)) + B_n o(1).$$

Поэтому с учетом теоремы 7 и

$$B_n \le \frac{k}{e} (ER_{n,k})^{1/k} (1 + o(1)),$$

$$E(T_n)^k \leq k^k e^{-k}(1+o(1))^k ER_{n,k}.$$

Эти соотношения равносильны неравенствам следствия 3.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 4. Для $p = 2k > 2$ в силу формулы Стирлинга справедливы неравенства

$$E(S_n)^{2k} \geq \frac{(2k)!}{2^k} ER_{n,k} = \frac{(2k)^{2k}}{2^k e^{2k}}(1+o(1))^k ER_{n,k}. \tag{24}$$

Из следствия 3 вытекает неравенство

$$(ER_{n,k}) \geq \frac{e^k}{k^k} E(T_n)^k (1+o(1))^k,$$

так что

$$E(S_n)^{2k} \geq \frac{(2k)^{2k}}{2^k e^{2k}} \frac{e^k}{k^k} E(T_n)^k (1+o(1))^k.$$

Поэтому

$$||S_n||_{2k} \geq \sqrt{\frac{2k}{e}} ||T_n||_k (1+o(1)).$$

Теорема 4 доказана.

Применяя эту теорему к условным распределениям при условии фиксации квадратов исходных симметричных независимых случайных величин X_i, $i = 1, \ldots, n$ и затем применяя к обеим частям полученного неравенства оператор взятия математического ожидания получим следующий результат, уточняющий следствие 1.

Следствие 4. *Положим, как и раньше, $t_n = \frac{S_n}{\sqrt{T_n}}$. Тогда в условиях теоремы 4 справедливо неравенство*

$$(1+o(1))\sqrt{\frac{p}{e}} \leq ||t_n||_p \leq C^{1/p}\sqrt{\frac{p}{e}}, \tag{25}$$

причем правая часть этого неравенства справедлива и без выполнения условия (10).

Замечание. При доказательстве теоремы 4 используется тот факт, что при выполнении ее условий симметрический многочлен T_n^k имеет такой же порядок роста, что и его часть $k!R_{n,k}$.

Литература

1. A. N. Kolmogoroff, *Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Grössen.* — Math. Ann. **99** (1928), **102** (1929).
2. С. Н. Бернштейн, *Теория вероятностей.* Гостехиздат, М.-Л., 1946.
3. W. Hoeffding, *Probability inequalities for sums of bounded random variables.* — J. Amer. Statist. Assos. **58**, No. 301 (1963), 13–30.
4. G. Bennet, *Probability inequalities for the sum of independent random variables.* — J. Amer. Statist. Assos. **57**, No. 297 (1962), 33–45.
5. Д. Ф. Фук, С. В. Нагаев, *Вероятностные неравенства для сумм независимых случайных величин.* — Теор. вероятн. и ее прим. **21**, No. 4 (1971), 660–675.
6. В. В.Петров, *Суммы независимых случайных величин.* М., Наука, 1972.
7. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* М., Наука, 1987.
8. V. Egorov, *On the growth rate of moments of random sums.* — PUB. IRMA **44**, No. IV (1997), 1–8.
9. В. А. Егоров, *Об асимптотическом поведении самонормированных сумм случайных величин.* — Теор. вероятн. и ее прим. **41**, No. 3 (1996), 643–650.
10. В. А. Егоров, *Оценка постоянных в верхних неравенствах Марцинкевича и Розенталя.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **341** (2007), 315–326.
11. В. А. Егоров, *Об оценке хвоста распределения нормированных и самонормированных сумм.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **294** (2002), 77–87.
12. E. Gine, F. Götze, D. M. Mason, *When is the Student-Statistics asymptotically standard normal*? – Ann. Probab. **25**, 1514–1531.
13. B. Y. Jing, Q. M. Shao, Q. Wang, *Self-normalized Cramer-type large deviations for independent random values.* — Ann. Probab. **31**, No. 4 (2003), 2167–2215.
14. М. Лоэв, *Теория вероятностей.* ИЛ, М., 1962.

Egorov V. A. Two-sided estimates for the constants in Marcinkiewicz's inequalities.

For symmetric independent random values sharp estimates for the constants in Marcinkiewicz's inequalities are derived. The estimates of the left-hand and right-hand constants are roughly equivalent. Similar estimates for self-normalized sums and new comparative estimates of increasing for some symmetric polynomial are derived, too.

Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет

E-mail: 44eva@rambler.ru

Поступило 26 ноября 2008 г.