Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 361, 2008 г.

А. Н. Бородин

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ДИФФУЗИЯ

В работе рассматривается соответствие между конкретными диффузиями и специальными функциями. Это соответствие проявляется в выражении преобразования Лапласа по времени переходной плотности через специальные функции. Моменты выхода диффузии на границу интервала тоже связаны с этими функциями. Хорошо известно (см. [1]), что бесселевскому процессу отвечают модифицированные функции Бесселя, процессу Орнштейна–Уленбека – функции параболического цилиндра, радиальному процессу Орнштейна–Уленбека – функции Куммера. Последней в ряду специальных функций стоит гипергеометрическая функция. Диффузионному процессу, отвечающему этой функции, и посвящена данная работа. Этот диффузионный процесс обобщает вышеперечисленные процессы, поскольку они являются предельными для этого процесса при определенном выборе параметров. В этом иерархическом ряду специальных функций важное значение занимают функции Лежандра, которым отвечает гиперболический бесселевский процесс, достаточно подробно изученный в работе Ж.-К. Грюэ [2]. Этот процесс тоже является частным случаем гипергеометрического диффузионного процесса.

1. Диффузионный процесс. В этом пункте приводятся некоторые хорошо известные свойства диффузий. Рассмотрим диффузионный процесс $X(t)$, $t \geqslant 0$, с единичным коэффициентом диффузии, который является решением стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = \mu(X(t))\,dt + dW(t), \qquad X(0) = x,$$

где $W(t)$ – процесс броуновского движения. Относительно пространства состояний диффузии будем предполагать, что это либо неотрицательная полуось, либо вся вещественная прямая. В первом случае

Настоящая работа поддержана грантами НШ 638.2008.1 и Программой фундаментальных исследований РАН "Современные проблемы теоретической математики".

предполагаем, что в нуле у коэффициента сноса есть особенность, либо считаем, что X – диффузия с отражением в нуле.

Производящий оператор диффузии X имеет вид

$$\mathcal{G}f(x) := \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x) + \mu(x)\frac{d}{dx}f(x).$$

Плотность меры скорости и шкала диффузии определяются формулами

$$m(x) := 2\,\exp\Big(2\int^{x}\mu(y)\,dy\Big), \qquad s(x) := \int^{x}\exp\Big(-2\int^{z}\mu(y)\,dy\Big)\,dz.$$

Для диффузии, заданной на неотрицательной полуоси, на функции, входящие в область определения производящего оператора, в точке 0 налагается граничное условие. Нами рассматриваются диффузии с условием $\lim\limits_{x\downarrow 0}\dfrac{d}{ds(x)}f(x) = 0$, которое характеризует отражение в нуле, если у шкалы нет в нуле особенности, или – недостижимость нуля, в противном случае.

Пусть ψ_λ – возрастающее и φ_λ – убывающее непрерывные решения дифференциального уравнения

$$\frac{1}{2}Y''(x) + \mu(x)Y'(x) - \lambda Y(x) = 0, \quad \lambda > 0, \tag{1.1}$$

и пусть

$$w(\psi_\lambda(z), \varphi_\lambda(z)) = \psi'_\lambda(z)\varphi_\lambda(z) - \psi_\lambda(z)\varphi'_\lambda(z) > 0$$

– вронскиан решений ψ, φ. В случае, когда у $\mu(x)$ нет особенности в нуле и рассматривается диффузия с отражением, на решение ψ_λ налагается граничное условие $\psi'_\lambda(0+) = 0$.

Преобразование Лапласа по времени переходной плотности диффузии X выражается формулой

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(X(t) < z)\,dt = \begin{cases} \dfrac{2}{w(\psi_\lambda(z), \varphi_\lambda(z))}\psi_\lambda(x)\varphi_\lambda(z), & x \leqslant z, \\ \dfrac{2}{w(\psi_\lambda(z), \varphi_\lambda(z))}\varphi_\lambda(x)\psi_\lambda(z), & z \leqslant x. \end{cases} \tag{1.2}$$

Пусть $H_z := \inf\{t:\ X(t) = z\}$ – *момент первого достижения уровня.* Тогда для $\lambda > 0$

$$\mathbf{E}_x(e^{-\lambda H_z}) = \begin{cases} \dfrac{\psi_\lambda(x)}{\psi_\lambda(z)}, & x \leqslant z, \\ \dfrac{\varphi_\lambda(x)}{\varphi_\lambda(z)}, & z \leqslant x. \end{cases} \tag{1.3}$$

Пусть (a, b) – подынтервал пространства состояний, тогда для $a \leqslant x \leqslant b$

$$\mathbf{P}_x(H_a < H_b) = 1 - \mathbf{P}_x(H_b < H_a) = \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)}. \tag{1.4}$$

2. Классические диффузии и специальные функции. Приведем ряд сведений из [1], приложение 1, которые описывают соответствия между известными диффузиями и специальными функциями.

1) Броуновскому процессу отвечают следующие фундаментальные решения уравнения (1.1): $\psi_\lambda(x) = e^{x\sqrt{2\lambda}}$, $\varphi_\lambda(x) = e^{-x\sqrt{2\lambda}}$.

2) Бесселевскому процессу $R^{(\nu)}(t)$ порядка $\nu \geqslant -\frac{1}{2}$ соответствует производящий оператор

$$\mathcal{G}f(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x) + \frac{2\nu + 1}{2x}\frac{d}{dx}f(x), \qquad x > 0. \tag{2.1}$$

Фундаментальные решения уравнения (1.1) имеют вид:

$$\psi_\lambda(x) = x^{-\nu} I_\nu(x\sqrt{2\lambda}), \qquad \varphi_\lambda(x) = x^{-\nu} K_\nu(x\sqrt{2\lambda}),$$

где

$$I_\nu(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)}, \qquad K_\nu := \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)}\bigl(I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)\bigr)$$

– модифицированные функции Бесселя.

При $\nu = n/2 - 1$, где n – натуральное число, процесс $R^{(\nu)}$ является радиальной частью n-мерного броуновского движения $\vec{W}(t) = (W_1(t), W_2(t), \dots, W_n(t))$ с независимыми координатами.

3) Пусть $\rho > 0$. Процесс

$$U(t) := e^{-\rho t} W\Bigl(\frac{e^{2\rho t} - 1}{2\rho}\Bigr), \qquad t \geqslant 0, \tag{2.2}$$

является процессом Орнштейна–Уленбека.

Производящий оператор процесса задается формулой

$$\mathcal{G}f(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \rho x\frac{d}{dx}f(x), \qquad x \in (-\infty, \infty). \tag{2.3}$$

Фундаментальные решения уравнения (1.1) имеют вид:

$$\psi_\lambda(x) = e^{\rho x^2/2}D_{-\lambda/\rho}(-x\sqrt{2\rho}), \qquad \varphi_\lambda(x) = e^{\rho x^2/2}D_{-\lambda/\rho}(x\sqrt{2\rho}),$$

где

$$D_{-\nu}(x) := e^{-x^2/4}2^{-\nu/2}\sqrt{\pi}\Big\{\frac{1}{\Gamma(\nu+1)/2)}\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\nu(\nu+2)\cdots(\nu+2k-2)}{(2k)!}x^{2k}\Big)$$

$$-\frac{x\sqrt{2}}{\Gamma(\nu/2)}\Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\nu+1)(\nu+3)\cdots(\nu+2k-1)}{(2k+1)!}x^{2k}\Big)\Big\}$$

– функция параболического цилиндра.

4) Для отраженного процесса Орнштейна–Уленбека ($|U(t)|$) уравнение (1.1), $x > 0$, с условием, что правосторонняя производная в нуле равна нулю, имеет следующие фундаментальные решения:

$$\psi_\lambda(x) = e^{\rho x^2/2}\big(D_{-\lambda/\rho}(-x\sqrt{2\rho}) + D_{-\lambda/\rho}(x\sqrt{2\rho})\big),$$

$$\varphi_\lambda(x) = e^{\rho x^2/2}D_{-\lambda/\rho}(x\sqrt{2\rho}).$$

5) Производящий оператор радиального процесса Орнштейна–Уленбека для $\nu \geqslant -1/2$ имеет вид

$$\mathcal{G}f(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x) + \Big(\frac{2\nu+1}{2x} - \rho x\Big)\frac{d}{dx}f(x), \qquad x > 0. \tag{2.4}$$

Фундаментальные решения уравнения (1.1) имеют вид:

$$\psi_\lambda(x) = M\Big(\frac{\lambda}{2\rho}, \nu+1, \rho x^2\Big), \qquad \varphi_\lambda(x) = U\Big(\frac{\lambda}{2\rho}, \nu+1, \rho x^2\Big),$$

где

$$M(a,b,x) := 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(a+1)\dots(a+k-1)x^k}{b(b+1)\dots(b+k-1)k!},$$

$$U(a,b,x) := \frac{\Gamma(1-b)}{\Gamma(1+a-b)}M(a,b,x) + x^{1-b}\frac{\Gamma(b-1)}{\Gamma(a)}M(1+a-b,2-b,x)$$

– функции Куммера.

Вронскиан решений

$$w(\psi_\lambda(z),\varphi_\lambda(z)) = \frac{2\Gamma(\nu+1)\,e^{\rho z^2}}{\Gamma(\lambda/2\rho)\,z^{2\nu+1}\rho^\nu}.$$

Согласно (1.2), преобразование Лапласа по времени переходной плотности радиального процесса Орнштейна–Уленбека $Q^{(\nu)}$ выражается формулой

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(Q^{(\nu)}(t)<z)\,dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\lambda/2\rho)\,z^{2\nu+1}\rho^\nu}{\Gamma(\nu+1)\,e^{\rho z^2}}M\Big(\dfrac{\lambda}{2\rho},\nu+1,\rho x^2\Big)U\Big(\dfrac{\lambda}{2\rho},\nu+1,\rho z^2\Big), & 0\leqslant x\leqslant z,\\ \dfrac{\Gamma(\lambda/2\rho)\,z^{2\nu+1}\rho^\nu}{\Gamma(\nu+1)\,e^{\rho z^2}}U\Big(\dfrac{\lambda}{2\rho},\nu+1,\rho x^2\Big)M\Big(\dfrac{\lambda}{2\rho},\nu+1,\rho z^2\Big), & z\leqslant x. \end{cases} \tag{2.5}$$

Можно вычислить обратное преобразование Лапласа по λ, что дает выражение для переходной плотности радиального процесса Орнштейна–Уленбека в момент t

$$\mathbf{P}_x(Q^{(\nu)}(t)<z) = \frac{\rho z^{\nu+1}e^{\rho t(\nu+1)}}{x^\nu\,\mathrm{sh}(\rho t)}\exp\Big(\frac{\rho(x^2-z^2)}{2} - \frac{\rho(x^2+z^2)\,\mathrm{ch}(\rho t)}{2\,\mathrm{sh}(\rho t)}\Big)I_\nu\Big(\frac{\rho xz}{\mathrm{sh}(\rho t)}\Big). \tag{2.6}$$

При $\nu = n/2-1$, где n – натуральное число, процесс $Q^{(\nu)}$ является радиальной частью n-мерного процесса Орнштейна–Уленбека $\vec{U}(t) = (U_1(t),U_2(t),\dots,U_n(t))$ с независимыми координатами.

Очевидно, что

$$Q^{(\nu)}(t) = e^{-\rho t}R^{(\nu)}\Big(\frac{e^{2\rho t}-1}{2\rho}\Big), \qquad t\geqslant 0. \tag{2.7}$$

Заметим, что при $\rho\to 0$ процесс $Q^{(\nu)}(t)$, $t\geqslant 0$, трансформируется в бесселевский процесс $R^{(\nu)}(t)$. Шкала радиального процесса Орнштейна–Уленбека задается формулой

$$s(x) = \int^x y^{-1-2\nu}\,e^{\rho y^2}\,dy.$$

Плотность меры скорости имеет вид $m(x) = 2x^{2\nu+1}\, e^{-\rho x^2}$.

3. Гипергеометрические функции. Гипергеометрическая функция задается (см. [3], п. 2.1.) рядом

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) := 1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+k-1)\beta(\beta+1)\dots(\beta+k-1)x^k}{\gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+k-1)k!},$$

который для $-1<x<1$ сходится при всех значениях параметров.

Для $0<x\leqslant 1$ и $\mathrm{Re}(\alpha+\beta+1-\gamma)>0$ рассмотрим (см. [3], п. 2.1. (12)) функцию

$$G(\alpha,\beta,\gamma,x) := \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta+1-\gamma)}F(\alpha,\beta,\alpha+\beta+1-\gamma,1-x).$$

Эти функции являются линейно независимыми решениями гипергеометрического уравнения

$$x(1-x)Y''(x)+(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)Y'(x)-\alpha\beta Y(x)=0.$$

Выполняются следующие соотношения (см. [3], [4]):

$$w(F(\alpha,\beta,\gamma,x)\,G(\alpha,\beta,\gamma,x)) = \frac{\Gamma(\gamma)x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}, \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\big((1-x)^{\alpha}F(\alpha,\beta,\gamma,x)\big) = \frac{\alpha(\beta-\gamma)}{\gamma}(1-x)^{\alpha-1}F(\alpha+1,\beta,\gamma+1,x), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\big((1-x)^{\alpha}G(\alpha,\beta,\gamma,x)\big) = -\alpha(1-x)^{\alpha-1}G(\alpha+1,\beta,\gamma+1,x), \tag{3.3}$$

$$\lim_{\beta\to\infty}F\big(\alpha,\beta,\gamma,\frac{x}{\beta}\big) = M(\alpha,\gamma,x), \tag{3.4}$$

$$\lim_{\beta\to\infty}\Gamma(\beta+1-\gamma)G\big(\alpha,\beta,\gamma,\frac{x}{\beta}\big) = U(\alpha,\gamma,x). \tag{3.5}$$

Интегральные представления: для $-1<x<1$

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x)=\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\gamma-\alpha-1}(1-tx)^{-\beta}dt,\ \mathrm{Re}\,\gamma>\mathrm{Re}\,\alpha>0,$$

для $0 < x < \infty$

$$G(\alpha,\beta,\gamma,x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta+1-\gamma)}\int\limits_0^\infty t^{\alpha-1}(1+t)^{\gamma-\alpha-1}(1+tx)^{-\beta}dt,$$

$$\operatorname{Re}(\beta+1-\gamma) > 0, \quad \operatorname{Re}\alpha > 0.$$

Важным частным случаем гипергеометрических функций являются функции Лежандра. Поскольку для теории вероятностей важны вещественнозначные функции, мы волнистой чертой будем обозначать функции, отличающиеся от классических функций Лежандра множителем $e^{i\mu\pi}$. Функция Лежандра первого рода (см. [3], глава 3) может быть определена следующим образом: при $-1 < x < 1$

$$\widetilde{P}_\nu^\mu(x) := \frac{1}{\Gamma(1-\mu)}\Big(\frac{1+x}{1-x}\Big)^{\mu/2} F\big(-\nu, 1+\nu, 1-\mu, \frac{1-x}{2}\big), \quad \operatorname{Re}\mu < 1,$$

при $x > 1$

$$P_\nu^\mu(x) := \frac{2^\mu x^{\mu+\nu}}{(x^2-1)^{\mu/2}\Gamma(1-\mu)} G\big(-\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{1-\nu-\mu}{2}, 1-\mu, 1-\frac{1}{x^2}\big), \ \operatorname{Re}\mu < 1.$$

Функция Лежандра второго рода, деленная на $e^{i\mu\pi}$: при $x > 1$

$$\widetilde{Q}_\nu^\mu(x) := \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\nu+1)(x^2-1)^{\mu/2}}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+3/2)x^{\mu+\nu+1}} F\big(\frac{\mu+\nu+1}{2}, \frac{\mu+\nu+2}{2}, \nu+\frac{3}{2}, \frac{1}{x^2}\big).$$

При $x > 1$ функции $P_\nu^\mu(x)$ и $\widetilde{Q}_\nu^\mu(x)$ являются линейно независимыми решениями уравнения Лежандра

$$(1-x^2)Y''(x) - 2xY'(x) + \big(\nu(1+\nu) - \frac{\mu^2}{1-x^2}\big)Y(x) = 0.$$

При $|x| < 1$ линейно независимыми решениями уравнения Лежандра являются функции $\widetilde{P}_\nu^\mu(-x)$, $\widetilde{P}_\nu^\mu(x)$.

Вронскиан решений при $x > 1$ равен

$$w\Big(P_\nu^\mu(x), \widetilde{Q}_\nu^\mu(x)\Big) = \frac{\Gamma(1+\nu+\mu)}{\Gamma(1+\nu-\mu)(x^2-1)},$$

а при $|x| < 1$ равен

$$w\Big(\widetilde{P}_\nu^\mu(-x), \widetilde{P}_\nu^\mu(x)\Big) = \frac{2}{\Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(1+\nu-\mu)(1-x^2)}.$$

При $x > 1$ справедливы следующие соотношения (см. [5], формулы 7.12.17 и [4] формулы 8.5.2):

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{P_\nu^\mu(x)}{(x^2-1)^{\mu/2}}\Big) = \frac{P_\nu^{\mu+1}(x)}{(x^2-1)^{(\mu+1)/2}}, \tag{3.6}$$

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{\widetilde{Q}_\nu^\mu(x)}{(x^2-1)^{\mu/2}}\Big) = -\frac{\widetilde{Q}_\nu^{\mu+1}(x)}{(x^2-1)^{(\mu+1)/2}}, \tag{3.7}$$

$$\frac{d}{dx}\big((x^2-1)^{\mu/2}P_\nu^\mu(x)\big) = (\nu+\mu)(\nu-\mu+1)(x^2-1)^{(\mu-1)/2}P_\nu^{\mu-1}(x), \tag{3.8}$$

$$\frac{d}{dx}\big((x^2-1)^{\mu/2}\widetilde{Q}_\nu^\mu(x)\big) = -(\nu+\mu)(\nu-\mu+1)(x^2-1)^{(\mu-1)/2}\widetilde{Q}_\nu^{\mu-1}(x). \tag{3.9}$$

Согласно формулам 9.6.49 и 9.6.50 из [4]

$$\lim_{\nu\to\infty}\nu^\mu P_\nu^{-\mu}(\operatorname{ch}(\tfrac{z}{\nu})) = I_\mu(z), \qquad \lim_{\nu\to\infty}\nu^{-\mu}\widetilde{Q}_\nu^\mu(\operatorname{ch}(\tfrac{z}{\nu})) = K_\mu(z).$$

Интегральные представления (см. [3], п. 3.7): при $-1 < x < 1$

$$\widetilde{P}_\nu^\mu(x) = \frac{2^{-\nu}(1-x^2)^{-\mu/2}}{\Gamma(-\nu-\mu)\Gamma(1+\nu)}\int_0^\infty (x+\operatorname{ch} t)^{\mu-\nu-1}\operatorname{sh}^{1+2\nu} t\,dt, \ \operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}(-\nu) < 1,$$

при $x > 1$

$$\widetilde{Q}_\nu^\mu(x) = \frac{2^{-\mu}(x^2-1)^{-\mu/2}\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)\Gamma(\mu+1/2)}\int_0^\infty (x+\sqrt{x^2-1}\operatorname{ch} t)^{-\mu-\nu-1}\operatorname{sh}^{2\mu} t\,dt,$$

$$\operatorname{Re}(\nu\pm\mu+1) > 0.$$

4. Гипергеометрическая диффузия. Гипергеометрическая диффузия $X_{\rho,\theta}^{(\nu)}$, пространством состояний которой является неотрицательная полуось, задается производящим оператором

$$\mathcal{G}f(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x) + \big((\nu+\tfrac{1}{2})\theta\operatorname{cth}(\theta x) - \frac{\rho}{\theta}\operatorname{th}(\theta x)\big)\frac{d}{dx}f(x), \quad x > 0. \tag{4.1}$$

Рассмотрим при $-1/2 \leqslant \nu$, $\rho \geqslant 0$, $\lambda > 0$ решения уравнения

$$\frac{1}{2}Y''(x) + \big((\nu+\tfrac{1}{2})\theta\operatorname{cth}(\theta x) - \frac{\rho}{\theta}\operatorname{th}(\theta x)\big)Y'(x) - \lambda Y(x) = 0, \qquad x > 0. \tag{4.2}$$

Можно проверить, что фундаментальные решения имеют вид

$$\psi_\lambda(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^{2\alpha}(\theta x)} F\big(\alpha,\beta,\nu+1,\operatorname{th}^2(\theta x)\big), \tag{4.3}$$

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\Gamma(\beta-\nu)}{\operatorname{ch}^{2\alpha}(\theta x)} G\big(\alpha,\beta,\nu+1,\operatorname{th}^2(\theta x)\big), \tag{4.4}$$

где

$$\alpha := \frac{1}{2}\sqrt{\big(\frac{\rho}{\theta^2}-\nu-\frac{1}{2}\big)^2+\frac{2\lambda}{\theta^2}} - \frac{1}{2}\big(\frac{\rho}{\theta^2}-\nu-\frac{1}{2}\big), \qquad \beta := \alpha+\frac{1}{2}+\frac{\rho}{\theta^2}.$$

Вронскиан решений равен

$$w(\psi_\lambda(x),\varphi_\lambda(x)) = \frac{2\theta\Gamma(\beta-\nu)\Gamma(\nu+1)\operatorname{ch}^{2\rho/\theta^2}(\theta x)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta x)}. \tag{4.5}$$

Поскольку $\beta > \nu+1$, то из (3.2) следует, что $\psi'_\lambda(x) > 0$, а из (3.3) следует, что $\varphi'_\lambda(x) < 0$. Следовательно, функция ψ_λ является возрастающей, а функция φ_λ является убывающей. Согласно (1.2), имеем

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(X^{(\nu)}_{\rho,\theta}(t) < z)\,dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta z)F\big(\alpha,\beta,\nu+1,\operatorname{th}^2(\theta x)\big)G\big(\alpha,\beta,\nu+1,\operatorname{th}^2(\theta z)\big)}{\theta\Gamma(\nu+1)\operatorname{ch}^{2\alpha+2\rho/\theta^2}(\theta z)\operatorname{ch}^{2\alpha}(\theta x)}, & 0 \leqslant x \\ & x \leqslant z, \\ \dfrac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta z)F\big(\alpha,\beta,\nu+1,\operatorname{th}^2(\theta z)\big)G\big(\alpha,\beta,\nu+1,\operatorname{th}^2(\theta x)\big)}{\theta\Gamma(\nu+1)\operatorname{ch}^{2\alpha+2\rho/\theta^2}(\theta z)\operatorname{ch}^{2\alpha}(\theta x)}, & z \leqslant x. \end{cases} \tag{4.6}$$

Поскольку

$$2\int^x \big((\nu+\tfrac{1}{2})\theta\operatorname{cth}(\theta y) - \frac{\rho}{\theta}\operatorname{th}(\theta y)\big)\,dy = \ln\Big(\frac{\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta x)}{\operatorname{ch}^{2\rho/\theta^2}(\theta x)}\Big) + \mathrm{const}, \qquad x > 0$$

то, по определению, плотность меры скорости и шкала диффузии равны

$$m(x) = \frac{2\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta x)}{\theta^{2\nu+1}\operatorname{ch}^{2\rho/\theta^2}(\theta x)}, \qquad s(x) = \theta^{2\nu+1}\int^x \frac{\operatorname{ch}^{2\rho/\theta^2}(\theta y)}{\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta y)}\,dy$$

соответственно. Множитель $\theta^{2\nu+1}$ взят для того, чтобы существовали пределы при $\theta \downarrow 0$.

Пусть $H_z := \inf\{t:\ X^{(\nu)}_{\rho,\theta}(t) = z\}$. По (1.4)

$$\mathbf{P}_x(H_a < H_b) = \frac{\int\limits_x^b \frac{\operatorname{ch}^{2\rho/\theta^2}(\theta y)}{\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta y)}\,dy}{\int\limits_a^b \frac{\operatorname{ch}^{2\rho/\theta^2}(\theta y)}{\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta y)}\,dy}, \qquad a < b. \tag{4.7}$$

Рассмотрим предельное поведение гипергеометрической диффузии при $\theta \downarrow 0$. Оператор (4.1) при этом трансформируется в оператор радиального процесса Орнштейна–Уленбека, определенный формулой (2.4). Убедимся в том, что и преобразование Лапласа переходной плотности (4.6) трансформируется в формулу (2.5). Нетрудно убедиться, что при $\theta \downarrow 0$, выполняются соотношения $\alpha \sim \dfrac{\lambda}{2\rho}$, $\beta \sim \dfrac{\rho}{\theta^2}$ и

$$\operatorname{ch}^{2\beta}(\theta z) \sim \Bigl(1 + \frac{\theta^2 z^2}{2}\Bigr)^{2\rho/\theta^2} \sim e^{\rho z^2}, \qquad \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\nu)} \sim \Bigl(\frac{\rho}{\theta^2}\Bigr)^{\nu}.$$

В силу (3.4) и (3.5) при $\theta \downarrow 0$ выполняются соотношения

$$\psi_\lambda(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^{2\alpha}(\theta x)} F\bigl(\alpha, \beta, \nu+1, \operatorname{th}^2(\theta x)\bigr) \to M\Bigl(\frac{\lambda}{2\rho}, \nu+1, \rho x^2\Bigr),$$

$$\varphi_\lambda(x) = \frac{\Gamma(\beta-\nu)}{\operatorname{ch}^{2\alpha}(\theta x)} G\bigl(\alpha, \beta, \nu+1, \operatorname{th}^2(\theta x)\bigr) \to U\Bigl(\frac{\lambda}{2\rho}, \nu+1, \rho x^2\Bigr).$$

Используя вышеприведенные формулы, легко проверить, что предел при $\theta \downarrow 0$ правой части (4.6) совпадает с (2.5). Следовательно, переходная плотность гипергеометрической диффузии при $\theta \downarrow 0$ сходится к переходной плотности радиального процесса Орнштейна–Уленбека. Плотность меры скорости и шкала гипергеометрической диффузии при $\theta \downarrow 0$ тоже сходятся к соответствующим характеристикам радиального процесса Орнштейна–Уленбека.

5. Гиперболический бесселевский процесс. Этот процесс (обозначим его $H^{(\nu)}_\theta(t)$) является частным случаем гипергеометрической диффузии при $\rho = 0$. Производящий оператор имеет вид

$$\mathcal{G} f(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} f(x) + (\nu + \tfrac{1}{2})\theta \operatorname{cth}(\theta x) \frac{d}{dx} f(x), \quad x > 0. \tag{5.1}$$

По формуле 15.4.10 из [4] при $0<x<1$ справедливо равенство

$$F(\alpha,\alpha+\frac{1}{2},\nu+1,x)=2^{\nu}\Gamma(\nu+1)x^{-\nu/2}(1-x)^{\nu/2-\alpha}P^{-\nu}_{2\alpha-\nu-1}\Big(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\Big).$$

Положим $\mu:=\sqrt{(\nu+\frac{1}{2})^2+\frac{2\lambda}{\theta^2}}=2\alpha-\nu-\frac{1}{2}$. Тогда при $\rho=0$ из (4.3) следует, что

$$\psi_\lambda(x)=2^{\nu}\Gamma(\nu+1)\frac{P^{-\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta x))}{\operatorname{sh}^{\nu}(\theta x)}.$$

Для функции $\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu-1/2}$ при $x>1$ выполняется равенство

$$\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu-1/2}(x)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+\nu+1/2)(x^2-1)^{\nu/2}}{2^{\mu+1/2}\Gamma(\mu+1)x^{\mu+\nu+1/2}}F\big(\frac{\mu+\nu+1/2}{2},\frac{\mu+\nu+3/2}{2},\mu+1,\frac{1}{x^2}\big).$$

Учитывая выражение для μ и определение гипергеометрической функции G, имеем

$$\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu-1/2}(x)=\frac{\sqrt{\pi}\Gamma(2\alpha)(x^2-1)^{\nu/2}}{2^{2\alpha-\nu}x^{2\alpha}}G\big(\alpha,\alpha+\frac{1}{2},\nu+1,1-\frac{1}{x^2}\big).$$

Тогда при $\rho=0$ из (4.4) следует, что

$$\varphi_\lambda(x)=\frac{2^{1-\nu}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2}-\nu)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})}\frac{\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta x))}{\operatorname{sh}^{\nu}(\theta x)}.$$

Вронскиан решений, взятых без учета множителей, имеет вид

$$w\Big(\frac{P^{-\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta x))}{\operatorname{sh}^{\nu}(\theta x)},\frac{\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta x))}{\operatorname{sh}^{\nu}(\theta x)}\Big)=\frac{\theta}{\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta x)}.$$

При $\rho=0$ формула (4.6) преобразуется к виду

$$G^{\nu}_{\mu}(x,z)\frac{2\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta z)}{\theta^{2\nu+1}}:=\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(H^{(\nu)}_{\theta}(t)<z)\,dt=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2\operatorname{sh}^{\nu+1}(\theta z)\,\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta z))\,P^{-\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta x))}{\theta\,\operatorname{sh}^{\nu}(\theta x)}, & 0\leqslant x\leqslant z,\\[2ex] \dfrac{2\operatorname{sh}^{\nu+1}(\theta z)\,\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta x))\,P^{-\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta z))}{\theta\,\operatorname{sh}^{\nu}(\theta x)}, & z\leqslant x.\end{cases}\tag{5.2}$$

Здесь $G^{\nu}_{\mu}(x,z)$ – функция Грина переходной плотности гиперболического бесселевского процесса относительно меры скорости с плотностью $m(z)=\frac{2\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta z)}{\theta^{2\nu+1}}$ (отличается от плотности в [2] на множитель $\frac{\pi^{\nu+1}}{\Gamma(\nu+1)}$). Соответствующую переходную плотность гиперболического бесселевского процесса относительно меры скорости обозначим $p_\nu(t,x,z)$. Удобно, что функция Грина и отвечающая ей переходная плотность симметричны относительно переменных x,z. Справедливы интегральные представления (см. [3], формулы 3.7.(8) и 3.7.(4)):

$$\frac{P^{-\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta x))}{\operatorname{sh}^{\nu}(\theta x)}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu+1/2)\operatorname{sh}^{2\nu}(\theta x)}\int\limits_0^{\theta x}\frac{\operatorname{ch}(\mu y)}{(\operatorname{ch}(\theta x)-\operatorname{ch} y)^{1/2-\nu}}\,dy,\quad \nu>-\frac12,$$

$$\frac{\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta x))}{\operatorname{sh}^{\nu}(\theta x)}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}\Gamma(1/2-\nu)}\int\limits_{\theta x}^{\infty}\frac{e^{-\mu y}}{(\operatorname{ch} y-\operatorname{ch}(\theta x))^{\nu+1/2}}\,dy,\quad \mu+\nu+\frac12>0,$$

$$\nu<1/2.$$

Поскольку (см. [3], формулы 3.4.(3) и 3.4.(4))

$$\lim_{\theta\downarrow 0}\frac{P^{-\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta x))}{\operatorname{sh}^{\nu}(\theta x)}=\frac{1}{2^{\nu}\Gamma(1+\nu)},\tag{5.3}$$

то из (5.2) и интегрального представления для $\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu-1/2}(\operatorname{ch}(\theta x))$ следует, что

$$\int\limits_0^{\infty}e^{-\lambda t}\frac{d}{dz}\mathbf{P}_0(H^{(\nu)}_{\theta}(t)<z)\,dt=\frac{2^{1-\nu}\sqrt{\pi}\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta z)}{\theta\sqrt{2}\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)}\int\limits_{\theta x}^{\infty}\frac{e^{-\mu y}}{(\operatorname{ch} y-\operatorname{ch}(\theta x))^{\nu+1/2}}\,dy.$$

Вычисляя обратное преобразование Лапласа по λ от функции $e^{-\mu y}$ (см. [1], приложение 3), получаем, что при $-1/2<\nu<1/2$

$$p_\nu(t,0,z)\frac{2\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta z)}{\theta^{2\nu+1}}=\frac{d}{dz}\mathbf{P}_0(H^{(\nu)}_{\theta}(t)<z)=$$

$$=\frac{\operatorname{sh}^{2\nu+1}(\theta z)\,e^{-(\nu+1/2)^2\theta^2t/2}}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)\Gamma(1/2-\nu)t^{3/2}}\int\limits_z^{\infty}\frac{y\,e^{-y^2/2t}}{(\operatorname{ch}(\theta y)-\operatorname{ch}(\theta z))^{\nu+1/2}}\,dy.\tag{5.4}$$

По поводу вычисления этой формулы (см. также работы [2] и [6]). Аналогично, основываясь на интегральных представлениях, из (5.2) при $x \leqslant z$ выводим

$$p_\nu(t,x,z)\frac{2\,\mathrm{sh}^{2\nu+1}(\theta z)}{\theta^{2\nu+1}} = \frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(H_\theta^{(\nu)}(t) < z) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\theta\,\mathrm{sh}^{2\nu+1}(\theta z)\,e^{-(\nu+1/2)^2\theta^2 t/2}}{\sqrt{\pi}\,\mathrm{sh}^{2\nu}(\theta x)\Gamma(\nu+1/2)\Gamma(1/2-\nu)t^{3/2}}\times \tag{5.5}$$

$$\times\int\limits_0^x dy_1\int\limits_z^\infty dy_2\frac{e^{-(y_1^2+y_2^2)/2t}(\mathrm{ch}(\theta x)-\mathrm{ch}(\theta y_1))^{\nu-1/2}\Big(y_2\,\mathrm{ch}\,\big(\frac{y_1y_2}{t}\big)-y_1\,\mathrm{sh}\,\big(\frac{y_1y_2}{t}\big)\Big)}{(\mathrm{ch}(\theta y_2)-\mathrm{ch}(\theta z))^{\nu+1/2}}.$$

В [2] дано другое выражение, основанное на ином подходе.

Значения $\nu = -1/2$ и $\nu = 1/2$ являются особыми точками. Так $\nu = -1/2$ отвечает отраженному броуновскому движению, а $\nu = 1/2$ – гиперболическому бесселевскому процессу размерности 3, для которого

$$\frac{d}{dz}\mathbf{P}_x(H_\theta^{(1/2)}(t) < z) = \frac{\mathrm{sh}(\theta z)\,e^{-\theta^2 t/2}}{\mathrm{sh}(\theta x)\sqrt{2\pi t}}\Big(e^{-(z-x)^2/2t} - e^{-(z+x)^2/2t}\Big). \tag{5.6}$$

Для значений ν из интервала $(k+1/2, k+3/2]$, $k = 0, 1, \dots$, выражение для переходных плотностей можно получить за счет следующего приема (см. [2]). Поскольку $(\mu-\nu-1/2)(\mu+\nu+1/2) = 2\lambda/\theta^2$, то по формуле (3.8)

$$\frac{d}{dx}\Big(\frac{P^{-\nu}_{\mu-1/2}(\mathrm{ch}(\theta x))}{\mathrm{sh}^\nu(\theta x)}\Big) = \frac{2\lambda}{\theta}\,\mathrm{sh}(\theta x)\frac{P^{-(\nu+1)}_{\mu-1/2}(\mathrm{ch}(\theta x))}{\mathrm{sh}^{\nu+1}(\theta x)}. \tag{5.7}$$

По формуле (3.7)

$$\frac{d}{dz}\Big(\frac{\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu-1/2}(\mathrm{ch}(\theta z))}{\mathrm{sh}^\nu(\theta z)}\Big) = -\theta\,\mathrm{sh}(\theta z)\frac{\widetilde{Q}^{\nu+1}_{\mu-1/2}(\mathrm{ch}(\theta z))}{\mathrm{sh}^{\nu+1}(\theta z)}. \tag{5.8}$$

Из (5.2) и (5.3) следует, что

$$G^\nu_{\mu_\nu}(0,z) = \frac{\theta^{2\nu}}{2^\nu}\frac{\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu_\nu-1/2}(\mathrm{ch}(\theta z))}{\Gamma(1+\nu)\,\mathrm{sh}^\nu(\theta z)}.$$

Используя запись μ_ν, мы отметили индексом ν тот факт, что эта величина входит в выражение для μ. Из (5.8) получаем

$$\frac{d}{dz}G^{\nu}_{\mu_\nu}(0,z) = -\frac{2(1+\nu)\,\mathrm{sh}(\theta z)}{\theta}G^{\nu+1}_{\mu_\nu}(0,z). \tag{5.9}$$

Поскольку $(\nu+1+\frac{1}{2})^2 = (\nu+\frac{1}{2})^2 + 2(\nu+1)$, то обратное преобразование Лапласа по λ функции $G^{\nu+1}_{\mu_{\nu+1}}(0,z)$ отличается от аналогичного преобразования функции $G^{\nu+1}_{\mu_\nu}(0,z)$ на множитель $e^{-(\nu+1)\theta^2 t}$. Тогда, обращая в равенстве (5.9) преобразование Лапласа по λ, получаем

$$p_{\nu+1}(t,0,z) = -\frac{\theta e^{-(\nu+1)\theta^2 t}}{2(1+\nu)\,\mathrm{sh}(\theta z)}\frac{d}{dz}p_\nu(t,0,z). \tag{5.10}$$

Из (5.2) следует, что

$$G^{\nu}_{\mu_\nu}(x,z) = \theta^{2\nu}\frac{P^{-\nu}_{\mu_\nu-1/2}(\mathrm{ch}(\theta x))}{\mathrm{sh}^{\nu}(\theta x)}\frac{\widetilde{Q}^{\nu}_{\mu_\nu-1/2}(\mathrm{ch}(\theta z))}{\mathrm{sh}^{\nu}(\theta z)},$$

и из (5.7), (5.8) получаем

$$\frac{d}{dx}\frac{d}{dz}G^{\nu}_{\mu_\nu}(x,z) = -\frac{2\lambda}{\theta^2}\,\mathrm{sh}(\theta x)\,\mathrm{sh}(\theta z)G^{\nu+1}_{\mu_\nu}(x,z). \tag{5.11}$$

Обращая в этом равенстве обратное преобразование Лапласа по λ, получаем

$$p_{\nu+1}(t,x,z) = -\frac{\theta^2 e^{-(\nu+1)\theta^2 t}}{2\,\mathrm{sh}(\theta x)\,\mathrm{sh}(\theta z)}\frac{d}{dx}\frac{d}{dz}\int_0^t p_\nu(s,x,z)\,ds. \tag{5.12}$$

Формулы (5.10) и (5.12) позволяют получать выражения для переходной плотности процесса для ν из интервала $[k+1/2, k+3/2]$, $k = 0,1,\dots$, из соответствующих выражений для интервала $[-1/2, 1/2]$.

6. Другие процессы, связанные с функциями Лежандра. Отраженный гиперболический процесс Орнштейна–Уленбека является частным случаем гипергеометрической диффузии при $\nu = -1/2$. Он задается производящим оператором

$$\mathcal{G}f(x) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x) - \frac{\rho}{\theta}\,\mathrm{th}(\theta x)\frac{d}{dx}f(x), \quad x > 0, \tag{6.1}$$

с граничным условием $\frac{d}{dx}f(0+)=0$. В данном случае $\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\rho^2}{\theta^4}+\frac{2\lambda}{\theta^2}}-\frac{\rho}{2\theta^2}$. Применяя соотношение $\widetilde{P}^{\mu}_{\nu}(z)=\widetilde{P}^{\mu}_{-\nu-1}(z)$, формулы (15.4.23) и (15.4.13) из [4], получаем

$$\psi_\lambda(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+1+\rho/\theta^2)}{2^{1-2\alpha-\rho/\theta^2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{ch}^{-\rho/\theta^2}(\theta x)}\Big(\widetilde{P}^{-2\alpha-\rho/\theta^2}_{\rho/\theta^2}(-\mathrm{th}(\theta x))+$$

$$+\widetilde{P}^{-2\alpha-\rho/\theta^2}_{\rho/\theta^2}(\mathrm{th}(\theta x))\Big), \tag{6.2}$$

$$\varphi_\lambda(x)=\frac{2^{2\alpha+\rho/\theta^2}\Gamma(\alpha+1+\rho/\theta^2)}{\mathrm{ch}^{-\rho/\theta^2}(\theta x)}\widetilde{P}^{-2\alpha-\rho/\theta^2}_{\rho/\theta^2}(\mathrm{th}(\theta x)). \tag{6.3}$$

Вронскиан

$$w\Big(\widetilde{P}^{-2\alpha-\rho/\theta^2}_{\rho/\theta^2}(-\mathrm{th}(\theta x)),\widetilde{P}^{-2\alpha-\rho/\theta^2}_{\rho/\theta^2}(\mathrm{th}(\theta x))\Big)=\frac{2\theta}{\Gamma(2\alpha)\Gamma(2\alpha+2\rho/\theta^2)}.$$

Гипергеометрический процесс размерности 3 является частным случаем гипергеометрической диффузии при $\nu=1/2$. Он задается производящим оператором

$$\mathcal{G}f(x)=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}f(x)+\Big(\theta\,\mathrm{cth}(\theta x)-\frac{\rho}{\theta}\,\mathrm{th}(\theta x)\Big)\frac{d}{dx}f(x),\quad x>0. \tag{6.4}$$

В данном случае

$$\alpha=\frac{1}{2}\sqrt{\big(\frac{\rho}{\theta^2}-1\big)^2+\frac{2\lambda}{\theta^2}}-\frac{1}{2}\big(\frac{\rho}{\theta^2}-1\big).$$

Применяя формулы (15.4.26) и (15.4.20) из [4], получаем

$$\psi_\lambda(x)=\frac{\Gamma(\alpha-\frac{1}{2})\Gamma(\alpha+\rho/\theta^2)\,\mathrm{ch}^{\rho/\theta^2}(\theta x)}{2^{3-2\alpha-\rho/\theta^2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{sh}(\theta x)}\Big(\widetilde{P}^{1-2\alpha-\rho/\theta^2}_{\rho/\theta^2}(-\mathrm{th}(\theta x))-$$

$$-\widetilde{P}^{1-2\alpha-\rho/\theta^2}_{\rho/\theta^2}(\mathrm{th}(\theta x))\Big), \tag{6.5}$$

$$\varphi_\lambda(x)=\frac{2^{2\alpha+\rho/\theta^2-1}\Gamma(\alpha+1+\rho/\theta^2)\,\mathrm{ch}^{\rho/\theta^2}(\theta x)}{\mathrm{sh}(\theta x)}\widetilde{P}^{1-2\alpha-\rho/\theta^2}_{\rho/\theta^2}(\mathrm{th}(\theta x)). \tag{6.6}$$

Литература

1. A. N. Borodin, P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae.* Second Edition Birkhäuser, Basel-Boston-Berlin 2002.
2. J.-C. Gruet, *Windings of hyperbolic Brownian motion.* — In book: Exponential Functionals and Principal Values related to Brownian Motion. A collection of research papers, Editor M. Yor., 1997, pp. 35–72
3. Г. Бейтмен, А. Эрдейи, *Высшие трансцендентные функции.* Том 1, М., Наука 1973.
4. М. Абрамовиц, И. Стиган, *Справочник по специальным функциям.* М., Наука 1979.
5. Н. Н. Лебедев *Специальные функции и их приложения.* М., Физ.-мат.-лит. 1963.
6. L. Lao, E. Orsingher, *Hyperbolic and fractional hyperbolic Brownian motion.* — Stochastics, **79**, No. 6 (2007), 505–522.

Borodin A. N. On hypergeometric diffusion.

The paper deals with correspondence between the well-known diffusions and special functions. The new class of diffusions related to hypergeometric functions is defined. The very interesting particular case of this class consist of the hyperbolic Bessel processes.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 28 ноября 2008 г..