Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 360, 2008 г.

А. Л. Чистов

ВЫЧИСЛЕНИЕ СТЕПЕНИ ДОМИНАНТНОГО МОРФИЗМА В НУЛЕВОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ЗА ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ ВРЕМЯ. IV

3. Конструкция элемента из $\mathcal{U}'_0$

В этом разделе[1] в предположениях из теоремы 1 мы построим элементы $L' \in \mathcal{U}'_0$ и λ, удовлетворяющие утверждениям (a)–(d) этой теоремы, но с $\mathcal{U}'_0$ вместо $\mathcal{U}'''_0$ (очевидно, что если построенный элемент L' принадлежит $\mathcal{U}'''_0$, то выполняются первоначальные утверждения (a)–(d)). Пусть $e'_j = L'_j(e_0, \dots, e_r)$, $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, для линейных форм $L'_j \in \overline{k}[X_0, \dots, X_r]$ (в леммах 14 и 15 ниже мы будем рассматривать также случай, когда L'_j имеют коэффициенты из $\overline{K}$; все соответствующие объекты определены в этом случае аналогичным образом с заменой k на K). Пусть $\lambda = (L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, где все $L_j \in \overline{K}[X_0, \dots, X_n]$ – линейные формы. Положим $V_\lambda = V \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, $W_\lambda = W \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$ в $\mathbb{P}^n(\overline{K})$. Обозначим через $A_{\lambda, L'}$ множество изолированных точек пересечения $W_\lambda \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n) \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$ в $\mathbb{P}^n(\overline{K})$. Пусть $N_{\lambda, L'} = \# A_{\lambda, L'}$. Определим $p_{\lambda, L'}$ (соответственно p_λ, p'_λ) согласно формуле (7) (соответственно (14), (15)) из введения, заменяя поле k_v на K (соответственно k на K). Напомним, что $q_v = p'_v$. Положим, как и раньше, $q_\lambda = p'_\lambda$.

Заменим в определении морфизма $p_{L'}$ поле $\overline{k}$ на $\overline{K}$, см. формулу (2) из введения. Пусть $\sigma \leqslant i \leqslant n$ – целое число. Аналогично введению, $W_i(L')$ – объединение всех неприводимых над $\overline{K}$ компонент E многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i)$, таких, что $\dim E = n - s + \sigma - i$ и морфизм $E \setminus \mathcal{Z}(e'_{i+1}, \dots, e'_n) \to \mathcal{Z}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i) = \mathbb{P}^{n-i}(\overline{K})$, индуцированный $p_{L'}$, является доминантным. Для произвольного λ многообразие $W_{\lambda,i}(L')$ является объединением всех неприводимых над алгебраическим замыканием основного поля компонент E многообразия $W_\lambda \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i)$, таких, что $\dim E = n - i$ и морфизм

[1] Мы продолжаем нумерацию разделов, лемм и т.д. из третьей части статьи, см. Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 344 (2007), с. 203–239. Список литературы в настоящей статье – тот же самый, что и в третьей части.

$E \setminus \mathcal{Z}(e'_{i+1}, \dots, e'_n) \to \mathcal{Z}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$, индуцированный $p_{\lambda,L'}$, является доминантным (здесь $\mathcal{Z}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$ – линейное подпространство размерности $n-i$ в проективном пространстве).

Лемма 13. *Пусть* $L'' \in \mathbb{A}^{(n-\sigma+1)(r+1)}(\overline{K})$ *и* $\lambda' = (L'_{s+1}, \dots, L_\sigma) \in \mathbb{A}^{(\sigma-s)(n+1)}(\overline{K})$, *где* $L''_j \in \overline{K}[X_0, \dots, X_r]$, $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, *и* $L'_i \in \overline{K}[X_0, \dots, X_n]$, $s+1 \leqslant i \leqslant \sigma$, *– произвольные линейные формы. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(i) $N_{\lambda',L''} \leqslant \deg q_v \deg W' = D_n$.

(ii) *Пусть* $N_{\lambda',L''} = \deg q_v \deg W'$ *и* x *– произвольная точка из* $A_{\lambda',L''}$. *Положим* $e''_j = L''_j(e_0, \dots, e_r)$ *для* $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$. *Тогда* x *– гладкая точка каждого алгебраического многообразия* W, $\mathcal{Z}(L'_{s+1}), \dots, \mathcal{Z}(L'_\sigma)$, $\mathcal{Z}(e''_{\sigma+1}), \dots, \mathcal{Z}(e''_n)$, *и пересечение касательных пространств этих* $n-s+1$ *алгебраических в точке* x *многообразий трансверсально, т.е. равно* $\{0\}$. *В частности, пересечение* $W \cap \mathcal{Z}(L'_{s+1}, \dots, L'_\sigma)$ *трансверсально.*

Доказательство. Мы предполагаем, не умаляя общности, заменяя при необходимости линейную форму L''_0 на новую, что $A_{\lambda',L''} \cap \mathcal{Z}(L''_0(e_0, \dots, e_r)) = \varnothing$.

Докажем (i). Мы знаем, что $D_n = \deg q_v \deg W'$, см. введение. Очевидно, многообразие $W_n(L'')$ есть объединение всех неприводимых над $\overline{K}$ компонент E многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e''_{\sigma+1}, \dots, e''_n)$, таких, что $\dim E = \sigma - s$ и $E \not\subset \mathcal{Z}(e''_0, e''_{\sigma+1} \dots, e''_n)$. Тогда $A_{\lambda',L''}$ является подмножеством изолированных точек пересечения $W_n(L'') \cap \mathcal{Z}(L'_{s+1}, \dots, L'_\sigma)$. Следовательно, $N_{\lambda',L''} \leqslant \deg W_n(L'')$. Рассмотрим морфизм $p_{v,L'',\sigma} : W_{v,\sigma}(L'') \setminus \mathcal{Z}(e''_0, e''_{\sigma+1}, \dots, e''_n) \to \mathbb{P}^{n-\sigma}(\overline{K_v})$, $(X_0 : \dots : X_n) \mapsto (e''_0, e''_{\sigma+1} : \dots : e''_n)$, определённый над $\overline{K_v}$, где $W_{v,\sigma}(L'')$ определено во введении (надо только расширить сейчас поле $\overline{k}$ до $\overline{K_v}$). Следовательно, $W_{v,\sigma}(L'')$ – объединение некоторых неприводимых компонент многообразия W_v. Тогда морфизм $p_{v,L'',\sigma}$ – доминантный (см. введение), и, очевидно, $W_n(L'') \cap \mathcal{Z}(v_{s+1}, \dots, v_\sigma)$ содержится в множестве изолированных точек $p^{-1}_{v,L'',\sigma}((1 : 0 : \dots : 0))$. Поэтому $\deg W_n(L'') \leqslant \deg p_{v,L'',\sigma}$ согласно лемме 2 из [10]. Обозначим через $q_{v,L'',\sigma}$ ограничение морфизма q_v на $W_{v,\sigma}(L'') \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$.

Рассмотрим морфизм линейной проекции

$$q_{L''} : W' \setminus \mathcal{Z}(L''_0, L''_{\sigma+1}, \dots, L''_n) \to \mathbb{P}^{n-\sigma}(\overline{K}),$$
$$(X_0 : \dots : X_r) \mapsto (L''_0 : L''_{\sigma+1} : \dots : L''_n), \qquad (25)$$

определённый над полем $\overline{K}$. Обозначим через $\widetilde{W}'$ объединение всех неприводимых компонент E_2 многообразия W', таких, что ограничение морфизма $q_{L''}$ на $E_2 \setminus \mathcal{Z}(L''_0, L''_{\sigma+1}, \dots, L''_n)$ является доминантным. Обозначим через $\widetilde{q}$ ограничение $q_{L''}$ на $\widetilde{W}'$. Тогда степень линейной проекции удовлетворяет неравенствам $\deg \widetilde{q} \leqslant \deg \widetilde{W}' \leqslant \deg W'$. Из определений следует, что $p_{v,L'',\sigma} = \widetilde{q} \circ q_{v,L'',\sigma}$. Следовательно, $\deg p_{v,L'',\sigma} = \deg q_{v,L'',\sigma} \deg \widetilde{q} \leqslant \deg q_v \deg W'$. Утверждение (i) доказано.

Чтобы доказать (ii), выберем линейную форму $L'_0 \in k[X_0, \dots, X_n]$, такую, что $A_{\lambda',L''} \cap \mathcal{Z}(L'_0) = \varnothing$. Рассмотрим морфизм

$$\begin{aligned}
&\overline{p}_{\lambda',L''} : W \setminus (\mathcal{Z}(e''_0, e''_{\sigma+1}, \dots, e''_n) \cup \mathcal{Z}(L'_0, L'_{s+1}, \dots, L'_\sigma)) \\
&\longrightarrow (\mathbb{P}^{\sigma-s} \times \mathbb{P}^{n-\sigma})(\overline{k}), \\
&\overline{p}_{\lambda',L''}(z) = \big((L'_0(z) : L'_{s+1}(z) : \ldots : L'_\sigma(z)), (e''_0(z) : e''_{\sigma+1}(z) : \ldots : e''_n(z)) \big).
\end{aligned}$$

Таким образом, $\overline{p}_{\lambda',L''}$ зависит от выбора L'_0. Согласно доказательству утверждения (i), если $N_{\lambda',L''} = \deg q_v \deg W'$, то $N_{\lambda',L''} = \deg W_n(L'') = \deg p_{v,L'',\sigma} = \deg q_v \deg W'$; пересечение $W_n(L'') \cap \mathcal{Z}(L'_{s+1}, \dots, L'_\sigma)$ трансверсально и совпадает с $A_{\lambda',L''}$; $W_v = W_{v,\sigma}(L'')$; всякая неприводимая компонента многообразия $W_{v,\sigma}(L'')$ содержит точку из $W_{v,n}(L'') = W_n(L'') \cap \mathcal{Z}(v_{s+1}, \dots, v_\sigma)$ (напомним, что последнее имеет место по лемме 2 из [10]). Следовательно, всякая неприводимая компонента многообразия $W_\sigma(L'')$ содержит неприводимую компоненту многообразия $W_n(L'')$. Но $W = W_\sigma(L'')$, так как $W_v = W_{v,\sigma}(L'')$. Поэтому всякая неприводимая компонента многообразия W содержит точку из $A_{\lambda',L''}$. Таким образом, по лемме 5 морфизм $\overline{p}_{\lambda',L''}$ является доминантным.

Пусть $\nu_j, \mu_i \in k$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n$. Положим $\lambda'' = (L'_{s+1} - \nu_{s+1}L'_0, \dots, L'_\sigma - \nu_\sigma L'_0)$, $L''' = (L''_0, L''_{\sigma+1} - \mu_{\sigma+1}L''_0, \dots, L''_n - \mu_n L''_0)$. По лемме 2 из [10] существуют $\nu_j, \mu_i \in \overline{k}$, такие, что $\deg q_v \deg W' = N_{\lambda',L''} \leqslant N_{\lambda'',L'''} = \deg \overline{p}_{\lambda',L''}$. С другой стороны, $N_{\lambda'',L'''} \leqslant \deg q_v \deg W'$ согласно (i). Поэтому $\deg \overline{p}_{\lambda',L''} = \deg q_v \deg W'$. Теперь (ii) следует из леммы 2 работы [10], применённой к $\overline{p}_{\lambda',L''}$. Лемма доказана. □

Лемма 14. *Пусть* $\lambda = (L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, *где все* $L_j \in k[X_0, \dots, X_n]$ *– линейные формы. Предположим, что* $\dim W_\lambda = n - \sigma > 0$ *и* W_λ *является неприводимым над* k. *Пусть* $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n)$ *и*

$L'_w \in \overline{k}[X_0, \dots, X_r]$, $w \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, см. выше. Предположим, что $N_{\lambda,L'} \geqslant 1$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(i) *Если e'_0 не обращается в нуль тождественно на $A_{\lambda,L'}$, то морфизм $p_{\lambda,L'}$ (см. введение) является доминантным.*

(ii) *Морфизм q_λ (см. введение) является доминантным.*

(iii) *$N_{\lambda,L'} \leqslant \deg p_{\lambda,L'} \leqslant \deg q_\lambda \deg W'$. Обозначим через $\mathcal{V}_\lambda$ множество всех $L' \in \mathbb{A}^{(n-\sigma+1)(r+1)}(\overline{k})$, таких, что $N_{\lambda,L'} = \deg q_\lambda \deg W'$ и $A_{\lambda,L'} \cap \mathcal{Z}(e'_0) = \emptyset$. Тогда $\mathcal{V}_\lambda$ – непустое определённое над k открытое в топологии Зариского подмножество в $\mathbb{A}^{(n-\sigma+1)(r+1)}(\overline{k})$.*

(iv) *Пусть $N_{\lambda,L'} = \deg q_\lambda \deg W'$ и x – произвольная точка из $A_{\lambda,L'}$. Тогда x является гладкой точкой каждого алгебраического многообразия W_λ, $\mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}), \dots, \mathcal{Z}(e'_n)$, и пересечение касательных пространств этих $n-\sigma+1$ алгебраических многообразий в точке x трансверсально, т.е. равно $\{0\}$.*

(v) $\deg q_\lambda \leqslant \deg q_v$.

Доказательство. Докажем (i). Обозначим через $B_{\lambda,L'}$ подмножество всех точек $x \in A_{\lambda,L'}$, таких, что $e'_0(x) \neq 0$. Предположим, что e'_0 не обращается в нуль тождественно на $A_{\lambda,L'}$. Тогда множество $B_{\lambda,L'}$ непусто. Множество $B_{\lambda,L'}$ инвариантно относительно действия группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$. Следовательно, всякая неприводимая над k компонента многообразия W_λ имеет непустое пересечение с $B_{\lambda,L'}$. Поэтому по лемме 5 морфизм $p_{\lambda,L'}$ (см. формулу (7) из введения) доминантный. Определим морфизм $q_{L'} : W' \setminus \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \to \mathbb{P}^{n-\sigma}(\overline{k})$, заменяя в (25) элемент L'' на L' и поле K на k. Тогда $q_{L'}$ определён над k. Теперь $p_{\lambda,L'}$ может быть представлен как композиция морфизмов $W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n) \to W' \xrightarrow{q_{L'}} \mathbb{P}^{n-\sigma}(\overline{k})$, где $W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n) \to W'$ является ограничением морфизма q_λ. Следовательно, морфизмы q_λ и $q_{L'}$ также доминантные, и $\deg p_{\lambda,L'} = \deg q_\lambda \deg q_{L'} \leqslant \deg q_\lambda \deg W'$. Утверждение (i) доказано.

В дальнейшем в доказательстве утверждений (ii)–(v), заменяя при необходимости линейную форму L_0 на новую, мы будем считать без ограничения общности, что $A_{\lambda,L'} \cap \mathcal{Z}(e'_0) = \varnothing$. Следовательно, $A_{\lambda,L'} = B_{\lambda,L'}$. Теперь (ii) следует из (i).

Заметим, что $\deg q_{L'} = \deg W'$ тогда и только тогда, когда $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) = \varnothing$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Следовательно, множество всех L', таких, что $\deg q_{L'} = \deg W'$, является непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в $\mathbb{A}^{(n-\sigma+1)(r+1)}(\overline{k})$. Поэтому множество $\mathcal{V}_\lambda$ также является непустым (по лемме 2 из [10]) открытым в топологии Зариского подмножеством аффинного пространства. Утверждение (iii) доказано. Множество $\mathcal{V}_\lambda$ инвариантно относительно действия группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ и, следовательно, определено над k. Теперь по лемме 2 из [10] справедливо утверждение (iv).

Определим множество $\mathcal{V}_v$, заменяя в определении $\mathcal{V}_\lambda$ поле k на k_v и λ на v. Тогда $\mathcal{V}_v$ – непустое открытое в топологии Зариского подмножество в $\mathbb{A}^{(n-\sigma+1)(r+1)}(\overline{k_v})$. Для того чтобы доказать (v), мы будем предполагать без ограничения общности, что $L' \in \mathcal{V}_\lambda \cap \mathcal{V}_v$. Тогда (v) следует из утверждения (i) леммы 13. Лемма доказана. $\square$

Лемма 15. *Пусть поле* $\overline{K}$ *снабжено вещественной структурой (см. [13]) и определено отображение стандартной части* $\mathrm{st} : \mathbb{P}^n(\overline{K}) \to \mathbb{P}^n(\overline{k})$. *Пусть* $\lambda = (L_{s+1}, \dots , L_\sigma)$, $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots , L'_n)$, *где все* $L_j \in \overline{K}[X_0, \dots , X_n]$, $L'_w \in \overline{K}[X_0, \dots , X_r]$ *– линейные формы. Пусть* $\mathfrak{l} \subset \mathbb{A}^{(\sigma-s)(n+1)}(\overline{K})$ *– прямая, такая, что* $\lambda \in \mathfrak{l}$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Для всех* $\lambda' \in \mathfrak{l}$, *за исключением не более чем полиномиального от* $d^n(d')^{n-\sigma}$ *числа, выполняется неравенство* $N_{\lambda',L'} \geqslant N_{\lambda,L'}$. *Более того, если* $A_{\lambda,L'} \cap (\mathcal{Z}(e'_0) \cup \overline{V \setminus W}) = \emptyset$, *то для всех* $\lambda' \in \mathfrak{l}$, *за исключением не более чем полиномиального от* $d^n(d')^{n-\sigma}$ *числа,* $\#(A_{\lambda',L'} \setminus (\mathcal{Z}(e'_0) \cup \overline{V \setminus W})) \geqslant N_{\lambda,L'}$.

(b) *Если* λ' *бесконечно близко к* λ *относительно поля* k, *то* $\mathrm{st}(A_{\lambda',L'}) \supset A_{\lambda,L'}$ *и, следовательно,* $N_{\lambda',L'} \geqslant N_{\lambda,L'}$.

(c) *Если* $N_{v,L'} = \deg q_v \deg W'$ *(т.е. если* L' *принадлежит непустому открытому в топологии Зариского подмножеству* $\mathcal{V}_v$ *аффинного пространства* $\mathbb{A}^{(n-\sigma+1)(r+1)}(\overline{k_v})$, *см. доказательство леммы 14), то множество* $\mathcal{V}_{L'}$ *всех* $\lambda \in \mathbb{A}^{(\sigma-s)(n+1)}(\overline{k})$, *таких, что* $N_{\lambda,L'} = \deg q_v \deg W'$, *является непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в* $\mathbb{A}^{(\sigma-s)(n+1)}(\overline{k})$, *определённым над* k.

Доказательство. Пусть $\lambda'' = (L''_{s+1}, \dots , L''_\sigma) \in \mathfrak{l}$ и $\lambda'' \neq \lambda$. Пусть $\mathbb{A}^1(\overline{K})$ имеет координатную функцию Z. Рассмотрим подмногобразие

$$(W \times \mathbb{A}^1(\overline{K})) \cap \mathcal{Z}(L_{s+1} + ZL''_{s+1}, \dots , L_\sigma + ZL''_\sigma) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots , e'_n) \quad (26)$$

пространства $\mathbb{P}^n(\overline{K}) \times \mathbb{A}^1(\overline{K})$. Пусть C – объединение всех неприводимых компонент C_1 многообразия (26), таких, что $C_1 \cap (A_{\lambda,L'} \times \{0\}) \neq \emptyset$. Тогда, поскольку $A_{\lambda,L'}$ конечно, всякая неприводимая компонента C_1 многообразия C является кривой и $\deg C \leqslant d^s 2^{\sigma-s}(d')^{n-\sigma}$ по теореме Безу (степень $\deg C$ есть по определению степень многообразия $C \setminus \mathcal{Z}(L_0)$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n(\overline{K}) \times \mathbb{A}^1(\overline{K})$, где $L_0 \in k[X_0, \dots, X_n]$ – произвольная линейная форма, которая не обращается в нуль тождественно ни на какой неприводимой компоненте кривой C). Естественная линейная проекция $C \to \mathbb{A}^1(\overline{K})$, $((X_0 : \dots : X_n), Z) \mapsto Z$, является доминантной. Следовательно, $\#(C \cap \mathcal{Z}(Z-a)) \geqslant \#(C \cap \mathcal{Z}(Z)) = N_{\lambda,L'}$ для всех $a \in \overline{K}$ за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа. Обозначим через C' объединение всех неприводимых компонент C_2 многообразия (26), таких, что $C_2 \not\subset C$. Тогда по теореме Безу число элементов $\#(C \cap C')$ (соответственно, при условии $A_{\lambda,L'} \cap (\mathcal{Z}(e'_0) \cup \overline{V \setminus W}) = \varnothing$, число элементов $\#(C \cap (C' \cup \mathcal{Z}(e'_0) \cup (\overline{V \setminus W} \times \mathbb{A}^1(\overline{K}))))$ ограничено сверху полиномом от $d^n(d')^{n-\sigma}$. Поэтому для всех $a \in \overline{K}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, $C \cap \mathcal{Z}(Z-a) \subset A_{\lambda^{(a)},L'} \times \{a\}$ (соответственно $C \cap \mathcal{Z}(Z-a) \subset (A_{\lambda^{(a)},L'} \setminus (\mathcal{Z}(e'_0) \cup (\overline{V \setminus W} \times \mathbb{A}^1(\overline{K})))) \times \{a\}$), где $\lambda^{(a)} = (L_{s+1} + aL''_{s+1}, \dots, L_\sigma + aL''_\sigma)$. Отсюда следует (a). Утверждение (b) следует из (a), поскольку λ' из (b) является общей точкой прямой $\mathfrak{l}$ (здесь мы оставляем детали читателю).

Применяя утверждение (a), можно последовательно заменить все коэффициенты линейных форм v_j, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, на коэффициенты из k и получить линейные формы L_j, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, такие, что $N_{\lambda,L'} = \deg q_v \deg W'$ (ср. с алгоритмом редукции к целым коэффициентам из предложения 2 работы [10]). Следовательно, $\mathcal{V}_{L'}$ непусто. Нетрудно доказать (мы оставляем детали читателю), что $\mathcal{V}_{L'}$ является конструктивным множеством (ср. с доказательством леммы 12). Следовательно, $\mathcal{V}_{L'}$ – открытое в топологии Зариского подмножество в $\mathbb{A}^{(\sigma-s)(n+1)}(\overline{k})$ по теореме о неявной функции и утверждению (ii) леммы 13. Наконец, $\mathcal{V}_{L'}$ инвариантно относительно действия группы Галуа $\mathrm{Gal}(\overline{k}/k)$ и, следовательно, определено над k. Лемма доказана. $\square$

Лемма 16. *В условиях теоремы* 1 *предположим, что* $\lambda = (L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, *где все* $L_j \in k[X_0, \dots, X_n]$ – *линейные формы. Предположим, что* $\dim W_\lambda = n - \sigma$, *пересечение* $W \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$ *трансверсально и если* $n - \sigma > 0$, *то* W_λ *неприводимо над* k. *Предположим, что* $\dim(W_\lambda \cap \overline{(V_\lambda \setminus W_\lambda)}) < \dim W_\lambda$, *выполнено условие (16) из введения, морфизм* q_λ *(см. формулу (15) из введения) доминантный и* $\deg q_\lambda = \deg q_v$. *Далее, пусть* $L' \in \mathcal{U}'_{\lambda,0}$. *Тогда* $L' \in \mathcal{U}'_0$.

Доказательство. По определению (см. утверждение (d) теоремы 1 из [10]) $L' \in \mathcal{U}'_{\lambda,0}$ (соответственно $L' \in \mathcal{U}'_0$) тогда и только тогда, когда

$$\#\big((W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1},\dots,e'_n)\big) = \deg(q_\lambda)\deg W', \tag{27}$$

$$(W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1},\dots,e'_n) \cap \mathcal{Z}(e'_0) = \varnothing, \tag{28}$$

$$(W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1},\dots,e'_n) \cap (\overline{V_\lambda \setminus W_\lambda}) = \varnothing, \tag{29}$$

$$\#\big(W' \cap \mathcal{Z}(L'_{\sigma+1},\dots,L'_n)\big) = \deg W'. \tag{30}$$

(соответственно справедливы аналогичные равенства с W_v, V_v, q_v вместо W_λ, V_λ, q_λ; все многообразия рассматриваются в этом случае над полем $\overline{k_v}$). Мы можем предполагать без ограничения общности, что коэффициенты всех линейных форм v_j бесконечно близки к соответствующим коэффициентам линейных форм L_j, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$. Теперь равенства (27)–(30) с V_v, W_v вместо V_λ, W_λ следуют из (27)–(30), леммы 13 и теоремы о неявной функции. Таким образом, $L' \in \mathcal{U}'_0$. Лемма доказана. □

Лемма 17. *Пусть $W_1,\dots,W_\nu$, $\nu \geqslant 2$, – произвольные квазипроективные алгебраические многообразия в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ (или в $\mathbb{A}^n(\overline{k})$). Пусть E является неприводимой над $\overline{k}$ компонентой многообразия $W_1 \cap \dots \cap W_\nu$. Предположим, что пересечение $W_1 \cap \dots \cap W_\nu$ трансверсально в E (см. определение во введении) и $x \in E$ – гладкая точка многообразия $W_1 \cap \dots \cap W_\nu$. Тогда x является гладкой точкой каждого W_i, $i = 1,\dots,\nu$, и пересечение $W_1 \cap \dots \cap W_\nu$ трансверсально в точке x.*

Доказательство. Мы будем предполагать без ограничения общности, что $W_1,\dots,W_\nu$ являются подмногообразиями в $\mathbb{A}^n(\overline{k})$. Многообразие $W_1 \cap \dots \cap W_\nu$ изоморфно $(W_1 \times \dots \times W_\nu) \cap \Delta$, где $(W_1 \times \dots \times W_\nu) \cap \Delta \subset \mathbb{A}^n(\overline{k}) \times \dots \times \mathbb{A}^n(\overline{k}) = \mathbb{A}^{n\nu}(\overline{k})$ и $\Delta = \{(z,\dots,z) \in \mathbb{A}^{n\nu}(\overline{k}) : z \in \mathbb{A}^n(\overline{k})\}$. Пересечение $(W_1 \times \dots \times W_\nu) \cap \Delta$ трансверсально в $(E \times \dots \times E) \cap \Delta$ тогда и только тогда, когда $W_1 \cap \dots \cap W_\nu$ трансверсально в E.

Следовательно, мы будем предполагать, не умаляя общности, что $\nu = 2$ и W_2 – аффинное линейное подпространство. Очевидно, x – гладкая точка многообразия E. Выберем аффинное линейное подпространство $\mathcal{L}$ так, что $x \in \mathcal{L}$, пересечение $E \cap \mathcal{L}$ трансверсально, пересечение $W_2 \cap \mathcal{L}$ трансверсально и x является изолированной точкой пересечения $E\cap\mathcal{L}$. Теперь $i(W_1,W_2\cap\mathcal{L};x)=i(W_1,W_2;E)i(E,\mathcal{L};x)=1$, см. [2]. Поэтому x – гладкая точка многообразия W_1, пересечение W_1 и аффинного линейного подпространства $W_2\cap\mathcal{L}$ в точке x трансверсально. Отсюда следует утверждение леммы. Лемма доказана. □

Мы будем предполагать, что поле $\overline{k}$ снабжено вещественной структурой. Пусть $\varepsilon_j>0$ – бесконечно малая величина относительно поля $k_{j-1}=k(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{j-1})$ для всякого положительного числа j. Тогда алгебраическое замыкание $\overline{k}_j$ (поля k_j) снабжено вещественной структурой естественным образом, и можно рассматривать и решать системы полиномиальных уравнений и неравенств с квадратами абсолютных величин с коэффициентами из $\overline{k}_j$, см. [13]. Отображение стандартной части $\mathrm{st}_j:\mathbb{P}^n(\overline{k_j})\to\mathbb{P}^n(\overline{k})$ определено естественным образом, см. [13].

Пусть λ – из формулировки леммы 14. Предположим, что $L'_j\in k[X_0,\dots,X_r]$, $j\in\{0,\sigma+1,\dots,n\}$. Пусть $0\leqslant\beta\leqslant n$ – целое число. Рассмотрим систему уравнений и неравенств относительно переменных $X_0,\dots,X_n,Y_{\sigma+1},\dots,Y_n,Z_{s+1},\dots,Z_\sigma$ с коэффициентами из поля k_1:

$$\begin{cases} e'_j-Y_je'_0=0, & \sigma+1\leqslant j\leqslant n,\\ L_j-Z_jX_\beta=0, & s+1\leqslant j\leqslant\sigma,\\ \sum_{\sigma+1\leqslant j\leqslant n}|Y_j|^2+\sum_{s+1\leqslant j\leqslant\sigma}|Z_j|^2\leqslant\varepsilon_1, & \\ \sum_{0\leqslant i\leqslant r}|e_j|^2\geqslant\varepsilon_1^{-1}, & \\ e'_0=1. & \end{cases}\tag{31}$$

Лемма 18. *Предположим, что* $\dim W_\lambda=n-\sigma>0$, *алгебраическое многообразие* W_λ *неприводимо над* k, *пересечение* $W\cap\mathcal{Z}(L_{s+1},\dots,L_\sigma)$ *трансверсально и* $L'_j\in k[X_0,\dots,X_r]$, $j\in\{0,\sigma+1,\dots,n\}$. *Пусть* $\deg q_{L'}=\deg W'$ *(см. доказательство леммы* 14*) и* $1\leqslant N_{\lambda,L'}=\deg p_{\lambda,L'}<\deg q_v\deg W'$ *(следовательно,* $A_{\lambda,L'}\cap\mathcal{Z}(e'_0)=\emptyset$ *и морфизмы* q_λ *и* $p_{\lambda,L'}$ *являются доминантными по лемме* 14 (ii) *и* (i)*). Тогда существует* $0\leqslant\beta\leqslant n$, *такое, что система* (31) *имеет решение*

$$(x_0^*,\dots,x_n^*,y_{\sigma+1}^*,\dots,y_n^*,z_{s+1}^*,\dots,z_\sigma^*)\in\overline{k_1}^{2n+1-s},\tag{32}$$

где $x^*=(x_0^*:\dots:x_n^*)\in W(\overline{k_1})$.

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать лемму с k_2 вместо k_1. Пусть $\widetilde{L}_j\in\overline{k(\varepsilon_2)}[X_0,\dots,X_n]$, $s+1\leqslant j\leqslant\sigma$, – линейные формы. Обозначим $\widetilde{\lambda}=(\widetilde{L}_{s+1},\dots,\widetilde{L}_\sigma)$ (мы уточним $\widetilde{\lambda}$ ниже),

$\widetilde{L} = (\widetilde{L}_0, \widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_n)$, где $\widetilde{L}_0 = L'_0$ и $\widetilde{L}_j = L'_j - y^*_j L'_0$ для всех $\sigma+1 \leqslant j \leqslant n$. Заменим в системе (31) каждое уравнение $L_j - Z_j X_\beta = 0$ на $\widetilde{L}_j = 0$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$. Обозначим полученную систему через (*). Мы имеем $\deg p_{v,L'} = \deg q_v \deg W'$, поскольку $\deg q_{L'} = \deg W'$. Следовательно, по лемме 2 из [10] (применённой над полем $\overline{k_v(\varepsilon_2)}$) существуют $y^*_j \in \overline{k(\varepsilon_2)}$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, такие, что все ненулевые y^*_j являются бесконечно малыми величинами относительно поля k и $N_{v,\widetilde{L}} = \deg q_v \deg W'$. Согласно лемме 15 (c), существуют линейные формы $\widetilde{L}_j \in \overline{k(\varepsilon_2)}[X_0, \dots, X_n]$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, такие, что все ненулевые коэффициенты линейных форм $L_j - \widetilde{L}_j$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, являются бесконечно малыми величинами относительно поля k и $N_{\widetilde{\lambda},\widetilde{L}} = \deg q_v \deg W'$. Мы имеем $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) = \emptyset$, так как $\deg q_{L'} = \deg W'$. Теперь, очевидно, $W' \cap \mathcal{Z}(\widetilde{L}_0, \widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_n) = \emptyset$. Следовательно, $A_{\widetilde{\lambda},\widetilde{L}} \cap \mathcal{Z}(\widetilde{e}_0) = \emptyset$, где $\widetilde{e}_0 = e'_0$.

Согласно лемме 14 (iv) и лемме 17, всякая точка $z \in A_{\lambda,L'}$ является гладкой точкой каждого алгебраического многообразия W, $\mathcal{Z}(L_{s+1}), \dots, \mathcal{Z}(L_\sigma)$, $\mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}), \dots, \mathcal{Z}(e'_n)$ и пересечение касательных пространств этих $n-s+1$ алгебраических многообразий в точке z трансверсально, т.е. равно $\{0\}$. Мы имеем $N_{\lambda,L'} = \deg p_{\lambda,L'}$. Следовательно, $A_{\lambda,L'} = W_\lambda \cap \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n)$ по лемме 2 из [10]. Поэтому для всякого $z \in A_{\widetilde{\lambda},\widetilde{L}}$ имеем $\mathrm{st}_2(z) \in A_{\lambda,L'} \cup \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$. Поскольку $N_{\widetilde{\lambda},\widetilde{L}} > N_{\lambda,L'}$, из теоремы о неявной функции следует, что система (*) имеет решение $(x^*_0, \dots, x^*_n, y^*_{\sigma+1}, \dots, y^*_n) \in \overline{k_2}^{2n+1-\sigma}$ с $x^* \in W(\overline{k_2})$. Существует $0 \leqslant \beta \leqslant n$, такое, что $X_\beta(x^*) \neq 0$ и $(X_i/X_\beta)(x^*)$, не являются бесконечно большими величинами относительно поля k для всех $0 \leqslant i \leqslant n$. Положим $z^*_j = ((\widetilde{L}_j - L_j)/X_\beta)(x^*)$. Тогда (32) с k_2 вместо k_1 является решением системы (31) с $x^* \in W(\overline{k_2})$. Лемма доказана. □

Перейдём к описанию алгоритма. Напомним, что дана точка $x^{(0)} \in W$. Мы можем предполагать без ограничения общности, что $x^{(0)} \notin \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$, ср. алгоритм из [10]. Осуществляя перестановки $X_0, \dots, X_n$ и $e_0, \dots, e_r$, мы будем предполагать, не умаляя общности, что $(e_0 X_0)(x^{(0)}) \neq 0$. Применяя теорему 5 из [5], мы строим индексы $1 \leqslant i_\sigma < \ldots < i_n \leqslant r$ и $1 \leqslant j_{s+1} < \ldots < j_\sigma \leqslant n$, такие, что семейство $X_{j_{s+1}}/X_0, \dots, X_{j_\sigma}/X_0$, $e_{i_\sigma}/e_0, \dots, e_{i_n}/e_0 \in k(W)$ алгебраически независимо и σ является минимально возможным. Для удобства обозначений мы будем предполагать без ограничения общности, что $i_w = w$ для $\sigma \leqslant w \leqslant n$ и $j_w = w$ для $s+1 \leqslant w \leqslant \sigma$. Теперь $\dim W = n - s$ и

$\dim W' = n - \sigma$. Применим теорему 2 из [11] к $V \cup \mathcal{Z}(e_0)$ и построим линейные формы $L_0, \dots, L_{n+1}$. Сначала положим $\lambda = (L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, $\overline{\lambda} = (L_0, \dots, L_{n+1})$. Тогда выполняется условие (A) для V и λ, а также справедливо условие (16) из введения.

Предположим, что $n - \sigma = 0$. Тогда положим $L'_0 = X_0$. Очевидно, $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0) = \varnothing$. Следовательно, в этом случае $L' = (L'_0) \in \mathcal{U}'_{\lambda,0} = \mathcal{U}''_{\lambda,0} = \mathcal{U}'''_{\lambda,0} = \mathcal{U}'_{\lambda,n+1} = \mathcal{U}''_{\lambda,n+1} = \mathcal{U}'''_{\lambda,n+1}$. Согласно лемме 16, требуемые λ и L' построены, если $n - \sigma = 0$.

Предположим, что $n - \sigma > 0$. Построенное λ является базой для описываемой ниже рекурсии. Теперь наша цель – построить в конце этой рекурсии по λ

(†) элемент (λ, L'), такой, что $\lambda = (L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$ удовлетворяет условиям леммы 16, условию (A) для V (см. введение), все линейные формы L_j принадлежат $k[X_0, \dots, X_n]$, $s + 1 \leqslant j \leqslant \sigma$, элемент L' удовлетворяет условиям (27)–(30) (с $\deg q_\lambda = \deg q_v$) и все линейные формы L'_w принадлежат $k[X_0, \dots, X_n]$, $w \in \{0, \sigma + 1, \dots, n\}$. Следовательно, $L' \in \mathcal{U}'_{\lambda,0}$ и $L' \in \mathcal{U}'_0$.

Кроме того, все линейные формы $L_j \in k[X_0, \dots, X_n]$, $s + 1 \leqslant j \leqslant \sigma$, и $L'_w \in k[X_0, \dots, X_n]$, $w \in \{0, \sigma + 1, \dots, n\}$, будут иметь целые коэффициенты с длиной записи $O(n \log d + (n - \sigma) \log(d'))$.

Рассмотрим морфизм

$$\begin{aligned} &\pi : W \setminus \mathcal{Z}(X_0 e_0) \to \mathbb{P}^{n-s}(\overline{k}), \\ &(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (1 : X_{s+1}/X_0 : \ldots : X_\sigma/X_0, e_{\sigma+1}/e_0 : \ldots : e_n/e_0). \end{aligned}$$

Построим, применяя алгоритм из теоремы 1 (b) работы [10], точку $z^{(0)} \in \mathbb{P}^{n-s}(\overline{k})$, такую, что

$$\#\pi^{-1}(z^{(0)}) = \deg \pi \quad \& \quad \pi^{-1}(z^{(0)}) \cap (\overline{V \setminus W}) = \varnothing. \tag{33}$$

Для удобства обозначений, осуществляя линейное преобразование координат пространства $\mathbb{P}^{n-s}(\overline{k})$, мы будем предполагать без ограничения общности, что $z^{(0)} = (1 : 0 : \ldots : 0)$. Положим $X^{(0)} = (X_0, X_{\sigma+1}, \dots, X_n)$.

Вычислим, используя [4] и теорему 2 из [9], число $N_{\lambda, X^{(0)}}$. Предположим, что $N_{\lambda, X^{(0)}} = 0$. Пусть τ – целое число. Положим $L_{0,j} = L_j$ для $j \in \{0, \dots, s, \sigma + 1, \dots, n + 1\}$ и $L_{0,j} = L_j + \tau X_j$ для $s + 1 \leqslant j \leqslant \sigma$. Положим $\lambda_0 = (L_{0,s+1}, \dots, L_{0,\sigma})$, $\overline{\lambda_0} = (L_{0,0}, \dots, L_{0,n+1})$. Покажем, что существует не более чем полиномиальное от $d^n(d')^{n-\sigma}$ число элементов τ, таких, что $N_{\lambda_0,X^{(0)}} = 0$. Действительно, пусть $\mathbb{A}^1(\overline{k})$ имеет координатную функцию Z. Рассмотрим подмногобразие

$$(W \times \mathbb{A}^1(\overline{k})) \cap \mathcal{Z}(ZL_{s+1} + X_{s+1}, \dots , ZL_\sigma + X_\sigma) \cap \mathcal{Z}(e_{\sigma+1}, \dots , e_n) \quad (34)$$

в $\mathbb{P}^n(\overline{k}) \times \mathbb{A}^1(\overline{k})$. Пусть C – объединение всех неприводимых компонент C_1 многообразия (34), таких, что $C_1 \cap (\pi^{-1}(z^{(0)}) \times \{0\}) \neq \varnothing$ (так что $C_1 \not\subset \overline{V \setminus W} \times \mathbb{A}^1(\overline{k})$). Тогда (ср. [4]), согласно (33), каждая неприводимая компонента C_1 многообразия C является кривой. По теореме Безу $\deg C \leqslant d^s 2^{\sigma-s}(d')^{n-\sigma}$, ср. доказательство леммы 15. Теперь требуемое утверждение следует из теоремы Безу и леммы 5.

Таким образом, существует такое целое число τ с длиной записи $O(n \log d + (n-\sigma)\log(d'))$, что $N_{\lambda_0,X^{(0)}} > 0$. Применяя лемму 3 из [11] к прямой $\mathfrak{l}$, содержащей $\overline{\lambda}\ \overline{\lambda_0}$, и алгоритм редукции к целым коэффициентам (см. предложение 2 из [10]), мы строим новый элемент λ_1, аналогичный λ, удовлетворяющий условию (A) для V и такой, что $N_{\lambda_1,X^{(0)}} > 0$.

Теперь, заменяя λ на λ_1, мы будем предполагать в дальнейшем, что $N_{\lambda,X^{(0)}} > 0$ и выполняется условие (A) для λ и V. В частности, пересечение $W \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots , L_\sigma)$ трансверсально и неприводимо над k (напомним, что $n-\sigma > 0$). По лемме 14 (ii) морфизм q_λ доминантный. Мы построили λ для базы нашей основной рекурсии. Это рекурсия по λ.

Опишем общий шаг этой рекурсии. Рекурсивное предположение состоит в том, что λ удовлетворяет условию (A) и морфизм q_λ доминантный (напомним здесь, что если $n-\sigma > 0$ и морфизм q_λ доминантный, то справедливо условие (16) из введения). Применяя теорему 1 из [10] к W_λ, строим L', удовлетворяющее равенствам (27)–(30). Так что $N_{\lambda,L'} = \deg q_\lambda \deg W'$. Заметим, что $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots , L'_n) = \varnothing$. Для всякого $0 \leqslant \beta \leqslant n$, используя теорему 2 из [10] (напомним, что она основывается на результатах из [6]), мы выясним, имеет ли система (31) решение $x^* \in W(\overline{k_1})$. Предположим, что такое решение существует для некоторого β. Положим $L^*_j = L_j - z^*_j X_\beta$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, и $\lambda^* = (L^*_{s+1}, \dots , L^*_\sigma)$. Положим $k^* = k(z^*_{s+1}, \dots , z^*_\sigma)$. Заметим, что W_{λ^*} не обязательно неприводимо над k^*. Определим морфизм $p_{\lambda^*,L'}$, заменяя в определении $p_{\lambda,L'}$ элемент λ на λ^* и k на k^*. Морфизм $p_{\lambda,L'}$ является доминантным согласно лемме 14 (i) и (28).

Пусть $z \in A_{\lambda,L'}$. Покажем, что существует точка $z^* \in A_{\lambda^*,L^*}$, такая, что $\mathrm{st}_1(z^*) = z$, т.е. $\mathrm{st}_1(A_{\lambda^*,L^*}) \supset A_{\lambda,L'}$. Согласно лемме 14

(iv) и лемме 17, всякая точка $z \in A_{\lambda,L'}$ является гладкой точкой каждого алгебраического многообразия W, $\mathcal{Z}(L_{s+1}), \dots, \mathcal{Z}(L_\sigma)$, $\mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}), \dots, \mathcal{Z}(e'_n)$ и пересечение касательных пространств этих $n-s+1$ алгебраических многообразий в точке z трансверсально, т.е. равно $\{0\}$. Следовательно, требуемое утверждение следует из теоремы о неявной функции. Аналогично, $\mathrm{st}_1(A_{\lambda^*,L'}) \supset A_{\lambda,L'}$.

Покажем, что морфизм $p_{\lambda^*,L'}$ доминантный. Согласно лемме 1 и предложению 6 из [13], справедливо равенство $\mathrm{st}_1(W_{\lambda^*}) = W_\lambda$. Мы имеем $\deg W_\lambda = \deg W_{\lambda^*} = \deg W$. Поэтому, снова по лемме 1, для всякой неприводимой над $\overline{k}$ компоненты E многообразия W_λ существует единственная неприводимая над $\overline{k^*}$ компонента E^* многообразия W_{λ^*}, такая, что $\mathrm{st}_1(E^*) \supset E$ (поскольку если E^* не единственна, то $\deg W_{\lambda^*} > \deg W_\lambda$; мы оставляем подробности читателю). Морфизм $p_{\lambda,L'}$ доминантный, и $N_{\lambda,L'} = \deg p_{\lambda,L'}$. Следовательно, по лемме 2 из [10] существует точка $z \in E \cap A_{\lambda,L'}$. Как мы доказали, существует точка $z^* \in A_{\lambda^*,L'}$, такая, что $\mathrm{st}_1(z^*) = z$. Тогда $z^* \in E^*$, по лемме 1 и так как z является гладкой точкой многообразия W_λ. Мы имеем $A_{\lambda^*,L'} \cap \mathcal{Z}(e'_0) = 0$, поскольку $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) = \varnothing$ согласно (28), (30). Таким образом, морфизм $p_{\lambda^*,L'}$ является доминантным по лемме 5, и требуемое утверждение доказано.

Мы доказали, что алгебраическое многообразие $(W_{\lambda^*} \setminus \mathcal{Z}(e'_0)) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1} - y^*_{\sigma+1}e'_0, \dots, e'_n - y^*_n e'_0)$ содержит $N_{\lambda,L'}$ изолированных точек, таких, что координаты каждой из них удовлетворяют неравенству $\sum_{0\leqslant i\leqslant r} |e_i|^2 < \varepsilon_1^{-1}$ (эти точки бесконечно близки к соответствующим точкам из $A_{\lambda,L'}$). Кроме того, существует решение системы (31), которое отлично от всех этих точек. Следовательно, по лемме 2 из [10] имеем $\deg p_{\lambda^*,L'} > N_{\lambda,L'} = \deg p_{\lambda,L'}$. Построим, применяя теоремы 1 и 2 из [9], систему представителей точек неприводимых над k^* компонент алгебраического многообразия V_{λ^*} и выберем среди них точки из W_{λ^*}. Теперь, применяя теорему 1 из [10] для ограничений морфизма $p_{\lambda^*,L'}$ на неприводимые над k^* компоненты E^* многообразия W_{λ^*}, мы вычисляем для всякой E^* степень $\deg p_{\lambda^*,L'}$ и точку z' из формулировки утверждения (b) теоремы 1 работы [10] с $p_{\lambda^*,L'}|_{E^*}$ вместо ρ.

Далее, согласно алгоритму редукции к целым коэффициентам (см. предложение 2 из [10]), рассматривая прямые, проходящие через пары точек z', соответствующие различным компонентам E^*, и применяя утверждение (d) теоремы 1 из [10], мы можем построить новую точку, которая аналогична всем z' и является одной и той же для всех компонент E^*. Так что мы будем предполагать без ограничения общности, что точка z' является одной и той же для всех компонент E^*. Обозначим $z' = (1 : z'_{\sigma+1} : \dots : z'_n)$. Следовательно, все z'_j – целые числа с длиной записи $O(n \log d + (n-\sigma)\log(d'))$. Положим $L''_j = L'_j - z'_j L'_0$, $\sigma + 1 \leqslant j \leqslant n$, и $L'' = (L'_0, L''_{\sigma+1}, \dots , L''_n)$. Тогда, согласно утверждению (b) теоремы 1 из [10], $N_{\lambda^*,L''} = \deg p_{\lambda^*,L''} > N_{\lambda,L'}$. Применяя лемму 15 (a), мы последовательно заменяем коэффициенты линейных форм L^*_j, $s + 1 \leqslant j \leqslant \sigma$, на целые числа с длиной записи $O(n \log d + (n-\sigma)\log(d'))$ и получаем линейные формы L'_j, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$ (обозначим $\lambda' = (L'_{s+1}, \dots , L'_\sigma)$), такие, что $N_{\lambda',L''} \geqslant N_{\lambda^*,L''} > N_{\lambda,L'}$.

Применяя лемму 3 из [11], алгоритм редукции к целым коэффициентам и лемму 15 (a), мы получаем λ'', аналогичное λ', такое, что выполняется условие (A) для λ'' и V и $N_{\lambda'',L''} \geqslant N_{\lambda',L''} > N_{\lambda,L'}$. Следовательно, морфизм $q_{\lambda''}$ доминантный согласно лемме 14 (ii). Мы имеем $N_{\lambda,L'} = \deg q_\lambda \deg W'$ согласно нашей конструкции и $N_{\lambda'',L''} \leqslant \deg q_{\lambda''} \deg W'$ по лемме 14 (iii). Следовательно, $\deg q_{\lambda''} > \deg q_\lambda$. Чтобы избежать роста длин записи коэффициентов при рекурсии, снова применяя лемму 3 из [11], алгоритм редукции к целым коэффициентам и лемму 15 (a), мы последовательно заменяем все коэффициенты линейных форм L''_j, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, из λ'' на целые числа с длиной записи $O(n \log d + (n - \sigma)\log(d'))$, получаем новые линейные формы L'''_j и элемент $\lambda''' = (L'''_{s+1}, \dots , L'''_\sigma)$, который аналогичен λ''. Теперь мы заменяем λ на λ''' и переходим к следующему шагу рекурсии. Заметим, что по лемме 14 (v) существует не более чем $\deg q_v$ шагов с $N_{\lambda'',L''} > N_{\lambda,L'}$ в конце.

Таким образом, в заключение мы придем к случаю, когда для всякого $0 \leqslant \beta \leqslant n$ система (31) не имеет решения с $x^* \in W(\overline{k_1})$. Тогда по леммам 16 и 18 мы построили (λ, L'), удовлетворяющие (†). Рассматриваемый шаг рекурсии является заключительным. Время работы описанного алгоритма удовлетворяет оценке для времени работы из теоремы 1. Это вытекает из оценок на время работы использованных алгоритмов.

Замечание 6. Пусть $\lambda = (L_{s+1}, \dots , L_\sigma)$, где все $L_j \in k[X_0, \dots , X_n]$ – линейные формы. Тогда можно выяснить, удовлетворяет ли λ условиям леммы 16, вычисляя $\deg q_v$ при помощи описанного алгоритма и используя результаты работ [9, 10]. Если выполнены условия леммы 16, то, применяя алгоритм из [10], можно построить $L' \in \mathcal{U}'_{\lambda,0}$, удовлетворяющее условию (10) из введения для всех $\sigma \leqslant i \leqslant n - 1$ с W_λ, $W_{\lambda,i}(L')$ вместо W, $W_i(L')$ соответственно. Предположим дополнительно, что для всякой неприводимой компоненты E многообразия $(W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i)$ пересечение $E \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$ непусто для всякого $\sigma \leqslant i \leqslant n-1$. Тогда (мы можем предполагать, не умаляя общности, что все коэффициенты всех линейных форм $U_j - L'_j$, $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, являются бесконечно малыми величинами относительно поля k) по лемме 14 (iv), лемме 1, теореме о неявной функции и лемме 5 выполняется условие (10) из введения для всех $\sigma \leqslant i \leqslant n-1$ для W_v, $W_{v,i}(L')$ вместо W, $W_i(L')$. Следовательно, первоначальное условие (10) из введения справедливо для всех $\sigma \leqslant i \leqslant n-1$. Здесь мы оставляем детали читателю. Мы не будем использовать это замечание в дальнейшем.

Лемма 19. *Пусть $\nu \geqslant 0$ и $m_i \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant \nu$, – целые числа. Предположим, что $f_1^{(i)}, \dots, f_{m_i}^{(i)} \in k[X_0, \dots, X_n]$ – однородные многочлены, аналогичные $f_1, \dots, f_m$, т.е. $f_1^{(i)}, \dots, f_{m_i}^{(i)}$ удовлетворяют тем же самым оценкам для степенй и длин записи коэффициентов, что и $f_1, \dots, f_m$. Пусть $V^{(i)} = \mathcal{Z}(f_1^{(i)}, \dots, f_{m_i}^{(i)})$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Тогда можно построить линейные формы $L_0, \dots, L_{n+1}$ с целыми коэффициентами с длиной записи $O(n \log d + \log \nu)$, такие, что выполняются утверждения теоремы 2 работы [11] для $V^{(i)}$ вместо V для всех $0 \leqslant i \leqslant \nu$ (т.е. линейные формы $L_0, \dots, L_{n+1}$ не зависят от i; другие объекты из утверждения этой теоремы для $V^{(i)}$ зависят от i). Время работы этого алгоритма полиномиально от d^n, d_1, d_2, M, M_1, m, ν.*

Доказательство. Это следует из леммы 3 работы [11] и алгоритма редукции к целым коэффициентам, см. предложение 2 из [10] (мы оставляем подробности читателю). Лемма доказана. □

Для произвольного квазипроективного многообразия $E \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ и точки $x \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$ обозначим через $\mu(x, E)$ кратность точки x на E. Для произвольного проективного многобразия $V' \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ мы будем обозначать через $\mathrm{con}(V')$ аффинное алгебраическое многообразие в $\mathbb{A}^{n+1}(\overline{k})$, которое является множеством всех нулей однородного идеала многообразия V'.

Лемма 20. *Пусть $\nu > \nu_0 \geqslant 0$ – целые числа. Предположим, что $f_1^{(i)}, \dots, f_{m_i}^{(i)} \in k[X_0, \dots, X_n]$, $V^{(i)}$, $W^{(i)}$, s_i, $x_i^{(0)}$ для $0 \leqslant i \leqslant \nu$ аналогичны $f_1, \dots, f_m$, V, W, s, $x^{(0)}$ из введения. Предположим, что $f_1^{(i)}, \dots, f_{m_i}^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant \nu$, удовлетворяют тем же самым оценкам на степени и длины записи коэффициентов, что и $f_1, \dots, f_m$. Тогда* *можно построить линейные формы $L_0, \dots, L_{n+1}$ из формулировки леммы 5 работы* [11] *(см. также замечание 7 ниже), удовлетворяющие дополнительно следующим условиям. Для всякого $0 \leqslant j \leqslant \nu_0$, $\nu_0 + 1 \leqslant i \leqslant \nu$ для всякого $y \in W^{(i)} \cap \mathcal{Z}(L_{s_i+1}, \dots, L_n)$ выполняется равенство $\mu(y, W^{(j)}) = \min\{\mu(x, W^{(j)}) : x \in W^{(i)}\}$. Время работы этого алгоритма полиномиально от d^n, d_1, d_2, M, M_1, m, ν и суммы длин записи $\sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant \nu} \mathrm{L}(x_i^{(0)})$ точек $x_i^{(0)}$.*

Доказательство. Мы опишем рекурсивный алгоритм относительно $L'_0, \dots, L'_{n+1} \in k[X_0, \dots, X_n]$ и точки $z' = (1 : z'_1, \dots, z'_n) \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$. Положим $\overline{\lambda'} = (L'_0, \dots, L'_{n+1})$.

Построим, используя лемму 5 из [11], линейные формы $L'_0, \dots, L'_{n+1}$ (мы изменяем здесь обозначение L_w на L'_w). Обозначим через $\varphi^{(i)}$ морфизм линейной проекции $\mathbb{P}^n(\overline{k}) \setminus \mathcal{Z}(L'_0, L'_{s_i+1}, \dots, L'_n) \to \mathbb{P}^{n-s_i}(\overline{k})$, $(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (L'_0 : L'_{s_i+1} : \ldots : L'_n)$, и через φ_i ограничение морфизма $\varphi^{(i)}$ на $W^{(i)}$. Тогда φ_i – конечная доминантная линейная проекция. Положим $P_i(z') = \varphi_i^{-1}((1 : z'_{s_i+1} : \ldots : z'_n)) \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ и

$$\mu(z') = \sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu_0} \sum_{\nu_0+1 \leqslant i \leqslant \nu} \sum_{x' \in P_i(z')} \mu(x', W^{(j)})$$

(мы будем использовать это определение также для других точек из $\mathbb{P}^n(\overline{k_2})$ вместо $z' \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$, заменяя k на k_2).

Мы берём построенные $L'_0, \dots, L'_{n+1}$ и $z' = (1 : 0 : \ldots : 0)$ как базу рекурсии. Рекурсивное предположение состоит в том, что линейные формы $L'_0, L'_1 - z'_1 L'_0, \dots, L'_n - z'_n L'_0, L'_{n+1}$ (вместо $L_0, \dots, L_{n+1}$) удовлетворяют утверждению леммы 5 из [11].

Опишем общий шаг этой рекурсии. Для всякого $\nu_0 + 1 \leqslant i \leqslant \nu$, применяя теорему 2 из [10] и теорему 2 из [9], мы вычисляем множество $P_i(z')$.

Покажем, что, используя [5] и [9], можно вычислить кратность $\mu(x, W^{(j)})$ для всякой точки x' и всякого j. Мы сошлёмся на лемму 18 из [5]. В условиях и обозначениях этой леммы, $\mu(x, V_{s+1}) = \deg V_{s+1} - \#A$, где $A = (V_{s+1} \setminus \{x\}) \cap \mathcal{Z}(L_{s+2}, \dots, L_n)$ – конечное множество, см. формулу (21) из [5]. Далее, для определённой над k и неприводимой над k компоненты W многообразия V_{s+1} имеем $\mu(x, W) = \deg W - \#A(W)$, где $A(W) = (W \setminus \{x\}) \cap \mathcal{Z}(L_{s+2}, \dots, L_n)$ (в [5] имеются две очевидные опечатки, которые немедленно исправляются, исходя из контекста; именно, в формуле (21) из [5], определяющей A, надо заменить V_{s+1} на $(V_{s+1}\setminus\{x\})$, а ниже в аналогичной формуле для $A(W)$ следует заменить W на $(W\setminus\{x\}))$. Если известна точка $z^{(0)}\in W$, то можно вычислить $\deg W$ и $\#A(W)$, применяя теорему 2 из [9]. Таким образом, можно вычислить $\mu(x,W)$. Мы используем данный алгоритм для $(V^{(j)},W^{(j)},x_j^{(0)},x')$ вместо $(V,W,z^{(0)},x)$ и вычисляем все требуемые кратности $\mu(x',W^{(j)})$. После этого мы строим $\mu(z')$. В дальнейшем мы вычисляем $\mu(z^*)$ аналогичным образом для других точек $z^*=(1:z_1^*:\ldots:z_n^*)$ в случае, когда $z_j^*\in\overline{k}_2$.

На рекурсивном шаге мы перебираем i,x',j, такие, что $\nu_0+1\leqslant i\leqslant\nu$, $x'\in P_i(z')$ и $0\leqslant j\leqslant\nu_0$. Для рассматриваемых $x'\in P_i(z')$, j мы осуществляем следующую конструкцию.

Применяя теорему 2 работы [10] к алгебраическому многообразию $(\mathrm{con}(V^{(i)})\times\mathrm{con}(V^{(j)}))(\overline{k_2})$, мы выясняем, существует ли пара $(x'',x''')\in(W^{(i)}\times W^{(j)})(\overline{k_2})$, такая, что

$$\begin{cases}\sum\limits_{0\leqslant w\leqslant n}|(X_w/L'_0)(x'')-(X_w/L'_0)(x')|^2\leqslant\varepsilon_1,\\ \varepsilon_2\leqslant\sum\limits_{0\leqslant w\leqslant n}|(X_w/L'_0)(x'')-(X_w/L'_0)(x''')|^2\leqslant\varepsilon_1,\\ \varphi^{(j)}(x'')=\varphi^{(j)}(x''')\end{cases}\tag{35}$$

(ср. с системой (2) из [5]). Если не существует такой пары (x'',x'''), $\dim W^{(i)}\leqslant\dim W^{(j)}$ (т.е. $s_i\geqslant s_j$) и не все i,x',j перебраны, то мы переходим к следующим i,x',j. Предположим, что существует пара $(x'',x''')\in(W^{(i)}\times W^{(j)})(\overline{k_2})$, удовлетворяющая (35). Тогда мы вычисляем $\varphi_i(x'')=(1:z''_{s_i+1}:\ldots:z''_n)$, где $z''_w\in\overline{k_2}$ для всех w. Положим $z''_w=z'_w$ для $1\leqslant j\leqslant s_i$ и $z''=(1:z''_1:\ldots:z''_n)$. Тогда $\mu(z'')<\mu(z')$.

Предположим, что $\dim W^{(i)}>\dim W^{(j)}$ и не существует пары $(x'',x''')\in(W^{(i)}\times W^{(j)})(\overline{k_2})$, удовлетворяющей (35). Тогда мы выясняем, верно ли, что $x'\in W^{(j)}$, используя теорему 2 из [9]. Если $x'\notin W^{(j)}$ и не все i,x',j перебраны, то мы переходим к следующим i,x',j. Предположим, что $x'\in W^{(j)}$. Согласно рекурсивному предположению, теореме 2 из [11] и теореме 1 (a) из [9], в этом случае $x'\notin\overline{V^{(j)}\setminus W^{(j)}}$. Поэтому существует точка $x''\in W^{(i)}(\overline{k_2})$, такая, что

$$\begin{cases}\sum\limits_{0\leqslant w\leqslant n}|(X_w/L'_0)(x'')-(X_w/L'_0)(x')|^2\leqslant\varepsilon_1,\\ \sum\limits_{1\leqslant w\leqslant m_j}|f_w^{(j)}((X_0/L'_0)(x''),\ldots,(X_n/L'_0)(x''))|^2=\varepsilon_2.\end{cases}$$

Мы строим такую точку x'', применяя теорему 2 из [10] к алгебраическому многообразию $(\mathrm{con}(V^{(i)}))(\overline{k_2})$. Теперь $x'' \in W^{(i)}(\overline{k_2}) \setminus W^{(j)}(\overline{k_2})$ и, следовательно, $\mu(x'', W^{(j)}) < \mu(x', W^{(j)})$. Вычислим $\varphi_i(x'') = (1 : z''_{s_i+1} : \ldots : z''_n)$, где $z''_w \in \overline{k_2}$ для всех w. Положим $z''_w = z'_w$ для $1 \leqslant j \leqslant s_i$ и $z'' = (1 : z''_1 : \ldots : z''_n)$. Тогда $\mu(z'') < \mu(z')$.

Вернёмся к общему случаю, когда $\dim W^{(i)}$, $\dim W^{(j)}$ – произвольные. Предположим, что точка z'' построена в каком-либо из случаев, рассматренных выше. Нетрудно видеть, например, при помощи [5], что для произвольной прямой $\mathfrak{l} \subset \mathbb{P}^n(\overline{k_2})$ и любой точки $x^* \in \mathfrak{l}$, число элементов $x^{**} \in \mathfrak{l}$ с $\mu(x^{**}, W^{(j)}) > \mu(x^*, W^{(j)})$ ограничено сверху полиномом от d^n (ср. также с доказательством леммы 1 из [8]). Следовательно, применяя лемму 3 из [11] и алгоритм редукции к целым коэффициентам (см. предложение 2 из [10]) к точкам z'' и $(1 : 0 : \ldots : 0)$, можно построить точку $\widetilde{z} = (1 : \widetilde{z}_1 : \ldots : \widetilde{z}_n) \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$ с целыми $\widetilde{z}_w$ с длиной записи $O(n \log d + \log \nu)$, такую, что $\mu(\widetilde{z}) \leqslant \mu(z'')$ и линейные формы $L'_0, L'_1 - \widetilde{z}_1 L'_0, \ldots, L'_n - \widetilde{z}_n L'_0, L'_{n+1}$ удовлетворяют утверждению леммы 5 из [11] (вместо L_w, $0 \leqslant w \leqslant n+1$). Тогда мы заменяем z' на $\widetilde{z}$ и переходим к следующему шагу рекурсии с тем же самым $\overline{\lambda'}$.

В заключение мы придём к шагу, когда для всех $\nu_0 + 1 \leqslant i \leqslant \nu$ для всех $x' \in P_i(z')$, $0 \leqslant j \leqslant \nu_0$ точка z'' не строится алгоритмом. Тогда, очевидно, $\mu(x', W^{(j)}) = \min\{\mu(x, W^{(j)}) : x \in W^{(i)}\}$ для всех $0 \leqslant j \leqslant \nu_0$. Этот шаг является заключительным. Мы полагаем $L_0 = L'_0$, $L_{n+1} = L'_{n+1}$ и $L_j = L'_j - z'_j L'_0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Теперь $L_0, \ldots, L_{n+1}$ удовлетворяют требуемым свойствам согласно конструкции. Требуемая оценка на время работы описанного алгоритма немедленно следует из оценок на время работы использованных алгоритмов. Лемма доказана. □

Замечание 7. Предположим, что в условиях леммы 5 из [11] и леммы 20 сумма степеней всех неприводимых компонент каждого $V^{(i)}$ ограничена сверху числом D. Тогда из леммы 3 работы [11] и алгоритма редукции к целым коэффициентам (см. предложение 2 из [10]) следует, что можно построить линейные формы $L_0, \ldots, L_{n+1}$ (из формулировок этих лемм) с целыми коэффициентами с длиной записи $O(n + \log D + \log \nu)$.

Лемма 21. *Пусть дано* $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n)$, *где* L'_j, $j \in \{0, \sigma+1, \ldots, n\}$, *являются линейными формами с коэффициентами из конечного расширения* k' *поля* k, *которое задано примитивным элементом и его минимальным многочленом. Пусть* $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n)$, *где* *все* $L'_j \in k[X_0, \dots, X_n]$ *– линейные формы, такие, что* $\deg_{t_\gamma} L'_j \leqslant d''_2$, $1 \leqslant \gamma \leqslant l$, *и* $\mathrm{l}(L'_j) \leqslant M''$ *для всех* $j = 0, \sigma+1, \dots, n$ *(см. введение). Тогда можно выяснить, верно ли, что* $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathcal{U}'_0$. *Если это верно, то можно вычислить* $\lambda = (L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, *удовлетворяющее условию (A) (см. введение), условиям леммы* 16 *и такое, что* $L' \in \mathcal{U}'_{\lambda,0}$, *все* $L_j \in k[X_0, \dots, X_r]$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, *– линейные формы с целыми коэффициентами с длиной записи* $O(n \log d + (n-\sigma)\log d')$. *Время работы этого алгоритма полиномиально от* d^n, $(d')^n$, d_1, d_2, d'_2, M, M', M_1, m, r, *длины записи* $\mathrm{L}(x^{(0)})$ *точки* $x^{(0)}$ *и длины записи* $\mathrm{L}(L')$ *элемента* L' *(включая длину записи примитивного элемента минимального элемента расширения* $k' \supset k$*).*

Доказательство. Сначала, используя описанный алгоритм, вычисляем $\deg q_v$ и $\deg W'$. После этого, применяя теорему 1 из [9] к алгебраическому многообразию $V \cup \mathcal{Z}(e'_0)$ (соответственно $V \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n)$), строим линейные формы и системы представителей точек неприводимых над k компонент этого алгебраического многообразия.

Пусть $W^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant \nu_0$, – все неприводимые над k компоненты многообразия $V \cup \mathcal{Z}(e'_0)$. Пусть $W^{(i)}$, $\nu_0 + 1 \leqslant i \leqslant \nu$, – все неприводимые над k компоненты многообразия $V \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n)$, такие, что $\dim W_i = \sigma - s$. Тогда ν ограничено сверху полиномом от $d^n (d')^{n-\sigma}$ по теореме Безу. Положим $V^{(i)} = V \cup \mathcal{Z}(e'_0)$ для $0 \leqslant i \leqslant \nu_0$ и $V^{(i)} = V \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n)$ для $\nu_0 + 1 \leqslant i \leqslant \nu$. По теоремам 1 и 2 из [9] мы строим семейство точек $x_i^{(0)} \in W^{(i)}$, которые являются гладкими точками многообразия $V^{(i)}$. Теперь можно применить лемму 20 с основным полем k' вместо k (в рассматриваемом случае можно легко дать новые оценки вместо d, d_1, d_2, M, M_1 из леммы 20) к построенному семейству $(V^{(i)}, W^{(i)}, x_i^{(0)})$, $0 \leqslant i \leqslant \nu$, и целому числу ν_0. Таким образом, мы получаем линейные формы $L_0, \dots, L_{n+1}$. Пусть $0 \leqslant j \leqslant \nu_0$ и $\nu_0 + 1 \leqslant i \leqslant \nu$. Теперь $W^{(i)} \subset W^{(j)}$ тогда и только тогда, когда $W^{(i)} \cap \mathcal{Z}(L_{n-\sigma+s+1}, \dots, L_n) \subset W^{(j)}$. Следовательно, можно выяснить, верно ли, что $W^{(i)} \subset W^{(j)}$, применяя теорему 2 из [9]. Поэтому можно выбрать среди $W^{(i)}$, $\nu_0 + 1 \leqslant i \leqslant \nu$, все неприводимые компоненты E, такие, что $E \subset W$, $E \not\subset \mathcal{Z}(e'_0)$ и $E \not\subset W^{(j)}$ всякий раз, когда $W^{(j)} \neq W$, $0 \leqslant j \leqslant \nu_0$. Мы имеем $\deg E = \#(E \cap \mathcal{Z}(L_{n-\sigma+s+1}, \dots, L_n))$. Следовательно, можно вычислить степень δ объединения всех таких неприводимых компонент E. По лемме 20 имеем $L' \in \mathcal{U}'_0$ в том и только в том случае, если

$\delta = \deg q_v \deg W'$. Положим $\lambda = (L_{n-\sigma+s+1}, \dots, L_n)$ для построенных линейных форм L_w. В заключение, если $\delta = \deg q_v \deg W'$, то $L' \in \mathcal{U}'_{\lambda,0}$ согласно описанной конструкции и лемме 20. Оценка на длину записи целых коэффициентов линейных форм L_j следует из леммы 5 работы [11] и замечания 7. Лемма доказана. $\square$

4. Конструкция элемента из $\mathcal{U}'''_{n+1}$

Мы будем использовать обозначения из введения. Пусть задано $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathcal{U}'_0$, например, элемент, построенный в §3. Мы будем предполагать, что все линейные формы L'_j имеют коэффициенты из k. Элемент L' будет в алгоритме изменяться рекурсивно. Наша цель – получить в конце рекурсии элемент $L' \in \mathcal{U}''_0$.

Напомним, что $e'_j = L'_j(e_0, \dots, e_r)$, $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$. Пусть дано целое число $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n-1$. Это целое число i будет изменяться рекурсивно (это вторая рекурсия). Мы берём $i = \sigma + 1$ в качестве базы этой рекурсии. Рекурсивное предположение здесь состоит в том, что дополнительно $(L'_{\sigma+1}, \dots, L_{i-1}) \in \mathcal{U}''_{i-1}$. Пусть многообразия $\widetilde{V}_j$, $\sigma \leqslant j \leqslant n$, и линейные формы $L_0, \dots, L_{n+1}$ – из формулировки теоремы 1 работы [11]. Положим $S_i = W_{i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n) \cap \mathcal{Z}(e'_i) = \varphi_i^{-1}(z')$, где $z' = (1 : 0 : \ldots : 0) \in \mathbb{P}^{n-\iota}(\overline{k})$, $\iota = i - \sigma + s$, см. §2 из [11]. Построим $L_0, \dots, L_{n+1}$ и S_i, см. §2 из [11]. Как и в §2 из [11], мы предполагаем без ограничения общности, что $L_0(x^{(0)}) \neq 0$. Мы имеем $S_i \cap \mathcal{Z}(L_0) = \varnothing$, $\deg(W_{i-1} \cap \mathcal{Z}(e'_i)) = \#\varphi_i^{-1}(z')$. Положим $S_i^{(0)} = \varphi_i^{-1}(z')$ и $S_i^{(1)} = \varphi_i^{-1}(z') \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$. Следовательно, согласно утверждению (d) теоремы 1 из [11], имеем $S_i^{(1)} = \varphi_i^{-1}(z') \cap (W_i^{(1)}(L') \cup W_i^{(2)}(L'))$ и $\varphi_i^{-1}(z') \setminus S_i^{(1)} = \varphi_i^{-1}(z') \cap (W_i(L') \cup W_i^{(3)}(L'))$.

Как и ранее, мы будем предполагать, что поле $\overline{k}$ снабжено вещественной структурой. Пусть поле $k_j = k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_j)$ – такое же, как и выше, см. §3. Напомним, что определено отображение стандартной части $\mathrm{st}_j : \mathbb{P}^n(\overline{k_j}) \to \mathbb{P}^n(\overline{k})$. Мы предполагаем, что k_j линейно разделено с k_v над k. Пусть $z = (z_0 : \ldots : z_n) \in S_i^{(1)}$, где $z_j \in \overline{k}$ при всех j. Пусть $0 \leqslant \alpha \leqslant r$ – целое число. Рассмотрим систему уравнений и неравенств относительно переменных $X_0, \dots, X_n, Y_{\sigma+1}, \dots, Y_i$ с коэффициентами из поля $\overline{k_2}$:

$$\begin{cases} e'_j - Y_j e_\alpha = 0, & \sigma+1 \leqslant j \leqslant i, \\ \varepsilon_2 \leqslant \sum\limits_{0\leqslant j\leqslant r} |e_j|^2 \leqslant \varepsilon_1, & \\ \sum\limits_{\sigma+1\leqslant j\leqslant i} |Y_j|^2 \leqslant \varepsilon_1, & \\ \sum\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |X_i - (X_i/L_0)(z)|^2 \leqslant \varepsilon_1, & \\ L_0 = 1. & \end{cases} \tag{36}$$

Лемма 22. *Пусть $L' \in \mathcal{U}'_0$ и $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{i-1}) \in \mathcal{U}''_{i-1}$. Предположим, что $W_i^{(3)}(L') = \varnothing$. Тогда $D_i > D(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$ в том и только в том случае, если существуют точка $z = (z_0 : \dots : z_n) \in S_i^{(1)}$ и целое число $0 \leqslant \alpha \leqslant r$, такие, что система (36) имеет решение $(x_0^*, \dots, x_n^*, y_{\sigma+1}^*, \dots, y_i^*) \in \mathbb{A}^{n-\sigma+i+1}(\overline{k}_2)$ с $(x_0^* : \dots : x_n^*) \in W(\overline{k}_2)$. Более точно, для рассматриваемого решения положим*

$$L_j^* = L'_j - y_j^* X_\alpha, \quad e_j^* = L_j^*(e_0, \dots, e_r), \quad \sigma+1 \leqslant j \leqslant i, \tag{37}$$

$$L_j^* = L'_j,\ j \in \{0, i+1, \dots, n\},\ L^* = (L_0^*, L_{\sigma+1}^*, \dots, L_n^*). \tag{38}$$

Тогда $L^* \in \mathcal{U}'_0$, $(L_{\sigma+1}^*, \dots, L_{i-1}^*) \in \mathcal{U}'_{i-1}$, $x^* \in W_i(L^*) \cup W_i^{(3)}(L^*)$ и $D_i(L^*) > D_i(L')$, см. замечание 2 из введения.

Доказательство. Пусть $D_i > D(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$. Существует $\varepsilon > 0$, такое, что ε – бесконечно малая величина относительно поля k_1 и ε_2 – бесконечно малая величина относительно поля $k_1(\varepsilon)$. Расширим основное поле k до $k_2(\varepsilon)$. Так как $\mathcal{U}''_i$ открыто в топологии Зариского, существуют линейные формы $\widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_i \in \overline{k(\varepsilon)}[X_0, \dots, X_n]$, такие, что $(\widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_i) \in \mathcal{U}''_i$ и все ненулевые коэффициенты линейных форм $\widetilde{L}_j - L'_j$, $\sigma+1 \leqslant j \leqslant i$, являются бесконечно малыми величинами относительно поля k.

Положим $\widetilde{e}_j = \widetilde{L}_j(e_0, \dots, e_r)$, $\sigma+1 \leqslant j \leqslant i$. Отображение стандартной части $\mathrm{st}_\varepsilon : \mathbb{P}^n(\overline{k(\varepsilon)}) \to \mathbb{P}^n(\overline{k})$ определено аналогично отображению st_j. По лемме 11 справедливо равенство $\mathrm{st}_\varepsilon(W(\widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_{i-1})) = W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{i-1})$. Следовательно, по лемме 1 всякая неприводимая компонента многообразия $\mathrm{st}_\varepsilon(W(\widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_{i-1}) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{e}_i))$ является неприводимой компонентой многообразия $W(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{i-1}) \cap \mathcal{Z}(e'_i)$.

Покажем, что всякая точка $z \in \varphi_i^{-1}(z') \cap W_i(L')$ является гладкой точкой пересечения $W \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i)$. Действительно, $z \notin$

$\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$ согласно утверждению (d) теоремы 1 из [11] и $W_{i-1}(L')\setminus\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r) = W\cap\mathcal{Z}(e'_{\sigma+1},\dots, e'_{i-1})\setminus\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$, поскольку $(L'_{\sigma+1},\dots,L'_{i-1})\in\mathcal{U}''_{i-1}$, см. введение. Следовательно, достаточно доказать, что z – гладкая точка многообразия $W_{i-1}(L')\cap\mathcal{Z}(e'_i)$. Но это следует из теоремы 1 (b) работы [11]. Требуемое утверждение доказано.

Напомним, что $\iota_j(L')=1$ для всякого $j\in J_i(L')$, $\sigma+1\leqslant i\leqslant n$, см. введение. Следовательно, пересечение алгебраических многообразий $W,\mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}),\dots,\mathcal{Z}(e'_i)$ трансверсально во всякой неприводимой компоненте многообразия $W_i(L')$. Согласно теореме 1 из [11], всякая точка $z\in\varphi_i^{-1}(z')\cap W_i(L')$ является гладкой точкой многообразия $W_i(L')$ и пересечение $W_i(L')$ и $\mathcal{Z}(L_{\iota+1},\dots,L_n)$ трансверсально в z. Теперь, согласно лемме 17, *пересечение $n-s+1$ алгебраических многообразий W, $\mathcal{Z}(e'_j)$, $\sigma+1\leqslant j\leqslant i$; $\mathcal{Z}(L_w)$, $\iota+1\leqslant w\leqslant n$, трансверсально во всякой точке из $\varphi_i^{-1}(z')\cap W_i(L')$.*

Мы утверждаем, что существует неприводимая компонента E' многообразия $W(\widetilde{L}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{L}_i)$, такая, что $\mathrm{st}_\varepsilon(E')\not\subset W(L'_{\sigma+1},\dots,L'_i)$. Действительно, иначе имеем $\mathrm{st}(W(\widetilde{L}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{L}_i)\cap\mathcal{Z}(L_{\iota+1},\dots,L_n))\subset W_i(L')\cap\mathcal{Z}(L_{\iota+1},\dots,L_n) = \varphi_i^{-1}(z')\cap W_i(L')$. Следовательно, по теореме о неявной функции для всякого $z\in\varphi_i^{-1}(z')\cap W_i(L')$ существует единственное $\widetilde{z}$ из пересечения $n-s+1$ алгебраических многообразий W, $\mathcal{Z}(\widetilde{e}_j)$, $\sigma+1\leqslant j\leqslant i$; $\mathcal{Z}(L_w)$, $\iota+1\leqslant w\leqslant n$, такое, что $\mathrm{st}_\varepsilon(\widetilde{z})=z$. Кроме того, рассматриваемое пересечение трансверсально в точке $\widetilde{z}$. Поэтому $\deg W(\widetilde{L}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{L}_i) = \#(W(\widetilde{L}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{L}_i)\cap\mathcal{Z}(L_{\iota+1},\dots,L_n)) = D_i(L'_{\sigma+1},\dots,L'_i) < D_i$. Данное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Теперь $\mathrm{st}(E')$ содержит неприводимую компоненту E'' многообразия $W_i^{(1)}(L')\cup W_i^{(2)}(L')$, и $E'\neq E''$. Существует точка $z\in E''\cap S_i^{(1)}$. Следовательно, существуют $x_0^*,\dots,x_n^*\in\overline{k(\varepsilon)}$, такие, что точка $x^*=(x_0^*:\dots:x_n^*)\in E'\setminus\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$ бесконечно близка к z относительно поля k и $L_0(x_0^*,\dots,x_n^*)=1$. Существует $0\leqslant\alpha\leqslant r$, такое что $e_\alpha(x^*)\neq 0$ и $(e_j/e_\alpha)(x^*)$ – не бесконечно большой элемент относительно поля k для любого $0\leqslant j\leqslant r$. Положим $y_j^*=((\widetilde{e}_j-e'_j)/e_\alpha)(x^*)$, $\sigma+1\leqslant j\leqslant i$. Тогда y_j^* является бесконечно малой величиной относительно поля k для всякого $\sigma+1\leqslant j\leqslant i$. Очевидно, $(x_0^*,\dots,x_n^*,y_1^*,\dots,y_i^*)\in\mathbb{A}^{n-\sigma+i+1}(\overline{k(\varepsilon)})$ – решение системы (36), такое, что $(x_0^*:\dots:x_n^*)\in W(\overline{k(\varepsilon)})$. Следовательно, существует также аналогичное решение этой системы, но с полем $\overline{k}_2$ вместо $\overline{k(\varepsilon)}$.

Обратно, пусть $(x_0^*, \dots, x_n^*, y_1^*, \dots, y_i^*) \in \mathbb{A}^{n-\sigma+i+1}(\overline{k}_2)$ – решение системы (36), такое, что $x^* = (x_0^* : \dots : x_n^*) \in W(\overline{k}_2)$. Положим $\overline{L}_j = L_j - (L_j/L_0)(x^*)L_0$ для $\iota + 1 \leqslant j \leqslant n$. Мы имеем $L^* \in \mathcal{U}_0'$, $(L_{\sigma+1}^*, \dots, L_{i-1}^*) \in \mathcal{U}_{i-1}''$ по лемме 11. Следовательно, справедливо условие (10) из введения для $i-1$, L^* и k_2 вместо i, L' и k. Поэтому (см. введение) $x^* \in (W_i(L^*) \cup W_i^{(3)}(L^*)) \cap \mathcal{Z}(\overline{L}_{\iota+1}, \dots, \overline{L}_n)$. Имеем $\mathrm{st}_2\, x^* \notin W_i(L')$, поскольку иначе $\mathrm{st}_2\, x^* \in W_i(L') \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n)) \cap \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$, что невозможно согласно конструкции из §2 работы [11]. С другой стороны, по теореме о неявной функции (см. выше) существуют $D_i(L')$ изолированных точек из $W_i(L^*) \cap \mathcal{Z}(\overline{L}_{\iota+1}, \dots, \overline{L}_n)$, которые бесконечно близки к соответствующим точкам из $W_i(L') \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \dots, L_n))$. Следовательно, $D_i(L^*) \geqslant D_i(L')$. Предположим, что $x^* \in W_i(L^*)$. Тогда $D_i \geqslant D_i(L^*) > D_i(L')$. Предположим, что $x^* \in W_i^{(3)}(L^*)$. Обозначим через k^* поле, порождённое над k коэффициентами всех линейных форм L_j^*, $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$. Пусть $k_v^* = k_v \otimes_k k^*$ является композитом полей k^* и k_v над k. Тогда по замечанию 6 из [10] с полем $k' = k_v^*$ и W_v вместо W мы имеем $D_i > D_i(L^*) \geqslant D_i(L')$. Лемма доказана. $\Box$

Вернёмся к описанию алгоритма. Используя алгоритм из §2 работы [11], мы выясним, верно ли, что $W_i^{(3)}(L') = \varnothing$. Предположим, что $W_i^{(3)}(L') = \varnothing$. Будем перебирать точки $z \in S_i^{(1)}$ и целые числа $0 \leqslant \alpha \leqslant r$. Для рассматриваемых z и α применим теорему 2 из [10] к алгебраическому многообразию $\mathrm{con}(V) \times \mathbb{A}^{i-\sigma}(\overline{k})$ (с координатными функциями $X_0, \dots, X_n$, $Y_{\sigma+1}, \dots, Y_i$) и полуалгебраическому множеству U'', заданному системой (36). По этой теореме строится конечное множество S'' точек из $\mathrm{con}(V)(\overline{k}_2) \times \mathbb{A}^i(\overline{k}_2)$. Обозначим через π естественную сквозную рациональную проекцию $\mathrm{con}(V) \times \mathbb{A}^i \to \mathrm{con}(V) \to V$. Применяя теорему 2 из [9], мы выясняем, верно ли, что $\pi(S'') \cap W(\overline{k}_2) \neq \varnothing$. По теореме 2 из [10] и лемме 22 имеем $\pi(S'') \cap W(\overline{k}_2) = \varnothing$ для всех $z \in S_i^{(1)}$ и целых чисел $0 \leqslant \alpha \leqslant r$ тогда и только тогда, когда $D_i = D_i(L')$.

Предположим, что $\pi(S'') \cap W(\overline{k}_2) \neq \varnothing$ для текущего $z \in S_i^{(1)}$ и целого числа $0 \leqslant \alpha \leqslant r$. Построим $(x_0^*, \dots, x_n^*, y_{\sigma+1}^*, \dots, y_i^*) \in S''$, такие, что $(x_0^* : \dots : x_n^*) \in W(\overline{k}_2)$. Определим $L_{\sigma+1}^*, \dots, L_i^*$ согласно (37), (38). Построим поле k^*, определённое выше, при помощи алгоритма из [4]. Применяя алгоритм из [5], мы выясняем, верно ли, что $x^* \in W_i(L^*)$.

Предположим, что $x^* \in W_i(L^*)$. Как мы видели в доказательстве леммы 22, $D_i(L^*) > D_i(L')$. По лемме 10 (с полем k_2 вместо k), применяя алгоритм редукции к целым коэффициентам, можно последовательно заменить коэффициенты линейных форм $L_0^*, L_{\sigma+1}^*, \dots, L_n^*$ на целые числа с длинами записи $O(n \log d + (n-\sigma)\log d')$ и получить линейные формы $L_0'', L_{\sigma+1}'', \dots, L_n''$, аналогичные $L_0', L_{\sigma+1}', \dots, L_n'$ и такие, что $D(L_{\sigma+1}'', \dots, L_i'') \geqslant D(L_{\sigma+1}^*, \dots, L_i^*) > D_i(L')$. Положим $L'' = (L_0'', L_{\sigma+1}'', \dots, L_n'')$. Теперь мы заменяем L' на L'' и переходим к следующему шагу описываемой рекурсии с тем же самым i. По теореме Безу для фиксированного i может понадобиться не более $d^s(d')^{i-\sigma}$ шагов, когда $x^* \in W_i(L^*)$.

Предположим, что $x^* \in W_i^{(3)}(L^*)$ или $W_i^{(3)}(L') \neq \varnothing$. Если $W_i^{(3)}(L') \neq \varnothing$, то положим $L^* = L'$, $k^* = k$ (описываемая ниже конструкция слегка упрощается в этом случае). Определим множество $S_i^{(w)}$, $w = 0, 1$, заменяя в определении $S_i^{(w)}$ линейные формы L_j' на L_j^*, $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, и поле k на k^*. Построим множества $S_i^{(w)}(L^*)$, $w = 0, 1$, заменяя в конструкции $S_i^{(w)}$ линейные формы L_j' на L_j^* и поле k на k^*. Вычислим линейную форму $L_i''' \in k[X_0, \dots, X_r]$ с целыми коэффициентами с длиной записи $O(n \log d + (n-\sigma)\log d')$, такую, что $(S_i^{(0)}(L^*) \setminus S_i^{(1)}(L^*)) \cap \mathcal{Z}(L_i'''(e_0, \dots, e_r)) = \emptyset$. Положим $\widetilde{L}_j = L_j^*$ для $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\} \setminus \{i\}$ и $\widetilde{L}_i = L_i^* + \varepsilon_3 L_i'''$. Положим $\widetilde{e}_j = \widetilde{L}_j(e_0, \dots, e_r)$ для всякого j. Тогда все линейные формы $\widetilde{L}_j$ имеют коэффициенты из поля $k^*(\varepsilon_3) \subset \overline{k_3}$. Мы имеем $W_i^{(3)}(\widetilde{L}) \subset W_{i-1}(L^*) \cap W^{(4)}$. Следовательно, $W_i^{(3)}(\widetilde{L})$ – объединение некоторых неприводимых компонент размерности $n - i + \sigma - s$ многообразия $W_{i-1}(L^*) \cap W^{(4)}$. В частности, $W_i^{(3)}(L^*)$ определено над $\overline{k^*}$. Следовательно, $W_i^{(3)}(L^*) \supset W_i^{(3)}(\widetilde{L})$. Так как $\widetilde{L}_i$ не обращается в нуль тождественно ни на какой неприводимой компоненте E многообразия $W_i^{(3)}(L^*)$, имеем $W_i^{(3)}(\widetilde{L}) = \varnothing$. Следовательно, $W_i(\widetilde{L}) \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) = W_{i-1}(L^*) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{e}_i) \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$ над полем $\overline{k_1}$.

Заменим в формулировке леммы 14 из [10] W, $\widetilde{L}$, L', k, ε, $i+1$, s на W_v, $\widetilde{L}$, L^*, k_v^*, ε_3, i, σ соответственно и применим эту лемму. Тогда мы получим $\deg W_i(\widetilde{L}) = \deg W_{v,i}(\widetilde{L}) > \deg W_{v,i}(\widetilde{L}) = \deg W_i(L^*)$.

По лемме 10 (с полем $k^*(\varepsilon_3)$ вместо k), применяя алгоритм редукции к целым коэффициентам, можно последовательно заменить все коэффициенты линейных форм $\widetilde{L}_0, \widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_n$ на целые числа с длинами записи $O(n\log d + (n-\sigma)\log d')$ и получить линейные формы $L_0'', L_{\sigma+1}'', \dots, L_n''$, аналогичные $L_0', L_{\sigma+1}', \dots, L_n'$ и такие, что $D(L_{\sigma+1}'', \dots, L_i'') \geqslant D(\widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_i) > D_i(L')$. Теперь мы заменяем L' на L'' и переходим к следующему шагу описываемой рекурсии с тем же самым i. По теореме Безу для фиксированного i может понадобиться не более $d^s(d')^{i-\sigma}$ шагов, когда $x^* \in W_i^{(3)}(L^*)$ или $W_i^{(3)}(L') \neq \emptyset$.

Предположим, что $\pi(S'') \cap W(\overline{k}_2) = \varnothing$. Тогда мы переходим к следующей паре z, α. Если все пары перебраны, то, как мы видели, $D_i = D_i(L')$. В этом случае, если $i < n$, мы заменяем i на $i+1$ и переходим к следующему шагу рекурсии с тем же самым L'. Наконец, если в рассматриваемом случае $i = n-1$, то $L' \in \mathcal{U}_0''$.

Мы построили $L' \in \mathcal{U}_0''$. Следовательно (см. введение), условия (8) и (10) из введения выполняются для всех $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n-1$. Возьмём это L' как базу новой рекурсии. Наша цель – получить в конце этой рекурсии элемент $L' \in \mathcal{U}_0'''$, такой, что $\pi_{n+1}(L') \in \mathcal{U}_{n+1}'''$, см. введение. Напомним, что $L_{n+1}' = L_0'$. Пусть i – целое число, $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n+1$. Это число i будет меняться рекурсивно (это вторая рекурсия). Рекурсивное предположение здесь состоит в том, что дополнительно $(L_{\sigma+1}', \dots, L_{i-1}) \in \mathcal{U}_{i-1}'''$. Мы берём $i = \sigma+2$ в качестве базы этой рекурсии (напомним, что $\mathcal{U}_{\sigma+1}'' = \mathcal{U}_{\sigma+1}'''$, см. введение). Пусть $L_0, \dots, L_{n+1}$, морфизм φ_i, точка z' – такие же, как и выше. Положим $S_i^{(2)} = \varphi_i^{-1}(z') \cap W_i^{(2)}(L')$. Вычислим $S_i^{(2)}$, используя алгоритмы из §2 работы [11]. Пусть $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant r$ – целые числа и $z \in S_i^{(2)}$. Обозначим для краткости $X^{(w)} = (X_{w,0}, \dots, X_{w,n})$, $w = 1, 2$, и для произвольного многочлена c от $n+1$ переменных положим $c(X^{(w)}) = c(X_{w,0}, \dots, X_{w,n})$. Рассмотрим следующую систему полиномиальных уравнений и неравенств относительно переменных $X_{w,0}, \dots, X_{w,n}$, $w = 1, 2$, $Y_{\sigma+1}, \dots, Y_i$, $Z_{\sigma+1}, \dots, Z_i$ с коэффициентами из поля $\overline{k_4}$:

$$\begin{cases} (e'_j - Y_j e_{\alpha_1} - Z_j e_{\alpha_2})(X^{(w)}) = 0, & \sigma+1 \leqslant j \leqslant i,\ w = 1,2, \\ \sum\limits_{\sigma+1 \leqslant j \leqslant i} (|Y_j|^2 + |Z_j|^2) \leqslant \varepsilon_1, & \\ \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |X_{w,j} - (X_j/L_0)(z)|^2 \leqslant \varepsilon_1, & w = 1,2, \\ \varepsilon_4 \leqslant \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant r} |e'_j(X^{(w)})|^2 \leqslant \varepsilon_3, & w = 1,2, \\ \sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |X_{1,j} - X_{2,j}|^2 \geqslant \varepsilon_2, & \\ \sum\limits_{\iota+1 \leqslant j \leqslant n} |L_j(X^{(1)}) - L_j(X^{(2)})|^2 \leqslant \varepsilon_3, & \\ L_0(X^{(w)}) = 1, & w = 1,2. \end{cases} \tag{39}$$

Лемма 23. *Пусть* $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathcal{U}''_0$ *и* $(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{i-1}) \in \mathcal{U}'''_{i-1}$. *Тогда* $D_i^{(2)} > D_i^{(2)}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$ *в том и только в том случае, если существуют точки* $z \in S_i^{(2)}$ *и целые числа* $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant r$, *такие, что система (39) имеет решение*

$$(x^*_{1,0}, \dots, x^*_{1,n}, x^*_{2,0}, \dots, x^*_{2,n}, y^*_{\sigma+1}, \dots, y^*_i,\ z^*_{\sigma+1}, \dots, z^*_i) \in \mathbb{A}^{2n-2\sigma+2i+2}(\overline{k}_4) \tag{40}$$

с $x^*_w = (x^*_{w,0} : \ldots : x^*_{w,n}) \in W(\overline{k}_4)$ *для* $w = 1,2$.

Доказательство. Предположим, что $D_i^{(2)} > D_i^{(2)}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$. Существует $\varepsilon' > 0$, такое, что ε' – бесконечно малая величина относительно поля $k(\varepsilon_1)$ и ε_2 – бесконечно малая величина относительно поля $k(\varepsilon_1, \varepsilon')$. Существует $\varepsilon'' > 0$, такое, что ε'' – бесконечно малая величина относительно поля $k_3(\varepsilon')$ и ε_4 – бесконечно малая величина относительно поля $k_3(\varepsilon', \varepsilon'')$. Расширим основное поле k до $k_4(\varepsilon', \varepsilon'')$.

Поскольку $\mathcal{U}'''_i$ открыто в топологии Зариского, существуют линейные формы $\widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_n \in \overline{k(\varepsilon')}[X_0, \dots, X_n]$, такие, что

$$(\widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_i) \in \mathcal{U}'''_i$$

и все ненулевые коэффициенты линейных форм $\widetilde{L}_j - L'_j$, $\sigma+1 \leqslant j \leqslant i$, являются бесконечно малыми величинами относительно поля k.

Положим $\widetilde{e}_j = \widetilde{L}_j(e_0,\dots,e_r)$, $\sigma+1 \leqslant j \leqslant i$. По лемме 11 имеем $\mathrm{st}(W^{(2)}(\widetilde{L}_{\sigma+1}\ ,\dots,\widetilde{L}_i)) = W^{(2)}(L'_{\sigma+1},\dots,L'_i)$. По лемме 2 пересечение $W^{(2)}(\widetilde{L}_{\sigma+1}\ ,\dots,\widetilde{L}_i) \cap \mathcal{Z}(L_0, L_{\iota+1},\dots,L_n)$ пусто в $\mathbb{P}^n(\overline{k(\varepsilon')})$. Следовательно (ср. [5]), существуют $z \in S_i^{(2)}$ и $\widetilde{x}_{w,0},\dots,\widetilde{x}_{w,n} \in \overline{k(\varepsilon')}$, такие, что $\widetilde{x}_w = (\widetilde{x}_{w,0} : \dots : \widetilde{x}_{w,n}) \in W^{(2)}(\widetilde{L}_{\sigma+1}\ ,\dots,\widetilde{L}_i)(\overline{k(\varepsilon')})$, $L_0(\widetilde{x}_{w,0},\dots,\widetilde{x}_{w,n}) = 1$, $\sum_{0\leqslant j\leqslant n} |(X_j/L_0)(\widetilde{x}_w) - (X_j/L_0)(z)|^2 < \varepsilon_1$ для $w = 1,2$, $\sum_{0\leqslant j\leqslant n} |\widetilde{x}_{1,j} - \widetilde{x}_{2,j}|^2 > \varepsilon_2$, $(L_j/L_0)(\widetilde{x}_1) = (L_j/L_0)(\widetilde{x}_2)$ для $\sigma+1 \leqslant j \leqslant n$.

Далее, для $w = 1,2$ существуют $x^*_{w,0},\dots,x^*_{w,n} \in \overline{k(\varepsilon',\varepsilon'')}$, такие, что $x^*_w = (x^*_{1,0} : \dots : x^*_{1,n}) \in W(\widetilde{L}_{\sigma+1}\ ,\dots,\widetilde{L}_{i-1})(\overline{k(\varepsilon',\varepsilon'')})$, $L_0(x^*_{w,0},\dots,x^*_{w,n}) = 1$, $\mathrm{st}_{\varepsilon''}(x^*_w) = \widetilde{x}_w$ и $X_{w,j} = x^*_{w,j}$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $w = 1,2$, является решением неравенств $\varepsilon_4 \leqslant \sum\limits_{0\leqslant j\leqslant r} |e'_j(X^{(w)})|^2 \leqslant \varepsilon_3$. Следовательно, согласно нашей конструкции, $X_{w,j} = x^*_{w,j}$ – решение для всех уравнений и неравенств из системы (39), которые не зависят от Y_j и Z_j.

Для всех $0 \leqslant w_1 < w_2 \leqslant r$ положим $\Delta(w_1,w_2) = e_{w_1}(x^*_{1,0},\dots,x^*_{1,n}) \times e_{w_2}(x^*_{2,0},\dots,x^*_{2,n}) - e_{w_2}(x^*_{1,0},\dots,x^*_{1,n}) e_{w_1}(x^*_{2,0},\dots,x^*_{2,n})$. Предположим, что не все $\Delta(w_1,w_2)$ равны 0. Тогда существуют $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant r$, такие, что $\Delta(\alpha_1,\alpha_2) \neq 0$ и $\Delta(w_1,w_2)/\Delta(\alpha_1,\alpha_2)$ не являются бесконечно большими относительно поля k для всех $0 \leqslant w_1 < w_2 \leqslant r$. По правилу Крамера можно записать

$$(e_q - \mu_{q,1} e_{\alpha_1} - \mu_{q,2} e_{\alpha_2})(x^*_w) = 0, \tag{41}$$

где элемент $\mu_{q,w} \in \overline{k(\varepsilon',\varepsilon'')}$ не является бесконечно большим относительно поля k для любого $0 \leqslant q \leqslant r$ и $w = 1,2$.

Предположим, что $\Delta(\alpha_1,\alpha_2) = 0$ для всех $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant r$. Выберем α_1 так, что $(e_q/e_{\alpha_1})(x^*_w)$ не является бесконечно большим относительно поля k для любого $0 \leqslant q \leqslant r$. Запишем

$$e_q(x^*_w) = \mu_q e_{\alpha_1}(x^*_w) \tag{42}$$

для $w = 1,2$. Переставляя индексы, мы можем предполагать без ограничения общности, что $\alpha_1 \leqslant r-1$. В этом случае положим $\alpha_2 = \alpha_1 + 1$ и $z^*_j = 0$, $\sigma+1 \leqslant j \leqslant i$.

Пусть $\widetilde{e}_j = e'_j + \sum_{0\leqslant q\leqslant r} \nu_{j,q} e_q$, где все $\nu_{q,j} \in \overline{k(\varepsilon')}$ – бесконечно малые величины относительно поля k. Согласно (41) или (42), существует решение (40) системы (39) с $\overline{k(\varepsilon',\varepsilon'')}$ вместо $\overline{k}_4$, такое, что

$x_w^* \in W(\overline{k(\varepsilon', \varepsilon'')})$, $w = 1, 2$. Теперь по принципу переноса (см. [12]) или непосредственно мы выводим, что существует также решение (40) с $x_w^* \in W(\overline{k}_4)$, $w = 1, 2$.

Обратно, предположим, что для некоторых $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant r$ существует решение (40), такое, что $x_w^* \in W(\overline{k}_4)$, $w = 1, 2$. Тогда положим $\overline{x}_{w,j} = \mathrm{st}_{\varepsilon_3,\varepsilon_4} x_{w,j}^* \in \overline{k}_2$, $0 \leqslant j \leqslant n$, $w = 1, 2$; $\overline{x}_w = (\overline{x}_{w,0} : \ldots : \overline{x}_{w,n}) \in \mathbb{P}^n(\overline{k}_2)$, $w = 1, 2$; $\overline{y}_j = \mathrm{st}_{\varepsilon_3,\varepsilon_4} y_j^* \in \overline{k}_2$, $\overline{z}_j = \mathrm{st}_{\varepsilon_3,\varepsilon_4} z_j^* \in \overline{k}_2$, $\sigma + 1 \leqslant j \leqslant i$;

$$\overline{L}_j = L'_j - \overline{y}_j X_{\alpha_1} - \overline{z}_j X_{\alpha_2}, \quad \overline{e}_j = \overline{L}_j(e_0, \ldots, e_r), \quad \sigma + 1 \leqslant j \leqslant i; \quad (43)$$

$\widetilde{L}_j = L'_j - y_j^* X_{\alpha_1} - z_j^* X_{\alpha_2}$, $\widetilde{e}_j = \widetilde{L}_j(e_0, \ldots, e_r)$, $\sigma + 1 \leqslant j \leqslant i$. Заметим, что $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$ и $(L_j/L_0)(\overline{x}_1) = (L_j/L_0)(\overline{x}_2)$, $\iota + 1 \leqslant j \leqslant n$, поскольку $\sum\limits_{0 \leqslant j \leqslant n} |x_{1,j}^* - x_{2,j}^*|^2 \geqslant \varepsilon_2$ и $\sum\limits_{\iota+1 \leqslant j \leqslant n} |(L_j/L_0)(x_1^*) - (L_j/L_0)(x_2^*)|^2 \leqslant \varepsilon_3$. Далее, из системы (39) и леммы 11 мы получаем, что $\overline{x}_w \in \mathrm{st}_{\varepsilon_3,\varepsilon_4}(W(\widetilde{L}_{\sigma+1}, \ldots, \widetilde{L}_{i-1}) \cap \mathrm{st}_{\varepsilon_3,\varepsilon_4} \mathcal{Z}(\widetilde{e}_i) \subset W(\overline{L}_{\sigma+1}, \ldots, \overline{L}_{i-1}) \cap \mathcal{Z}(\overline{e}_i)$, $w = 1, 2$. Напомним, что $W_i^{(1)}(L') = W_i^{(1)}(\overline{L}) = W_i^{(1)}$, поскольку $L', \overline{L} \in \mathcal{U}''_0$, см. введение. Имеем $\mathrm{st}_{\varepsilon_1,\varepsilon_2} \overline{x}_w = z \notin W_i(L') \cup W_i^{(1)}(L')$ согласно нашей конструкции. Следовательно, $\overline{x}_w \notin W(\overline{L}_{\sigma+1}, \ldots, \overline{L}_i) \cup W^{(1)}(\overline{L}_{\sigma+1}, \ldots, \overline{L}_i)$, снова по лемме 11. Поэтому $\overline{x}_w \in W^{(2)}(\overline{L}_{\sigma+1}, \ldots, \overline{L}_i)$, $w = 1, 2$. С другой стороны, мы имеем $\mathrm{st}_2(W^{(2)}(\overline{L}_{\sigma+1}, \ldots, \overline{L}_i) = W_i^{(2)}(L')$ по лемме 11 и, очевидно, $\mathrm{st}_2(\mathcal{Z}(L_{\iota+1} - (L_{\iota+1}/L_0)(\overline{z})L_0, \ldots, L_n - (L_n/L_0)(\overline{z})L_0)) = \mathcal{Z}(L_{\iota+1}, \ldots, L_n)$. Предположим, что

$$\deg W^{(2)}(\overline{L}_{\sigma+1}, \ldots, \overline{L}_i) = \deg W_i^{(2)}(L').$$

Тогда по лемме 3 точки из

$$W^{(2)}(\overline{L}_{\sigma+1}, \ldots, \overline{L}_i) \cap \mathcal{Z}(L_{\iota+1} - (L_{\iota+1}/L_0)(\overline{z})L_0, \ldots, L_n - (L_n/L_0)(\overline{z})L_0)$$

и $S_i^{(2)}$ находятся во взаимно однозначном соответствии по правилу $x \mapsto \mathrm{st}_2(x)$. Это противоречит существованию точек $\overline{x}_1 \neq \overline{x}_2$, таких, что $\mathrm{st}_2(\overline{x}_1) = \mathrm{st}_2(\overline{x}_2) = z$. Следовательно, $\deg W^{(2)}(\overline{L}_{\sigma+1}, \ldots, \overline{L}_i) > \deg W_i^{(2)}(L')$ согласно лемме 1. Лемма доказана.

Вернёмся к описанию алгоритма. Будем перебирать точки $z \in S_i^{(2)}$ и пары целых чисел $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant r$. Для рассматриваемых z

и α_1, α_2 применим теорему 2 из [10] к алгебраическому многообразию $\mathrm{con}(V)^2 \times \mathbb{A}^{2i-2\sigma}(\overline{k})$ и полуалгебраическому множеству U'', заданному системой (39). Построим при помощи этой теоремы конечное множество S'' точек многообразия $\mathrm{con}(V)(\overline{k}_4)^2 \times \mathbb{A}^{2i-2\sigma}(\overline{k}_4)$. Обозначим через π естественную рациональную сквозную проекцию $\mathrm{con}(V)^2 \times \mathbb{A}^{2i-2\sigma} \to \mathrm{con}(V)^2 \to V \times V$. Применяя теорему 2 из [9], мы выясняем, верно ли, что $\pi(S'') \cap W(\overline{k}_4)^2 \neq \varnothing$. По теореме 2 из [10] и лемме 22 пересечение $\pi(S'') \cap W(\overline{k}_4)^2$ непусто для всех $z \in S_i^{(2)}$ и пар целых чисел $0 \leqslant \alpha_1 < \alpha_2 \leqslant r$ тогда и только тогда, когда $D_i^{(2)} = D_i^{(2)}(L')$.

Предположим, что $\pi(S'') \cap W(\overline{k}_4)^2 \neq \varnothing$ для текущих $z \in S_i^{(2)}$ и α_1, α_2. Тогда мы строим решение (40) из S'', такое, что $x_w^* \in W(\overline{k}_2)$ для $w = 1, 2$. Определим $\overline{L}_j$ и $\overline{e}_j$ согласно (43). Положим $\overline{L}_j = L'_j$ для $j = 0, i+1, \ldots, n$. Построим все $\overline{L}_j$ и $\overline{e}_j$, см. [13]. Как мы видели в доказательстве леммы 23, $D^{(2)}(\overline{L}_{\sigma+1}, \ldots, \overline{L}_i) > D_i^{(2)}(L')$. По лемме 12 (с полем k_2 вместо k), применяя алгоритм редукции к целым коэффициентам, последовательно заменим все коэффициенты линейных форм $\overline{L}_0, \overline{L}_{\sigma+1}, \ldots, \overline{L}_i$ на целые числа с длинами записи $O(n \log d + (n-\sigma) \log d')$ и получим линейные формы $L''_0, L''_{\sigma+1}, \ldots, L''_n$, аналогичные $L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n$ и такие, что $D^{(2)}(L''_{\sigma+1}, \ldots, L''_i) \geqslant D^{(2)}(\widetilde{L}_{\sigma+1}, \ldots, \widetilde{L}_i) > D_i(L')$. Положим $L'' = (L''_0, L''_{\sigma+1}, \ldots, L''_n)$. Теперь мы заменяем L' на L'' и возвращаемся к началу описываемой рекурсии.

Предположим, что $\pi(S'') \cap W(\overline{k}_2) = \varnothing$. Тогда мы переходим к следующим z, α_1, α_2. Если все z, α_1, α_2 перебраны, то $D_i^{(2)} = D_i^{(2)}(L')$, как мы это видели. В этом случае, если $i < n$, то мы заменяем i на $i+1$ и возвращаемся к началу рекурсии с тем же самым L'. Наконец, если в рассматриваемом случае $i = n$, то $L' \in \mathcal{U}_0'''$ и $\pi_{n+1}(L') \in \mathcal{U}_{n+1}'''$.

Время работы алгоритма этого раздела полиномиально от d^n, $(d')^n$, d_1, d_2, d'_2, M, M', M_1, m, r, длины записи $\mathrm{L}(x^{(0)})$ точки $x^{(0)}$ и суммы длин записи линейных форм L'_j, $\sigma \leqslant j \leqslant n$. В частности, если все линейные формы L'_j имеют целые коэффициенты с длиной записи $O(n \log d + (n-\sigma)\log(d'))$ (как в формулировке теоремы 1 из [10]), то это время работы – то же самое, что и в теореме 1. Это немедленно следует из оценок на время работы использованных алгоритмов.

5. Доказательство теоремы 1

Теперь всё готово для доказательства теоремы 1. Мы доказали утверждение (a) этой теоремы и построили $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathcal{U}'''_0$, такой, что $\pi_{n+1}(L') \in \mathcal{U}'''_{n+1}$, в предыдущем разделе. Докажем утверждение (b) (и, следовательно, также (c) и (d)). Заменим в формулировке теоремы 1 из [11] обозначения $L_0, \dots, L_{n+1}$ на $\widetilde{L}_0, \dots, \widetilde{L}_{n+1}$ (чтобы избежать двусмысленности в дальнейшем). Построим эти линейные формы $\widetilde{L}_0, \dots, \widetilde{L}_{n+1}$ из теоремы 1 работы [11] для рассматриваемого L'.

Напомним некоторые свойства линейных форм $\widetilde{L}_0, \dots, \widetilde{L}_{n+1}$, которые нам потребуются (см. формулировку теоремы 1 из [11] и её доказательство в §2 работы [11]).

(i) $\widetilde{L}_0, \dots, \widetilde{L}_{n+1}$ имеют целые коэффициенты с длиной записи $O(n\log d + (n-\sigma)\log d')$ и удовлетворяют (вместо $L_0, \dots, L_{n+1}$) утверждению (a) теоремы 1 из [11].

(ii) Пересечение алгебраического многообразия $W_{i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e'_i)$ и линейного подпространства $\mathcal{Z}(\widetilde{L}_{\imath+1}, \dots, \widetilde{L}_n)$ трансверсально для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n$.

(iii) Заменим в определениях $\varphi^{(i)}$ и $\mu^{(i)}$ в §3 линейные формы $L_0, \dots,$ L_{n+1} на $\widetilde{L}_0, \dots, \widetilde{L}_{n+1}$. Тогда $\mu^{(i)}((1:0:\dots:0))$ максимально возможное (см. обозначения в §3) для всякого $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n$.

Применим лемму 21 к алгебраическим многообразиям $\widetilde{V}_j \cup \mathcal{Z}(e'_{j+1})$, $\sigma \leqslant j \leqslant n$, вместо $V^{(i)}$, $0 \leqslant i \leqslant \nu$, и построим

(iv) $\lambda = (L_{s+1}, \dots, L_\sigma) \in k[X_0, \dots, X_n]$, удовлетворяющее утверждению леммы 21 для рассматриваемого $L' \in \mathcal{U}'''_0$.

Теперь мы отождествим аффинное пространство $\mathbb{A}^{(n+2)(n+1)}(\overline{k})$ с множеством всех $(n+2)$-наборов линейных форм из $\overline{k}[X_0, \dots, X_n]$. Положим $\lambda_0 = (0, \dots, 0, L_{s+1}, \dots, L_\sigma, 0) \in \mathbb{A}^{(n+2)(n+1)}(\overline{k})$ и $\widetilde{\lambda} = (\widetilde{L}_0, \dots, \widetilde{L}_{n+1})$. Применяя лемму 2 из [11] и алгоритм редукции к целым коэффициентам (их можно применять согласно лемме 15 и теореме 1 (d) из [10]) к прямой $\mathfrak{l}$, содержащей $\widetilde{\lambda}$ и λ_0, мы строим элемент $\lambda^* = (L^*_0, \dots, L^*_{n+1}) \in \mathfrak{l}$, удовлетворяющий (i)–(iii) вместо $\widetilde{\lambda}$ и такой, что выполняется (iv) для $(L^*_{n-\sigma+s+1}, \dots, L^*_n)$ вместо λ. Затем мы заменяем $\widetilde{\lambda}$ на λ^*. Таким образом, в дальнейшем мы будем предполагать без ограничения общности, что $L_j = \widetilde{L}_{j+n-\sigma}$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, и выполняются условия (i)–(iv).

Для всякой неприводимой компоненты E многообразия $W_{\lambda,i}(L')$

существует неприводимая компонента E_1 многообразия

$$W \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i),$$

такая, что $E_1 \supset E$. Очевидно, $E_1 \subset W_i(L')$. Отсюда

$$W_i(L') \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma) \supset W_{\lambda,i}(L'), \quad \sigma \leqslant i \leqslant n \tag{44}$$

(и, более того, эти включения выполняются для любых λ, L', таких, что $W_{\lambda,i}(L')$ и $W_i(L')$ определены).

Мы имеем $L' \in \mathcal{U}_0'''$ и $L' \in \mathcal{U}'_{\lambda,0}$. По лемме 11 из [10] неприводимая компонента E многообразия $W_i(L') \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$ является неприводимой компонентой многообразия $W_{\lambda,i}(L')$ тогда и только тогда, когда E содержит точку из $W_{\lambda,n}(L')$.

Имеем $\deg W_n(L') = \deg p_v \deg W' = \deg W_{\lambda,n}(L')$. Следовательно, по теореме Безу $W_n(L') \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma) = W_{\lambda,n}(L')$. По лемме 11 из [10] для всякой неприводимой компоненты E_0 многообразия $W_{v,i}(L')$ имеем $E_0 \cap W_{v,n}(L') \neq \varnothing$. Следовательно, всякая неприводимая компонента E_1 многообразия $W_i(L')$ содержит неприводимую компоненту E_2 многообразия $W_n(L')$. Согласно (iv), многообразие $E_1 \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$ неприводимо для $i < n$. Следовательно, всякая неприводимая компонента E многообразия $W_i(L') \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$ содержит точку z из $W_{\lambda,n}(L')$. Таким образом,

$$W_{i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma) = W_{\lambda,i-1}(L'), \quad \sigma + 1 \leqslant i \leqslant n + 1. \tag{45}$$

Поскольку $L' \in \mathcal{U}_0''$, условие (10) из введения выполняется для всякого $\sigma+1 \leqslant i \leqslant n-1$. Следовательно, согласно (45), условие (10) из введения справедливо для W_λ, p_λ, L' вместо W, p', L' для всех $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n-1$. Пересечение в левой части равенства (45) трансверсально согласно (i). Отсюда $D_i = D_i(L') = D_{\lambda,i}(L') \leqslant D_{\lambda,i}$ согласно (45) и $D_{\lambda,i} \leqslant D_i$ ввиду (44) с U вместо L'. Следовательно, $D_{\lambda,i} = D_i$.

Пересекая обе части равенства (45) с $\mathcal{Z}(e'_i)$, мы получаем для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n$

$$(W_i(L') \cup W_i^{(1)} \cup W_i^{(2)}(L')) \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma) = W_{\lambda,i}(L') \cup W_{\lambda,i}^{(1)} \cup W_{\lambda,i}^{(2)}(L'). \tag{46}$$

Коразмерность всякой неприводимой компоненты алгебраического многообразия в правой части равенства (46) является суммой коразмерностей двух пересекаемых многообразий из левой части для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n$. Следовательно,

$$W_i^{(2)}(L') \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma) \subset W_{\lambda,i}^{(2)}(L'), \tag{47}$$

$$W_i^{(1)} \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma) \subset W_{\lambda,i}^{(1)} \cup W_{\lambda,i}^{(2)}(L'). \tag{48}$$

Согласно (iii), всякая неприводимая компонента E_3 многообразия $W_i^{(1)} \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots , L_\sigma)$ не содержится ни в какой неприводимой компоненте многообразия $W_j^{(1)}$ для всякого $\sigma + 1 \leqslant j < i$. Поэтому E_3 также не содержится ни в какой неприводимой компоненте многообразия $W_j^{(2)}(L')$ для всякого $\sigma + 1 \leqslant j \leqslant i$. Следовательно, E_3 не содержится ни в какой неприводимой компоненте многообразия $W_j^{(1)} \cup W_j^{(2)}(L')$, $\sigma + 1 \leqslant j \leqslant i$. Пересекая последнее алгебраическое многообразие с $\mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots , L_\sigma)$, мы получаем, что E_3 не содержится ни в какой неприводимой компоненте многообразия $W_{\lambda,j}^{(1)} \cup W_{\lambda,j}^{(2)}(L')$ для всякого $\sigma + 1 \leqslant j \leqslant i$. Таким образом, E_3 не является неприводимой компонентой многообразия $W_{\lambda,i}^{(2)}(L')$. Следовательно, $W_i^{(1)} \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots , L_\sigma) = W_{\lambda,i}^{(1)}$, $W_i^{(2)}(L') \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots , L_\sigma) = W_{\lambda,i}^{(2)}(L')$. Пересечение $W_{i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e_i')$ и линейного подпространства $\mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots , L_\sigma)$ трансверсально. Отсюда $D_i^{(1)} = D_i^{(1)}(L') = D_{\lambda,i}^{(1)}(L') = D_{\lambda,i}^{(1)}$, поскольку условие (10) из введения выполняется для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n - 1$ и также справедливо аналогичное условие для W_λ, p_λ, L' вместо W, p, L' для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n - 1$. Наконец, $D_i^{(2)} = D_i^{(2)}(L') = D_{\lambda,i}^{(2)}(L') \leqslant D_{\lambda,i}^{(2)}$.

Лемма 24. *Пусть λ удовлетворяет условию (A), см. введение. Предположим, что $D_i = D_{\lambda,i}$ для всякого $\sigma \leqslant i \leqslant n$. Тогда $D_i^{(1)} \geqslant D_{\lambda,i}^{(1)}$, $D_i^{(2)} \geqslant D_{\lambda,i}^{(2)}$ для всех $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n$.*

Доказательство. В самом деле, (44) выполнено для U вместо L'. Мы имеем $U \in \mathcal{U}_0''$. Следовательно, аналогичным образом условия (45)–(48) справедливы с U вместо L'. Всякая неприводимая компонента E_3 многообразия $W_i^{(1)} \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots , L_\sigma)$ не является неприводимой компонентой многообразия $W_{\lambda,i}^{(2)}(U)$, поскольку последнее алгебраическое многообразие не имеет неприводимых компонент, определённых над $\overline{k}$. Теперь, заменяя L' на U, мы выводим, как и выше, что $W_i^{(1)} \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots , L_\sigma) = W_{\lambda,i}^{(1)}$, $W_i^{(2)}(U) \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots , L_\sigma) = W_{\lambda,i}^{(2)}(U)$. Поэтому требуемые неравенства следуют из теоремы Безу. Лемма доказана. $\square$

Теперь $D_i^{(2)} = D_i^{(2)}(L') = D_{\lambda,i}^{(2)}(L') = D_{\lambda,i}^{(2)}$ по лемме 24. Применяя алгоритмы из § 2 работы [11], мы доказываем, что можно вычислить

D_i, $D_i^{(1)}$ и $D_i^{(2)}$, $\sigma \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, $L' \in \mathcal{U}'''_{\lambda,0}$ и выполняются утверждения (b)–(d).

Докажем (e). Мы имеем $L' \in \mathcal{U}'''_{\lambda,0}$ и справедливы утверждения (c), (d). Следовательно (см. § 3), $L' \in \mathcal{U}'_0$. Как и ранее, левая часть равенства (45) содержит его правую часть. Поскольку $D_{\lambda,i-1} = D_{i-1}$, справедливо равенство (45) и пересечение в его левой части трансверсально. Далее, $D_i(L') = D_{\lambda,i}(L') = D_{\lambda,i} = D_i$, $\sigma \leqslant i \leqslant n$. Поэтому $L' \in \mathcal{U}''_0$. Следовательно, выполнено (46). Поэтому снова имеют место включения (47) и (48). Теперь равенства $D^{(2)}_{\lambda,i} = D^{(2)}_i$, $D^{(1)}_{\lambda,i} = D^{(1)}_i$ влекут все утверждения из пункта (e).

Докажем утверждение (f), ср. с доказательством леммы 13 из [10] и леммы 15 (a). Пусть $(\lambda', L'') \in \mathfrak{l}$, $(\lambda', L'') \neq (\lambda, L')$, $\lambda' = (L'_{s+1}, \dots, L'_\sigma)$, $L'' = (L''_{\sigma+1}, \dots, L''_n)$, где все $L'_j \in k[X_0, \dots, X_n]$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$; $L''_w \in \overline{k}[X_0, \dots, X_r]$, $w \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, – линейные формы. Пусть ε – координатная функция на $\mathbb{A}^1(\overline{k})$. Положим $L_{\varepsilon,j} = L_j + \varepsilon L'_j \in k(\varepsilon)[X_0, \dots, X_n]$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$; $L^{(\varepsilon)}_w = L'_w + \varepsilon L''_w \in \overline{k}(\varepsilon)[X_0, \dots, X_r]$, $e^{(\varepsilon)}_w = L^{(\varepsilon)}_w(e_0, \dots, e_r)$, $e''_w = L''_w(e_0, \dots, e_r)$, $w \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, $\lambda_\varepsilon = (L_{\varepsilon,s+1}, \dots, L_{\varepsilon,\sigma})$, $L^{(\varepsilon)} = (L^{(\varepsilon)}_{\sigma+1}, \dots, L^{(\varepsilon)}_n)$. Для всякого $a \in k$ положим $\lambda_a = (L_{a,s+1}, \dots, L_{a,\sigma})$, $L^{(a)} = (L^{(a)}_{\sigma+1}, \dots, L^{(a)}_n)$, где $L_{\varepsilon,j} = L_j + aL'_j \in k[X_0, \dots, X_n]$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$; $L^{(a)}_w = L'_w + aL''_w \in \overline{k}[X_0, \dots, X_r]$, $e^{(a)}_w = L^{(\varepsilon)}_w(e_0, \dots, e_r)$, $w \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$.

Согласно лемме 3 из [11], для всех $a \in k$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, λ_a удовлетворяет условию (A), см. введение. В дальнейшем мы будем предполагать без ограничения общности, что условие (A) выполняется для элемента a.

Для всякого $\sigma \leqslant i \leqslant n$ рассмотрим подмногобразие

$$(W \times \mathbb{A}^1(\overline{k})) \cap \mathcal{Z}(L_{\varepsilon,s+1}, \dots, L_{\varepsilon,\sigma}) \cap \mathcal{Z}(e^{(\varepsilon)}_{\sigma+1}, \dots, e^{(\varepsilon)}_i) \tag{49}$$

в $\mathbb{P}^n(\overline{k}) \times \mathbb{A}^1(\overline{k})$. Обозначим через $\mathcal{W}_i$ объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E многообразия (49), таких, что $E \cap \mathcal{Z}(\varepsilon)$ содержит неприводимую компоненту многообразия $W_{\lambda,i}(L') \times \{0\}$. Согласно определениям $\mathcal{W}_i$ и $\mathcal{W}_n$, всякая неприводимая компонента многообразия $\mathcal{W}_i$ содержит неприводимую компоненту кривой $\mathcal{W}_n$ и $\mathcal{W}_n \subset \mathcal{W}_i$.

Обобщая доказательство леммы 13 из [10] (обобщение является непосредственным, и мы оставляем детали читателю), мы устанавливаем, что для всех $a \in k$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - a) = W_{\lambda_a,j}(L^{(a)}) \times \{a\}$, $\deg W_{\lambda_a,j}(L^{(a)}) \geqslant \deg W_{\lambda,L'} = D_i$ для всех $\sigma \leqslant i \leqslant n$ и $W_{\lambda_a,n}(L^{(a)}) \cap \overline{V \setminus W} = \varnothing$. Но, очевидно, $D_{\lambda_a,i}(L^{(a)}) \leqslant D_{\lambda_a,i}$, и $D_{\lambda_a,i} \leqslant D_i$ согласно (44) с U вместо L'. Следовательно, $\deg W_{\lambda_a,i}(L^{(a)}) = D_{\lambda_a,i}(L^{(a)}) = D_{\lambda_a,i} = D_i$ и $L^{(a)} \in \mathcal{U}''_{\lambda_a,0} \cap \mathcal{U}''_0$ ввиду включения (44) для этих a (в дальнейшем в доказательстве утверждения (f) мы будем предполагать, что эти свойства выполняются для рассматриваемых a). В частности, $\deg W_{\lambda_a,n}(L^{(a)}) = D_n = \deg q_v \deg W'$. Следовательно, в этом случае $\deg p'_\lambda = \deg p'_v$. Кроме того, для этих a выполнены условия (45)–(48) с $(\lambda_a, L^{(a)})$ вместо (λ, L'). Наконец, в этом случае по лемме 24 справедливы неравенства $D_i^{(2)} \geqslant D_{\lambda_a,i}^{(2)}$, $D_i^{(1)} \geqslant D_{\lambda,i}^{(1)}$.

Выберем линейные формы $\widetilde{L}_{\sigma+1}, \dots, \widetilde{L}_n \in k[X_0, \dots, X_n]$, такие, что пересечение алгебраических многообразий $W_{\lambda,i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e'_i)$ и $\mathcal{Z}(\widetilde{L}_{i+1}, \dots, \widetilde{L}_n)$ трансверсально для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n$ (это условие общего положения для рассматриваемых линейных форм). Для всякого $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n$ обозначим через $\mathcal{W}'_i$ объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E пересечения $\mathcal{W}_{i-1} \cap \mathcal{Z}(e_i^{(\varepsilon)})$, таких, что E содержит неприводимую компоненту многообразия $(W_{\lambda,i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e'_i)) \times \{0\}$. Тогда для всех $a \in k$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, $\mathcal{W}_i^{(1)} \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - a) = (W_{\lambda_a,i-1}(L^{(a)}) \cap \mathcal{Z}(e_i^{(a)})) \times \{a\}$. Обозначим через C''_i объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент C'' многообразия $\mathcal{W}'_i \cap \mathcal{Z}(\widetilde{L}_{i+1}, \dots, \widetilde{L}_n)$, таких, что C'' содержит точку из $(W_{\lambda,i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e'_i) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{L}_{i+1}, \dots, \widetilde{L}_n)) \times \{0\}$. Тогда C''_i – кривая. Естественная проекция $C''_i \to \mathbb{A}^1(\overline{k})$, $((X_0 : \dots : X_n), \varepsilon) \mapsto \varepsilon$, является доминантной. Поэтому по теореме Безу для всех $a \in k$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, $+\infty > \#(C''_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - a)) \geqslant \#(C''_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon)) = D_i + D_i^{(1)} + D_i^{(2)}$. Следовательно, для всех $a \in k$, за исключением полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, пересечение $W_{\lambda_a,i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e_i^{(a)}) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{L}_{i+1}, \dots, \widetilde{L}_n)$ содержит по крайней мере $D_i + D_i^{(1)} + D_i^{(2)}$ изолированных точек, и поэтому $\deg(W_{\lambda_a,i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e_i^{(a)})) \geqslant D_i + D_i^{(1)} + D_i^{(2)}$.

Мы имеем (см. выше) $D_i(L^{(a)}) = D_{\lambda_a,i}(L^{(a)}) = D_{\lambda_a,i} = D_i^{(j)}$ и $D_{\lambda_a,i}^{(j)} \leqslant D_i^{(j)}$, $j = 1, 2$. Поэтому (см. введение) $D_{\lambda_a,i}^{(j)}(L^{(a)}) \leqslant D_{\lambda_a,i}^{(j)} \leqslant D_i^{(j)}$, $D_i^{(j)}(L^{(a)}) \leqslant D_i^{(j)}$, $j = 1, 2$. Следовательно, $D_{\lambda_a,i}^{(j)}(L^{(a)}) =$

$D^{(j)}_{\lambda_a,i} = D^{(j)}_i$ и $D^{(j)}_i(L^{(a)}) = D^{(j)}_i$, $j = 1,2$. Отсюда следует, что для рассматриваемых a пересечение (46) с $\lambda_a, L^{(a)}$ вместо λ, L' является трансверсальным. Поэтому (47) с $\lambda_a, L^{(a)}$ вместо λ, L' влечёт, что $W^{(2)}_i(L^{(a)}) \cap \mathcal{Z}(L_{a,s+1}, \dots, L_{a,\sigma}) = W^{(2)}_{\lambda_a,i}(L^{(a)})$. Наконец, из (48) с $\lambda_a, L^{(a)}$ вместо λ, L' мы получаем, что $W^{(1)}_i(L^{(a)}) \cap \mathcal{Z}(L_{a,s+1}, \dots, L_{a,\sigma}) = W^{(1)}_{\lambda_a,i}(L^{(a)})$. Отсюда вытекают все утверждения пункта (f).

Требуемая оценка на время работы алгоритмов из теоремы 1 немедленно следует из оценок на время работы использованных алгоритмов. Теорема доказана. □

Литература

1. Д. Мамфорд, *Алгебраическая геометрия.* I. *Комплексные проективные многообразия.* Мир, М. (1979).
2. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* Мир, М. (1981).
3. В. Ходж, Д. Пидо, *Методы алгебраической геометрии*, т. 1. Издательство иностранной литературы, М. (1954).
4. А. Л. Чистов, *Алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочленов на неприводимые множители и нахождение компонент многообразия в субэкспоненциальное время.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **137** (1984), 124–188.
5. А. Л. Чистов, *Вычисление степеней алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики за полиномиальное время и его приложения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **258** (1999), 7–59.
6. А. Л. Чистов, *Сильная версия основного разрешающего алгоритма для экзистенциональной теории первого порядка вещественно замкнутых полей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **256** (1999), 168–211.
7. А. Л. Чистов, *Эффективная конструкция локальных параметров неприводимых компонент алгебраического многообразия.* — Труды С.-Петербургского мат. общества **7** (1999), 230–266.
8. А. Л. Чистов, *Эффективная гладкая стратификация алгебраического многообразия в нулевой характеристике и её приложения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 254–311.
9. А. Л. Чистов, *Монодромия и критерии неприводимости с алгоритмическими приложениями в нулевой характеристике.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **292** (2002), 130–152.
10. А. Л. Чистов, *Вычисление степени доминантного морфизма в нулевой характеристике за полиномиальное время.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **307** (2004), 189–235.
11. А. Л. Чистов, *Вычисление степени доминантного морфизма в нулевой характеристике за полиномиальное время.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **325** (2005), 181–224.
12. J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Géométrie Algébrique Réelle.* Springer–Verlag, Berlin–Heidelberg–New York (1987).

13. A. L. Chistov, *Polynomial–time computation of the dimensions of components of algebraic varieties in zero–characteristic.* — J. Pure Appl. Algebra, 117 & 118 (1997), 145–175.

Chistov A. L. Polynomial-time computation of the degree of a dominant morphism in zero characteristic. IV.

Consider a projective algebraic variety W that is an irreducible component of the set of all common zeros of a family of homogeneous polynomials of degrees less than d in $n+1$ variables in zero characteristic. Consider a dominant rational morphism from W to W' given by homogeneous polynomials of degree d'. We suggest algorithms for constructing objects in general position related to this morphism. These algorithms are deterministic and polynomial in $(dd')^n$ and the size of the input. This work concludes the series of three papers.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: alch@pdmi.ras.ru

Поступило 11 августа 2008 г.