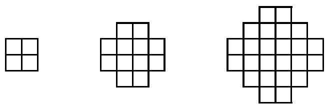
Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 360, 2008 г.

К. Кохась

РАЗБИЕНИЕ АЦТЕКСКИХ ДИАМАНТОВ И КВАДРАТОВ НА ДОМИНО

Ацтекский диамант ранга n — это “клетчатый ромбик” со стороной n. На рисунке ниже изображены ацтекские диаманты ранга 1, 2 и 3.



Мы приведем здесь несколько новых комбинаторных доказательств известных фактов о количестве разбиений на домино ацтекских диамантов и квадратов.

1. Теоремы об ацтекском диаманте

В этом разделе мы формулируем теоремы об ацтекском диаманте из замечательной статьи Элкиса, Ларсена, Куперберга и Проппа [5], где они доказаны несколькими способами. В следующих разделах мы даем еще несколько комбинаторных доказательств этих теорем, некоторые из них, вероятно, являются новыми. При этом мы не пользуемся техникой, развитой в работах Дж. Проппа [12] и М. Чуку [14].

Количество разбиений какой-либо фигуры F на домино будем обозначать $\#F$ или изображать пиктограммой этой фигуры с символом “#” перед ней. Например, #  $= 2$. Производящие функции для числа разбиений на домино фигуры F по отношению к разным дополнительным статистикам будем обозначать, дописывая букву A перед названием фигуры, например, $AF(x, q)$.

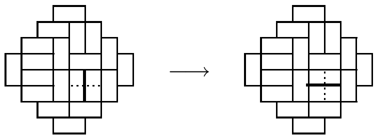
Обозначим через T_n количество разбиений ацтекского диаманта ранга n на домино.

Заметим, что каждая горизонтальная прямая, идущая по линии сетки, рассекает ацтекский диамант на две половинки четной площади. Следовательно, каждая такая прямая пересекает четное число

Работа выполнена при поддержке гранта НШ-2460.2008.1 .

вертикальных доминошек. Ну а поскольку каждая вертикальная доминошка “нанизана” ровно на одну горизонтальную прямую, суммарное число вертикальных доминошек в любом разбиении T ацтекского диаманта должно быть четным, обозначим его $2v(T)$.

Определение 1. *Пусть дано разбиение T ацтекского диаманта. Переключением назовем преобразование разбиения, при котором мы выбираем квадрат 2×2, целиком лежащий в диаманте и покрытый в точности двумя доминошками из T, и поворачиваем его на $90°$. Таким образом, если вначале этот квадрат был покрыт двумя горизонтальными домино, то после переключения он станет покрыт двумя вертикальными домино (и наоборот).*



Для некоторых разбиений существует сразу несколько способов выбора такого квадрата 2×2 и тем самым определено несколько различных переключений. Менее очевидно, что для каждого разбиения определено хотя бы одно переключение (это следует, например, из теоремы 4.1 ниже).

Определение 2. *Для каждого разбиения T ацтекского диаманта определим величину $r(T)$, которую, следуя [5], мы будем называть **рангом разбиения**. Ранг разбиения T – это минимальное число переключений, которое требуется сделать, чтобы получить разбиение, состоящее только из горизонтальных домино. Положим*

$$AD(n,x,q)=\sum_T x^{v(T)}q^{r(T)},\ AD(n,q)=\sum_T q^{r(T)},\ AD(n,x)=\sum_T x^{v(T)},$$

где суммирование ведется по всем разбиениям ацтекского диаманта ранга n.

Теорема 1.1.

$$T_n = 2^{n(n+1)/2}. \tag{1}$$

Теорема 1.2. *Для ацтекского диаманта ранга n выполнено соотношение*

$$AD(n,x) = (1+x)^{n(n+1)/2}. \tag{2}$$

Теорема 1.3. *Для ацтекского диаманта ранга n выполнено соотношение*
$$AD(n,q)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+q^{2k+1}\right)^{n-k}. \qquad (3)$$

Теорема 1.4. *Для ацтекского диаманта ранга n выполнено соотношение*
$$AD(n,x,q)=\prod_{k=0}^{n-1}\left(1+xq^{2k+1}\right)^{n-k}. \qquad (4)$$

Мы дадим несколько комбинаторных доказательств этих теорем. Часть из них состоит в комбинаторной проверке рекуррентных соотношений, которым удовлетворяют функции AD:

$$T_{n+1}T_{n-1}=2T_n^2, \qquad (5)$$
$$AD(n+1,x)AD(n-1,x)=(1+x)AD^2(n,x), \qquad (6)$$
$$AD(n+1,x,q)AD(n-1,x,q)=(1+xq^{2n+1})AD^2(n,x,q). \qquad (7)$$

2. Графическая конденсация

В этом разделе мы пользуемся техникой графической конденсации Куо [9] и с ее помощью даем новые доказательства теорем об ацтекском диаманте. Поскольку мы занимаемся только разбиениями на домино, мы не будем пользоваться двойственным языком графов и паросочетаний.

2.1. Общая схема

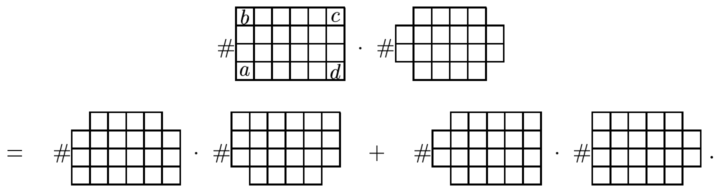
Определение 3. *Пусть дано два разбиения на домино некоторой фигуры. Допустим, что доминошки, накрывающие некоторую клетку A этой фигуры, не совпадают. Цепочкой с началом в клетке $A_1=A$ назовем последовательность доминошек $D_1=\{A_1,A_2\}$, $E_1=\{A_2,A_3\}$, $D_2=\{A_3,A_4\}$, $E_2=\{A_4,A_5\}$, ... , где доминошки $D_1, D_2, \dots$ принадлежат первому разбиению, а доминошки E_1, E_2, ... – второму. Эта цепочка естественным образом продолжается до тех пор, пока в ней снова не встретится клетка A_1. Мы также будем рассматривать цепочки, построенные по разбиениям на домино двух пересекающихся фигур. В этом случае цепочка может оборваться, когда мы выйдем за пределы одной из фигур, т.е. первая и последняя клетка цепочки принадлежат лишь одной из фигур, а остальные клетки лежат в пересечении фигур.*

По определению цепочки доминошки D_1, D_2, ... и E_1, E_2, ... накрывают одно и то же множество клеток (кроме, быть может, двух крайних). Сдвигом клеток в цепочке назовем переход от набора D_i к набору E_i.

Пусть дана произвольная связная (ходом ладьи) клетчатая фигура F и a, b, ... — какие-то ее клетки. Обозначим для краткости $F_{a,b,\dots} = F \setminus \{a, b, \dots\}$.

Начнем с доказательства одного соотношения (теорема 2.1 из [9]), которое содержит в себе основную конструкцию графической конденсации.

Лемма 2.1. *Количество разбиений на домино прямоугольника $2n \times 2m$ и фигур, получающихся удалением из него двух или четырех углов, связаны соотношением*



Доказательство. Пусть K – данный прямоугольник, a, b, c, d – его угловые клетки.

Рассмотрим разбиение на домино фигур K и $K_{a,b,c,d}$. Построим цепочку с началом в клетке a. Она может закончиться только в клетке b или d. Аналогичная цепочка, построенная из c, закончится в четвертой угловой клетке и не будет пересекаться с первой цепочкой. Сдвинув доминошки в первой цепочке (в каждом из разбиений), мы получим из исходной пары разбиений пару разбиений одного из типов в правой части.

Аналогично определяется обратное отображение. Рассмотрим, например, разбиение на домино фигур $K_{a,b}$ и $K_{c,d}$. Построим цепочку доминошек, начинающуюся в клетке a; пусть в шахматной раскраске эта клетка черного цвета. Докажем, что эта цепочка может закончиться только в клетке d. Действительно, она не может закончиться в c, поскольку тогда цепочка, построенная из b, вообще не могла бы нигде закончиться – цепочки не могут пересекаться, а путь к d “отрезан” первой цепочкой. Также не может наша цепочка клеток закончиться в b. Действительно, если бы это произошло, то белая клетка b

была бы второй клеткой в последней доминошке цепочки. Но в нашей цепочке только у доминошек из первого разбиения “вторая” клетка белая (а у доминошек второго разбиения “вторая” клетка черная). Но клетка b не принадлежит первому разбиению.

Итак, построенная цепочка клеток заканчивается в d. Аналогично, цепочка клеток, начинающаяся в b, заканчивается в c. Поменяв в первой цепочке доминошки, принадлежащие первому разбиению, и доминошки, принадлежащие второму, получим разбиение прямоугольника K и разбиение прямоугольника без углов $K_{a,b,c,d}$. Это и есть требуемое обратное соответствие. Следовательно, построенное отображение является взаимно однозначным.

Пусть T – произвольное разбиение на домино фигуры F; обозначим через $v(T)$ количество вертикальных домино в разбиении T. Положим

$$AF(y) = \sum y^{v(T)},$$

где суммирование ведется по всем разбиениям фигуры F. Мы вводим здесь переменную y, чтобы в случае ацтекского диаманта не путать эту производящую функцию с функцией (2), в определении которой $v(T)$ обозначает *половину* числа вертикальных домино. Таким образом, если F – это ацтекский диамант ранга n, то $AF(x) = AD(n, x^2)$.

Лемма 2.2 ([9, теорема 2.3]). *Пусть F – произвольная связная ходом ладьи клетчатая фигура. И пусть при обходе ее границы встречаются (не обязательно подряд) клетки a, b, c, d, причем в шахматной раскраске клетки a и c черные, а клетки b и d белые. Тогда*

$$\#F \cdot \#F_{a,b,c,d} = \#F_{a,b} \cdot \#F_{c,d} \;+\; \#F_{a,d} \cdot \#F_{b,c}. \tag{8}$$

Доказательство. Аналогично.

Замечание. В лемме 2.2 не существенно, что фигуры находятся на клетчатой плоскости и разбиты на квадратные клетки. Важно лишь, что фигура допускает шахматную раскраску (клетки с общей стороной – разного цвета) и тем самым каждая доминошка “содержит” одну черную и одну белую клетку. Клетки a, b, c, d не обязательно должны быть граничными; требуется лишь, чтобы существование цепочки доминошек, ведущей из a в c, препятствовало существованию цепочки, ведущей из b в d.

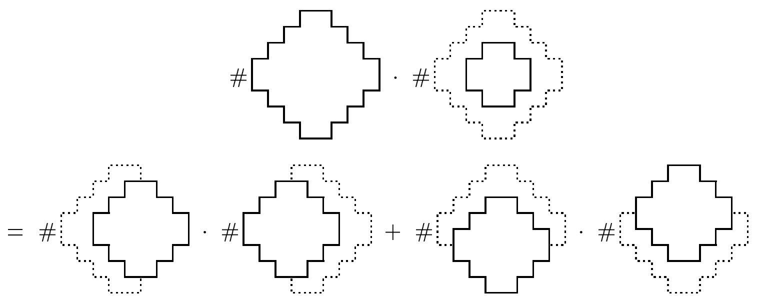
Лемма 2.3. *В обозначениях предыдущей леммы*

$$AF(y) \cdot AF_{a,b,c,d}(y) = AF_{a,b}(y) \cdot AF_{c,d}(y) \ + \ AF_{a,d}(y) \cdot AF_{b,c}(y). \quad (9)$$

Доказательство. Запишем по определению функции, входящие в равенство (9), и раскроем скобки. Достаточно предъявить взаимно однозначное соответствие между одночленами в левой и правой части. Рассмотрим какие-либо разбиения на домино фигур F и $F_{a,b,c,d}$; им соответствует некоторый одночлен в левой части (9). Как и в доказательстве леммы 2.1, построим цепочку клеток, начинающуюся с клетки a. Она заканчивается в клетке b или d (пусть для определенности в b). Эта цепочка разбивает фигуры F и $F_{a,b,c,d}$ на части, скажем, F^1, F^2 и $F^1_{a,b,c,d}$, $F^2_{a,b,c,d}$, причем договоримся, что $d \in F^2$, $F^2 \setminus d = F^2_{a,b,c,d}$, и будем считать, что сама цепочка тоже принадлежит вторым частям. (При таком соглашении части F^1 и $F^1_{a,b,c,d}$ могут оказаться пустыми.) Тогда объединения частей $F^1 \cup F^2_{a,b,c,d}$ и $F^2 \cup F^1_{a,b,c,d}$ дают нам разбиения на домино фигур $F_{a,b}$ и $F_{c,d}$, в которых суммарное количество вертикальных домино такое же, как и в исходных разбиениях. Построенным разбиениям соответствует одночлен в правой части (9), и это соответствие между одночленами в левой и правой частях равенства (9) взаимно однозначно.

2.2. Приложение к диамантам

Доказательство теоремы 1.1. Это доказательство принадлежит И. Богданову. Проверим ориентированную версию рекуррентного соотношения (5), а именно равенство



(10)

Пусть фигура F из леммы 2.2 – это ацтекский диамант ранга $n+1$. Отметим в нем вблизи “вершин” клетки a, b, c, d (см. рис. 1). Такое назначение клеток a, b, c, d допустимо в силу замечания к лемме 2.2.

Осталось заметить, что удаление помеченных клеток приводит к появлению большого числа доминошек, расположение которых определяется однозначно, см. рис. 2.

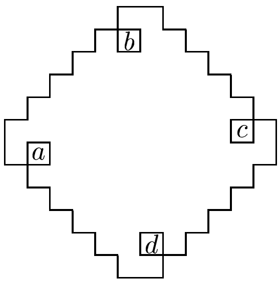
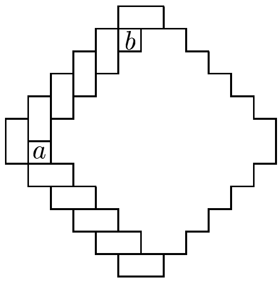


Рис. 1.

$\#F_{a,b} = \#$



$= T_n\,.$

Рис. 2.

Аналогично, $\#F_{a,b,c,d} = T_{n-1}$. Следовательно, соотношение (10), которое мы доказываем, есть в данном случае в точности соотношение (8) из леммы 2.2.

Доказательство теоремы 1.2. Проверим рекуррентное соотношение (2). Как и в предыдущем доказательстве, пусть фигура F – это ацтекский диамант ранга $n+1$ и a, b, c, d – отмеченные клетки, см. рис. 1. По лемме 2.3 мы имеем соотношение

$$AF(y)\cdot AF_{a,b,c,d}(y) = AF_{a,b}(y)\cdot AF_{c,d}(y)\ +\ AF_{a,d}(y)\cdot AF_{b,c}(y).$$

Заметим, что $AF_{a,b}(y) = y^n AD(n,y^2)$, так как вдоль стороны ab расположено n вертикальных домино, см. рис. 2. Аналогично, $AF_{c,d}(y) = y^n AD(n,y^2)$, $AF_{a,d}(y) = y^{n+1}AD(n,y^2)$, $AF_{b,c}(y) = y^{n+1}AD(n,y^2)$ и $AF_{a,b,c,d}(y) = y^{2n}AD(n-1,y^2)$. Подставляя, получаем равенство

$$y^{2n}AD(n+1,y^2)AD(n-1,x) = y^{2n}(1+y^2)AD^2(n,y^2),$$

которое после замены $x = y^2$ превращается в (6).

На этом пути можно также получить доказательство теоремы 1.4. Оно совершенно аналогично доказательству теоремы 1.4, приведенному в параграфе 4.

2.3. Приложение к крепостям Янга

Крепостью Янга называется следующая фигура. Рассмотрим треугольную решетку, которая получается, если в обычной квадратной решетке провести диагонали всех клеточек. Рассмотрим квадрат $n \times n$ на этой решетке, возьмем его шахматную раскраску и ко всем черным клеткам, прилежащим к границе, добавим наружу треугольник размером в четверть квадратной клетки. Полученная фигура называется *крепостью Янга* порядка n. В зависимости от выбора шахматной раскраски получаются крепости двух видов. При четном n они изоморфны (получаются друг из друга поворотом на 90°), а при нечетном различны.

Мы будем обозначать крепости Янга F_n, а для нечетного n второй вариант крепости обозначим F_n'.

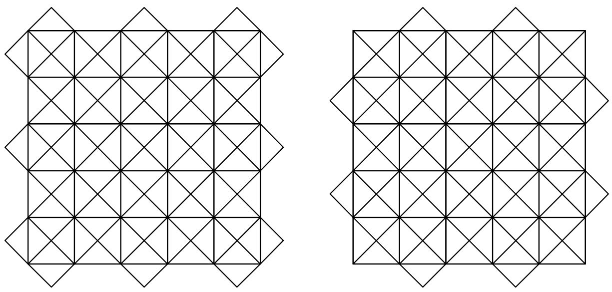


Рис. 3. Крепости F_5' и F_5.

Рассмотрим задачу о разбиении крепостей Янга на домино. В данном случае "домино" – это фигура, состоящая из двух соседних треугольных клеточек, т.е. фигура вида

.

Кроме числа $\#F_n$ разбиений крепости на "домино" рассмотрим также производящий многочлен $AF_n(x)$ для числа треугольных "доминошек" в разбиении:

$$AF_n(x) = \sum_T x^{t(T)},$$

где суммирование ведется по всем разбиениям крепости F_n на "домино", а величина $t(T)$ обозначает количество треугольных "доминошек" в разбиении T.

Теорема 2.1 (Янг [17]). *Количество разбиений крепостей F_n на "домино" задается формулами*

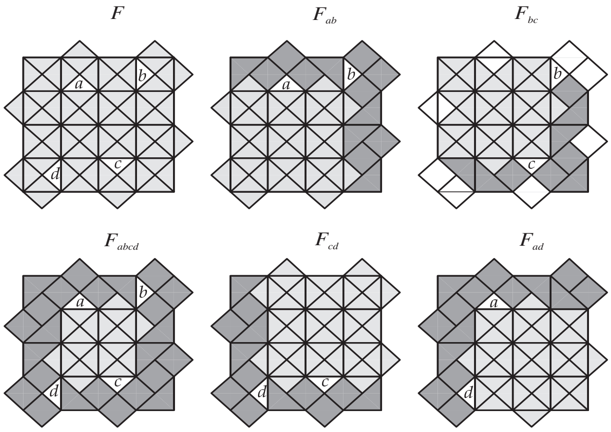
$$\#F_{2n} = 5^{n^2}, \quad \#F_{4n+1} = 5^{2n(2n+1)}, \qquad \#F_{4n-1} = 2 \cdot 5^{2n(2n-1)},$$
$$\#F'_{4n+1} = 2 \cdot 5^{2n(2n+1)}, \quad \#F'_{4n-1} = 5^{2n(2n-1)}.$$

Теорема 2.2. *Производящий многочлен числа треугольников для крепости F_n задается формулами*

$$\begin{aligned}
AF_{2n} &= x^{2n^2} \cdot (4x^4+1)^{n^2}, \\
AF_{4n+1} &= x^{4n(2n+1)} \cdot (4x^4+1)^{2n(2n+1)}, \\
AF_{4n-1} &= 2x^{4n(2n-1)+2} \cdot (4x^4+1)^{2n(2n-1)}, \\
AF'_{4n+1} &= 2x^{4n(2n+1)+2} \cdot (4x^4+1)^{2n(2n+1)}, \\
AF'_{4n-1} &= x^{4n(2n-1)} \cdot (4x^4+1)^{2n(2n-1)}.
\end{aligned}$$

Следующее доказательство теоремы 2.2 получено совместно с С. Ли.

Доказательство. В лемме 2.3 от производящей функции в действительности требуется лишь то, что статистика, которую она подсчитывает, зависит от геометрического расположения доминошки, а не, скажем, от каких-то свойств соседних домино или конфигурации в целом. Поэтому рассматриваемые функции AF_n удовлетворяют утверждению леммы 2.3. Рассмотрим клетки a, b, c, d, помеченные на рисунке. Они отмечены по следующему принципу: обходя границу крепости по часовой стрелке, мы на каждой стороне квадрата находим первый выступающий "бастион" и отмечаем первую клетку, которую пересекает диагональ этого бастиона при продолжении внутрь крепости.



Заметим, что положение доминошек, содержащих выступающие части бастионов, определено однозначно. Мы можем удалить из крепости все доминошки, содержащие бастионы (см. рис. F_{bc}, где эти доминошки закрашены белым цветом). Тогда видно, что клетки a, b, c, d прилегают к границе оставшейся фигуры. Удаление клеток a, b, c, d из крепости приводит к появлению большого числа однозначно определенных доминошек вдоль границы крепости (эти доминошки закрашены темно-серым). Как видно из рисунка, оставшаяся часть изоморфна крепости меньшего ранга.

Как нетрудно видеть, если F – крепость ранга k, то в темно-серой части фигур F_{ab}, F_{bc}, F_{cd}, F_{ad} находится по $2k-3$ треугольных доминошек, а в темно-серой части фигуры F_{abcd} расположено $4k-8$ треугольных доминошек. Следовательно, при четных k

$$\begin{aligned}
AF_{ab}(x) &= AF_{cd}(x) = x^{2k-3}AF'_{k-1},\\
AF_{bc}(x) &= AF_{ad}(x) = x^{2k-3}AF_{k-1},\\
AF_{abcd}(x) &= x^{4k-8}AF_{k-2},
\end{aligned}$$

а при нечетных k

$$\begin{aligned}
AF_{ab}(x) &= AF_{cd}(x) = AF_{bc}(x) = AF_{ad}(x) = x^{2k-3}AF_{k-1},\\
AF'_{ab}(x) &= AF'_{cd}(x) = AF'_{bc}(x) = AF'_{ad}(x) = x^{2k-3}AF_{k-1},\\
AF_{abcd}(x) &= x^{4k-8}AF_{k-2},\\
AF'_{abcd}(x) &= x^{4k-8}AF'_{k-2}.
\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в равенство (8) из леммы 2.3, приходим к рекуррентным соотношениям

$$AF_{2n}AF_{2n-2} = x^2(AF_{2n-1})^2 + x^2(AF'_{2n-1})^2, \tag{11}$$

$$AF_{2n+1}AF_{2n-1} = 2x^2(AF_{2n})^2, \tag{12}$$

$$AF'_{2n+1}AF'_{2n-1} = 2x^2(AF_{2n})^2. \tag{13}$$

Исходя из того, что $AF_1 = 2x^2$, $AF'_1 = 1$ и $AF_2 = x^2(4x^4+1)$, по индукции получаем искомые производящие многочлены.

2.4. Приложение к ацтекским подземельям

Ацтекское подземелье P_n — это фигура на решетке G_2, изображенная на рис. 10 слева сверху. Согласно гипотезе Проппа, число разбиений этой фигуры на домино имеет вид 13^k или $2 \cdot 13^k$. Эта гипотеза была доказана Чуку (см. [14]) вместе с уточнением о производящих функциях. Мы покажем, как можно получить результат Чуку техникой графической конденсации.

Рассмотрим производящий многочлен

$$AP_n(x) = \sum_T x^{ot(T)} y^{etu(T)} z^{etd(t)},$$

где суммирование ведется по всем разбиениям на домино, $ot(T)$ – это число доминошек в разбиении T, имеющих вид тупоугольного треугольника, $etu(T)$ – это число доминошек в разбиении T, имеющих форму равностороннего треугольника с вершиной вверху, $etd(T)$ – это число доминошек в разбиении T, имеющих форму равностороннего треугольника с вершиной внизу.

Теорема 2.3 (Чуку [14])**.** *Пусть*

$$H = x^6 + 3x^4yz + 3x^2y^2z^2 + y^3z^3 + 2x^3 + 2xyz + 1.$$

Тогда $AP_0 = 1$, $AP_1 = x^2 + yz$, $AP_2 = x^2yzH$, $AP_3 = x^6(yz)^3H^3$, $AP_4 = x^{10}(yz)^7(x^2+yz)H^5$, $AP_5 = x^{16}(yz)^{12}H^8$ *и при* $n \geq 5$ *выполнено рекуррентное соотношение*

$$AP_{n+1} = x^{8n-16}(yz)^{8n-10}H^{4n-8}AP_{n-5}.$$

Набросок доказательства. Рассмотрим сначала вопрос о числе разбиений на домино. Нам понадобятся несколько близких по форме фигур – Q_n, R_n, S_n и U_n (рис. 11–14). Светло-серым цветом закрашены участки, замощение которых определено однозначно краевыми эффектами. Применим утверждение леммы 2.2. Четыре удаляемые клетки закрашены темным цветом. Удаление приводит к появлению новых зон, замощение которых однозначно определено, доминошки в них прорисованы жирными линиями. Как видно из рисунков, оставшиеся незамощенными части фигур образуют фигуру одного из рассматриваемых типов. В результате мы получаем следующие рекуррентные соотношения, из которых можно вывести доказательства гипотезы Проппа (рис. 10–14):

$$\begin{aligned}
\#P_n\#P_{n-2} &= \#P_{n-1}^2 + \#Q_{n-1}^2,\\
\#Q_n\#Q_{n-2} &= \#Q_{n-1}^2 + \#P_{n-1}\#R_{n-1},\\
\#R_n\#P_{n-1} &= \#Q_n\#Q_{n-1} + \#S_{n-1}^2,\\
\#S_n\#P_{n-1} &= \#P_n\#S_{n-1} + \#Q_n\#U_{n-1},\\
\#U_n\#U_{n-2} &= \#S_{n-1}^2 + \#U_{n-1}^2.
\end{aligned}$$

Утверждение теоремы 2.3 получается обобщением проделанных наблюдений, если аккуратно подсчитать, сколько именно доминошек каждого типа содержат приграничные зоны при удалении клеток, подобно тому, как это сделано в предыдущем разделе при выводе соотношений (11)–(13).

3. Перекладывания

3.1. Одномерный вариант перекладываний

Рассмотрим числовой треугольник Проппа [11]

$$\begin{array}{ccccccccc}
a & & c & & e & & g & & \dots\\
& b & & d & & f & & \dots & \\
& & h & & k & & \dots & & \\
& & & \ell & & \dots & & & \\
& & & & \dots & & & &
\end{array} \tag{14}$$

образованный по следующему правилу: для любых четырех чисел, образующих “ромбик”, выполнено соотношение

$$\begin{array}{ccc} & w & \\ x & & y \\ & z & \end{array} \qquad wz = xy + 1. \tag{15}$$

Например, пусть первая строка этого треугольника состоит из единиц, а вторая – из двоек. Тогда при всех n числа в n-й строке одинаковы, обозначим их f_{2n-2}, и выполнено соотношение

$$f_{2n+2}f_{2n-2} = f_{2n}^2 + 1. \tag{16}$$

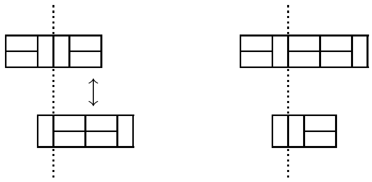
Отсюда $f_0 = 1$, $f_2 = 2$, $f_4 = 5$, $f_6 = 13$, … Узнаете? Это числа Фибоначчи. Мы дадим комбинаторное доказательство этого соотношения, которое позволяет объяснить и другие результаты Проппа.

Лемма 3.1. *Числа Фибоначчи удовлетворяют соотношению* (16).

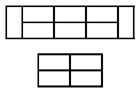
Доказательство. Рассмотрим всевозможные (упорядоченные) пары разбиений прямоугольника $2 \times 2n$ на домино, а также пары, состоящие из разбиения прямоугольника $2 \times (2n + 2)$ и разбиения прямоугольника $2 \times (2n - 2)$. Пример таких пар и удобный способ взаиморасположения элементов пары показаны на рисунке.

Для доказательства тождества (16) опишем взаимно однозначное соответствие между этими множествами пар (при этом нам потребуется добавить в первое множество один лишний элемент). Соответствие устроено так. Если в нижнем прямоугольнике первой пары есть "шов", отрезающий правый блок 2×2 (т.е. если этот блок замощен двумя целыми доминошками), мы передвинем этот блок вверх, "приклеив" к верхнему прямоугольнику. Этот случай изображен выше.

Если же шва нет, т.е. продолжение вниз правой стороны верхнего прямоугольника разрезает в нем какую-то доминошку, мы будем просматривать все вертикальные линии справа налево в верхнем прямоугольнике до тех пор, пока не найдем такой шов, продолжение которого вниз образует шов и в нижнем прямоугольнике. Нетрудно проверить, что такой шов найдется (в крайнем случае он может проходить по левой стороне нижнего прямоугольника). Найдя шов, мы отрезаем по нему части прямоугольников, расположенные правее, и меняем их местами.



Построенное соответствие является биекцией, поскольку очевидно, как устроено обратное соответствие: мы просматриваем нижний прямоугольник $2 \times (2n-2)$, начиная с правой стороны и двигаясь влево, в поисках первого же шва, который разрезает оба прямоугольника, после чего меняем местами отрезанные части. Такого шва не существует лишь в единственном случае, показанном на рисунке.



Для этого случая потребуется добавить в первое множество лишний элемент.

3.2. Эффект лорановости для соотношения "ромбика"

Вот замечательное утверждение из [11]. Снова рассмотрим треугольник Проппа (14). Будем считать, что элементы первых двух строк – это независимые переменные, а элементы всех остальных строк – это рациональные функции от них, заданные при помощи соотношения (15). Нетрудно подсчитать, например, что элемент ℓ в треугольнике (14) имеет вид

$$\begin{aligned}\ell &= \frac{hk+1}{d} = \frac{\frac{bd+1}{c}\cdot\frac{df+1}{e}+1}{d} \\ &= bc^{-1}de^{-1}f + c^{-1}e^{-1}f + c^{-1}d^{-1}e^{-1} + bc^{-1}e^{-1} + d^{-1}.\end{aligned} \tag{17}$$

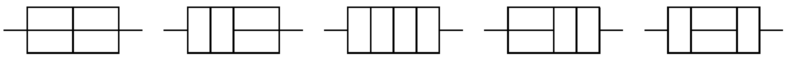
Теперь выпишем все разбиения прямоугольника 2×4 на домино и проделаем следующие действия:

1) добавим к каждой короткой стороне прямоугольника горизонтальный отрезок;

2) для каждого узла клетчатой бумаги, находящегося на средней линии прямоугольника, напишем его редуцированную валентность:

количество единичных отрезков разбиения, сходящихся в этом узле, минус 3;

3) возьмем полученные упорядоченные наборы из 5 чисел в качестве показателей степеней у переменных b, c, d, e, f в произведении $b^*c^*d^*e^*f^*$.



1 −1 1 −1 1	0 −1 0 −1 1	0 −1 −1 −1 0	1 −1 0 −1 0	0 0 −1 0 0
$bc^{-1}de^{-1}f$	$c^{-1}e^{-1}f$	$c^{-1}d^{-1}e^{-1}$	$bc^{-1}e^{-1}$	d^{-1}

Сравните то, что получилось, с правой частью равенства (17).

Лемма 3.2. *Наблюдения, проделанные выше, являются общим фактом, а именно:*

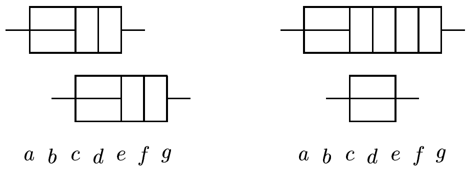
1) *Рациональные функции из треугольника* (14) *суть суммы одночленов, каждый из которых – это произведение исходных переменных в степени* ± 1 *или* 0. *Все коэффициенты в сумме равны* 1.

2) *Одночлены, составляющие функцию из* $(n+2)$*-й строки, находятся во взаимно однозначном соответствии с разбиениями прямоугольника* $2 \times 2n$ *на доминошки по описанному выше алгоритму.*

Доказательство. Рассмотрим функциональный треугольник

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\lambda & & b & & d & & f & & \ldots & & \\
& a & & c & & e & & g & & \ldots & \\
& & h & & k & & \ell & & \ldots & & \\
& & & p & & q & & \ldots & & & \\
& & & & r & & \ldots & & & &
\end{array}$$

состоящий из рациональных функций от переменных a, b, c, d, e, f, g, … , заданных не при помощи соотношения (15), а с помощью описанного выше комбинаторного алгоритма. Мы ограничимся рассмотрением частного случая $n = 4$. Пользуясь взаимно однозначным соответствием из доказательства леммы 3.1, докажем, что выполнено соотношение “ромбика” $kr = pq + 1$. Каждая функция в этом соотношении – сумма одночленов, соответствующих разбиениям определенных прямоугольников на домино. Чтобы получить произведение kr, мы можем перебрать все пары разбиений на домино прямоугольников 2×4, для каждой такой пары перемножить соответственные одночлены, а потом сложить все, что получилось. Аналогично можно получить произведение pq. Отметим, что при таком вычислении мы должны брать переменные, составляющие одночлены, в соответствии с положением перемножаемых функций в треугольнике. На рисунке внизу приведены примеры пар разбиений, а снизу подписаны переменные, “отвечающие” за каждую вертикаль.



Заметим теперь, что взаимно однозначное соответствие из леммы 3.1 сопоставляет друг другу пары разбиений, порождающие равные одночлены. Это очевидно: при соответствии мы всего лишь меняем местами по вертикали (!) куски разбиений; при этом суммы редуцированных валентностей контролируемых узлов на одной вертикали не меняются (в том числе, на шве), а только этим и определяются степени переменных в одночлене.

Полное доказательство проводится по индукции. Приведенное рассуждение обосновывает индукционный переход.

3.3. Двумерный вариант перекладываний

Здесь мы к идее графической конденсации добавляем перекладывание частей фигур, что позволяет нам получить еще одно доказательство теорем об ацтекском диаманте.

Определение 4. *Рассмотрим ацтекский диамант ранга $n+1$. Удаляя два диагональных ряда клеток, идущих вдоль его правой верхней и левой верхней сторон, мы можем получить из него ацтекский диамант ранга n. Назовем этот диамант ранга n **нижним**. Аналогично можно получить **верхний**, **левый** и **правый** диаманты. Пересечением этих диамантов является **центральный** диамант ранга $n-1$ (рис. 4).*

Рассмотрим множество A, состоящее из пар независимых разбиений на домино ацтекского диаманта ранга n и его центрального поддиаманта ранга $n-2$. Рассмотрим множество B, которое содержит пары, состоящие из независимых разбиений верхнего и нижнего поддиамантов ацтекского диаманта ранга n, а также пары, состоящие из независимых разбиений левого и правого поддиамантов.

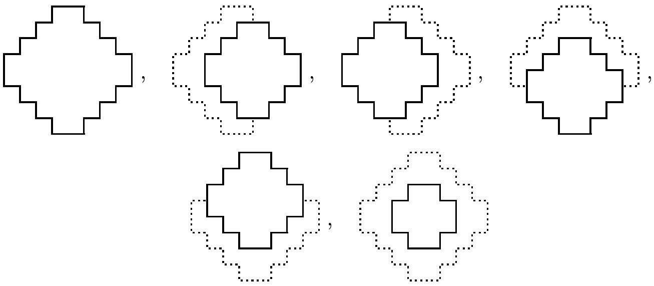
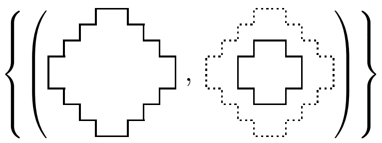
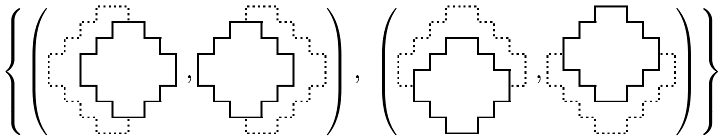


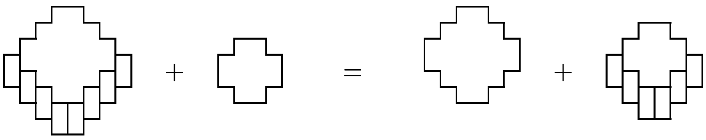
Рис. 4. Ацтекский диамант и его правый, левый, нижний, верхний и центральный поддиаманты.

$A =$  ,

$B =$  (18)

Теорема 3.1. *Существует взаимно однозначное соответствие между множествами A и B.*

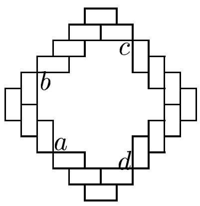
Доказательство. Построим отображение из множества A в множество B. Возьмем элемент множества A, т.е. разбиение ацтекского диаманта ранга n и разбиение его центрального поддиаманта ранга $n-2$. Рассмотрим сначала случай, когда к нижней "вершине" меньшего диаманта прилегает блок разбиения вида . В этом случае все доминошки, прилегающие к нижнему краю большого диаманта, расположены вертикально. Тогда построим следующую пару разбиений верхнего и нижнего поддиамантов. Отодвинем в сторону все доминошки, прилегающие к нижнему краю, а самую левую и самую правую из них вообще удалим. У нас останется разбиение верхнего поддиаманта ранга $n-1$. А отодвинутый фрагмент объединим с центральным поддиамантом ранга $n-2$, получится разбиение нижнего поддиаманта ранга $n-1$.



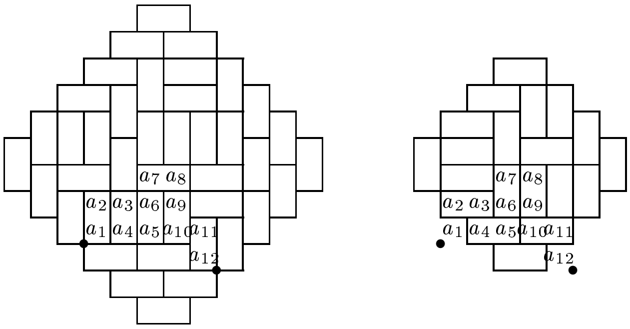
(19)

Аналогично определим отображение в случае, когда к левой вершине диаманта прилегает блок .

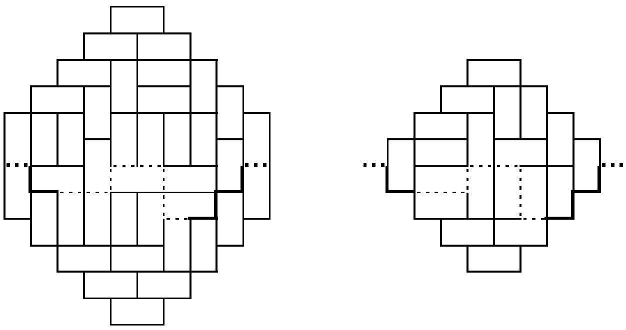
Допустим теперь, что разбиение большого диаманта не относится к уже разобранному типу, т.е. вдоль левой нижней стороны встречаются и горизонтальные, и вертикальные доминошки. В этом случае на левой нижней стороне диаманта можно указать *разделяющую* клетку, такую, что по одну сторону от нее доминошки ориентированы горизонтально, а по другую сторону – вертикально. Аналогичная клетка есть по крайней мере на еще одной стороне диаманта. На рисунке приведен пример с четырьмя разделяющими клетками, они помечены буквами a, b, c, d.



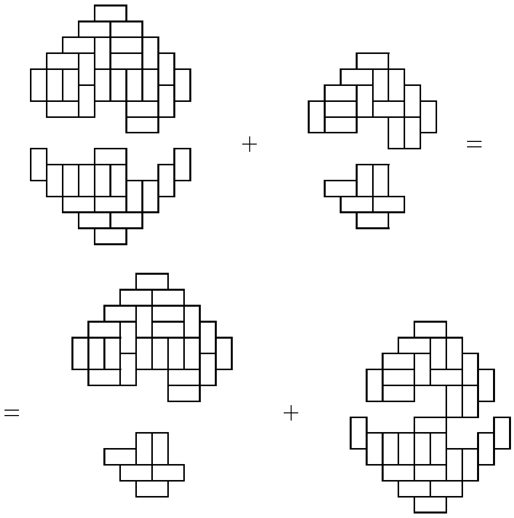
Пусть $a_1 = a$ – разделяющая клетка на левой нижней стороне. Как и в лемме 2.1, построим цепочку доминошек, начинающуюся с клетки a_1. Эта цепочка не может закончиться в клетке c, что легко видеть из соображений шахматной раскраски. Значит, она закончится в клетке b или d, пусть для определенности в d (на рисунке $a_{12} = d$). Тогда очевидно, что верхняя граница клеток цепочки есть ломаная, которая не рассекает ни одной доминошки в обоих разбиениях и при этом делит малый диамант на две части. Назовем эту ломаную разрезом малого диаманта.



Теперь определим разрез большого диаманта. Уберем из большого диаманта самую левую и самую правую доминошки и дополним разрез малого диаманта (пунктирная линия) отрезками границы нижних сторон малого диаманта (жирная линия), чтобы получился разрез большого диаманта слева направо (потребуется добавить еще два отрезка, показанных жирным пунктиром).



Теперь мы можем разрезать оба диаманта и поменять отрезанные нижние части. Мы получим разбиения верхнего и нижнего диамантов.



В случае, если цепочка, построенная из клетки a_1, закончилась бы в b, мы получили бы аналогично пару разбиений левого и правого поддиамантов.

Итак, мы описали отображение из множества A в множество B. Очевидно, что это отображение сопоставляет разным элементам множества A разные элементы множества B. Оно является взаимно однозначным, поскольку нетрудно сообразить, как устроено обратное отображение.

Оно устроено так. Для произвольной пары разбиений, скажем, левого и правого поддиамантов рассмотрим малый диамант, являющийся их пересечением. Если к нижней вершине нижнего поддиаманта прилегает блок , мы имеем дело со случаем, обратным к случаю (19). Если же такого блока нет, начнем строить цепочку клеток, аналогичную цепочке a_i. Первым разбиением будем называть разбиение нижнего диаманта, вторым – верхнего. Рассмотрим разделяющие клетки, прилегающие к нижним сторонам нижнего диаманта (если все доминошки, прилегающие к нижнему краю, ориентированы горизонтально, разделяющей назначим верхнюю из двух клеток в самом левом и в самом правом ряду); пусть a_1 – разделяющая клетка на левой нижней стороне, и пусть она будет черного цвета (при шахматной раскраске). Цепочка клеток с началом a_1 закончится, когда на очередном шаге мы окажемся вне пересечения первого и второго диамантов, причем последняя клетка в этой цепочке будет "второй" клеткой последней доминошки. Если эта доминошка из второго разбиения, то ее вторая клетка черная и, значит, мы оказались на противоположной стороне объединения диамантов. Этого не может быть, поскольку область снизу от построенной цепочки содержит нечетное число клеток, хотя при этом разбита на доминошки первым способом. Следовательно, эта доминошка – из первого разбиения, и привела она нас на разделяющую клетку правой нижней стороны, что, собственно, и требуется. Дальше режем, переставляем – и готово. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы сразу получается еще одно доказательство рекуррентного соотношения (5).

С помощью теоремы 3.1 нетрудно доказать эффект лорановости для пирамиды из функций, заданной соотношением октаэдра, см. [11, 15].

Доказательство теоремы 1.2. Проверяем соотношение (6). Пусть T_1 и T_2 – два разбиения ацтекского диаманта ранга n. Пусть биекция из теоремы 3.1 ставит в соответствие паре $(T_1, T_2) \in B$, понимаемой как разбиение верхнего и нижнего поддиамантов, пару $(U_1, U_2) \in A$, и пусть этой же паре $(T_1, T_2) \in B$, понимаемой как разбиение левого и правого поддиамантов, ставится в соответствие пара $(U_3, U_4) \in A$. Заметим, что разбиения U_3 и U_4 содержат вместе столько же вертикальных доминошек, сколько и разбиения T_1 и T_2, а разбиения U_1 и U_2 содержат вместе на две вертикальных доминошки больше, чем T_1 и T_2. Это следует из того, что биекция состоит в перекладывании частей диаманта и единственной операцией, изменяющей количество вертикальных домино, было "отрезание" двух угловых доминошек, когда мы выполняли конструкцию для верхнего и нижнего поддиамантов.

Таким образом мы находим что двум одночленам $x^{v(U_1)}x^{v(U_2)} + x^{v(U_3)}x^{v(U_4)}$ из левой части равенства (2) с помощью нашей биекции можно сопоставить два одночлена $x^{v(T_1)}x^{v(T_2)} + x \cdot x^{v(T_1)}x^{v(T_2)}$ из правой части этого равенства. Очевидно, это соотношение взаимно однозначно, что и завершает доказательство соотношения (6).

4. Ранг разбиения

Напомним, что рангом разбиения ацтекского диаманта на домино мы назвали минимальное число переключений, которое требуется сделать, чтобы получить разбиение, состоящее только из горизонтальных домино. Замечательно, что есть прямой способ вычисления ранга, не требующий разбирательства, что и в каком порядке следует переключать.

Будем называть *ребром* вертикальный или горизонтальный отрезок, соединяющий соседние узлы клетчатой плоскости. Каждое домино содержит внутри ровно одно ребро. Каждому ребру, лежащему внутри диаманта, сопоставим целое число – "вес", а каждому разбиению на доминошки сопоставим суммарный вес ребер, содержащихся внутри доминошек этого разбиения, причем подберем веса таким образом, чтобы любая операция переключения изменяла вес покрытия на фиксированную величину (у нас это число 2).

Отметим, что приводимая схема весов не зависит от разбиения, в отличие от весовой схемы в [5], где для каждого разбиения строится свое назначение весов.

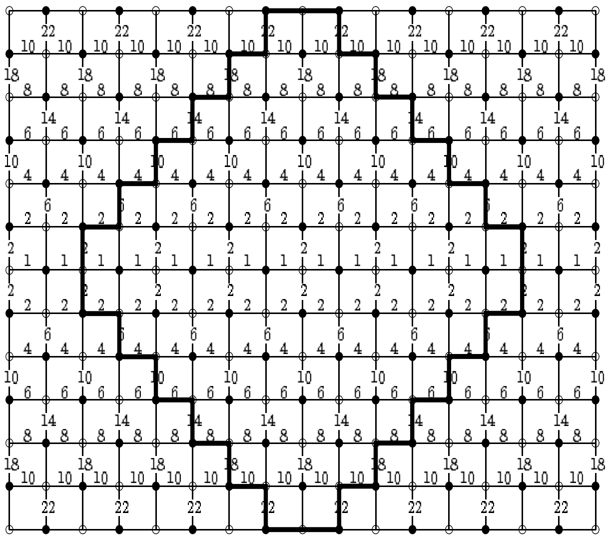


Рис. 5. Подсчет рангов разбиений с помощью весов ребер.

Набор весов, удовлетворяющий этому требованию, приведен на рис. 5: горизонтальные ребра, лежащие на оси симметрии, имеют вес 1; горизонтальные ребра, лежащие на расстоянии k от горизонтальной оси симметрии, имеют вес $2k$; вертикальные ребра в верхней полуплоскости, верхний конец которых имеет координаты разной четности (начало координат – в центре диаманта), получают вес 0, они на рисунке изображены сплошной линией без пометок; остальные ребра имеют вес $4k-2$, где k – y-координата верхнего конца ребра. В нижней полуплоскости назначение весов симметрично верхней. Очевидно, что где бы ни располагался квадрат 2×2, в котором происходит переключение, изменение веса покрытия равно 2.

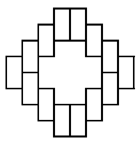
Заметим, что разметка на рис. 5 переходит в себя при горизонтальном сдвиге на 2. Мы считаем *стандартным* такое расположение диаманта, при котором два его самых левых вертикальных ребра имеют вес 2.

Теорема 4.1 ([1]). *При стандартном расположении диаманта на плоскости с разметкой, изображенной на рис. 5, ранг любого его разбиения равен полусумме весов ребер, лежащих внутри доминошек разбиения.*

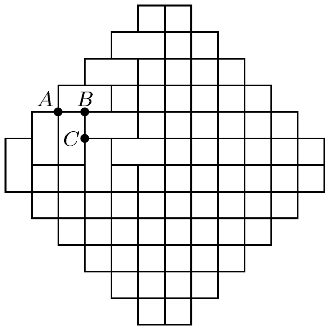
Доказательство. Докажем, что если покрытие ацтекского диаманта ранга n содержит горизонтальную доминошку, то за одно переключение его можно привести к покрытию большего веса.

Индукция по n – рангу диаманта. База $n = 1, 2$ проверяется непосредственно.

Шаг индукции. Рассмотрим домино, прилегающие к краю диаманта. Если все они одного направления, то они образуют "рамку", внутри которой стандартно расположен малый диамант ранга $n-2$ (можно считать, что эта рамка составлена из вертикальных домино, так как для горизонтальных мы сразу "переключим" две крайние левые доминошки – от этого их вес увеличится на 2). По предположению индукции внутри малого диаманта можно сделать переключение, повышающее общий вес.



Если не все домино, прилегающие к краю, имеют одно и то же направление, то где-то на границе диаманта мы можем найти "стык" вроде того, что изображен на рисунке около точки A. Рассмотрим домино D_1, у которого A – верхняя левая вершина. Если оно расположено горизонтально, то, переключая два горизонтальных домино справа от A, мы, как нетрудно видеть, увеличим общий вес.



Допустим теперь, что домино D_1 расположено вертикально. Его правую верхнюю вершину назовем B. Если домино D_2, у которого B – левая верхняя вершина, расположено вертикально, то, переключая два домино снизу от B, мы опять сможем увеличить общий вес. Поэтому допустим теперь, что домино D_2 расположено горизонтально. Его левую нижнюю вершину назовем C и рассмотрим очередное домино D_3, левая верхняя вершина которого – C. Продолжая эти рассуждения, мы будем находить все новые домино, препятствующие увеличению общего веса (при этом наши рассуждения не изменятся при достижении горизонтальной оси симметрии диаманта!). Когда диагональная цепочка таких домино дойдет до противоположной стороны диаманта, мы получим, что какое-то очередное домино выходит за пределы диаманта, чего не может быть.

Итак, если в покрытии диаманта имеется горизонтальное домино, то при помощи одного переключения вес этого покрытия может быть увеличен на 2. Аналогично, если в диаманте есть вертикальное домино, то одним переключением можно уменьшить вес покрытия на 2. Поскольку вообще любое переключение меняет вес на 2, мы заключаем, что минимальный вес имеет покрытие, состоящее только из горизонтальных домино, максимальный вес имеет покрытие, состоящее только из вертикальных домино, а ранг равен полусумме весов доминошек разбиения.

Следствие. *Максимальный ранг имеет разбиение, состоящее только из вертикальных домино, и этот ранг равен* $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Имеется простая связь между возрастанием/убыванием ранга и геометрическим расположением квадрата 2×2, в котором происходит переключение. На рис. 5 узлы сетки помечены черными и белыми кружочками “в шахматном порядке”: вершины, у которых координаты одной четности, помечены белым кружочком, а те, у которых координаты разной четности, – черным.

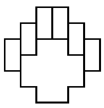
Теорема 4.2. *Если центр квадрата 2×2, в котором мы проводим переключение, расположен в белой вершине, то при переключении $\to$ ранг разбиения уменьшается, а если в черной – увеличивается.*

Это очевидно.

Нам понадобится следующее свойство введенной системы весов.

Лемма 4.1. *Зафиксируем картинку весов ребер и рассмотрим стандартное положение диаманта ранга n с разбиением T. Тогда при сдвиге диаманта на 1 вправо вниз сумма весов ребер, накрытых доминошками из T, увеличивается на $2n$.*

Доказательство. Рассмотрим сдвинутый диамант T как поддиамант в стандартном диаманте ранга $n+1$. При стандартном расположении диамант T может быть левым или правым поддимамантом. Мы же рассмотрим его как нижний поддиамант; в этом случае он будет сдвинут по отношению к своему стандартному положению как раз на нужный вектор. Замостим оставшуюся часть большого диаманта вертикальными домино.



Обозначим через $2w$ суммарный вес исходного разбиения T, а через $2u$ – сумму весов в сдвинутом диаманте; кроме того, положим для краткости $t_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Заметим, что нам потребуется $t_n - w$ переключений, чтобы все домино в (сдвинутом) диаманте стали вертикальными. Тогда мы получим разбиение большого диаманта, состоящее только из вертикальных домино, его вес равен $2t_{n+1}$. Он складывается из веса вертикальной каймы большого диаманта, который равен $2(n^2+n+1)$, и веса $2u$ сдвинутого диаманта, увеличенного на $2(t_n - w)$. Итого,

$$2t_{n+1} = 2(n^2+n+1) + 2u + 2(t_n - w)\,,$$

откуда $2(u-w)=2n$.

Доказательство теоремы 1.4. Проверим выполнение рекуррентного соотношения (7). Как и в доказательстве теоремы 1.2 в конце предыдущего раздела, рассмотрим разбиения T_1, T_2, U_1, U_2, U_3, U_4. Как мы отмечали, картинка, задающая веса ребер, не меняется при горизонтальном сдвиге на 2. Следовательно, наша биекция (“перекладывание”), сопоставляющая разбиениям T_1 и T_2, понимаемым как разбиения левого и правого поддиаманта, пару разбиений U_1, U_2, не только сохраняет количество вертикальных и горизонтальных домино, но и сохраняет веса всех домино. Таким образом, в этом случае

$$x^{v(U_1)}q^{r(U_1)}\cdot x^{v(U_2)}q^{r(U_2)}=x^{v(T_1)}q^{r(T_1)}\cdot x^{v(T_2)}q^{r(T_2)}.$$

Второе соответствие – между парой разбиений T_1 и T_2 верхнего и нижнего поддиамантов и парой разбиений U_3, U_4 – устроено чуть сложнее. Как преобразование – это по-прежнему перекладывание частей диамантов, которое не меняет также и веса доминошек. Но получающиеся при перекладывании верхний и нижний поддиаманты T_1 и T_2 смещены на 1 по вертикали относительно горизонтальной оси симметрии диамантов U_3, U_4 и на 1 по горизонтали по отношению к стандартному положению диаманта. По лемме 4.1 суммарный вес доминошек, который мы наблюдаем после перекладывания, для каждого из диамантов увеличится на $2n$.

Итак, перекладывание, сопоставляющее паре T_1, T_2 пару U_3, U_4, увеличивает суммарный вес доминошек на $2n$. Учтем также, что разбиение U_3 на самом деле есть разбиение большого диаманта, в котором удалены самая левая и самая правая вертикальные доминошки (их вклад в ранг равен 1). Это дает нам равенство

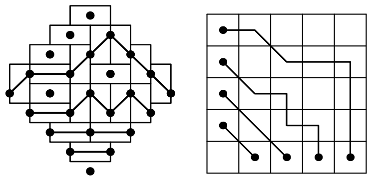
$$x^{v(U_3)}q^{r(U_3)}\cdot x^{v(U_4)}q^{r(U_4)}=q^{2n+1}\cdot x^{v(T_1)}q^{r(T_1)}\cdot x^{v(T_2)}q^{r(T_2)}.$$

Вместе с предыдущим равенством одночленов это дает нам рекуррентное соотношение (7).

5. Хромые короли

Здесь мы приведем доказательства теорем о диаманте, основанные на остроумной переформулировке задачи. Ее изобрел Ф. Штрель [16], который применял ее (вместе с теоремой 5.1) к прямоугольным доскам. Пока предыдущая статья автора [2], в которой этим способом была доказана теорема 1.1, готовилась к печати, в интернете появилось похожее доказательство теоремы 1.1, см. [14].

Отметим середины вертикальных ребер ацтекского диаманта так, как показано на рисунке, и соединим отрезками все пары отмеченных точек, которые лежат на границе одной и той же доминошки. После этого повернем картинку на 45°.



Очевидно, что в каждой вертикальной доминошке мы провели ровно один (наклонный) отрезок. В горизонтальных же домино либо имеется длинный горизонтальный отрезок, либо отрезка вообще нет – в том случае, когда центр домино – отмеченная точка. Таким образом, по нарисованной картинке разбиение диаманта на домино восстанавливается однозначно.

С другой стороны, на нижней границе диаманта все середины вертикальных ребер – отмеченные. Если мы начнем рисовать ломаные, начиная с левой нижней стороны диаманта, то очевидно, что каждая ломаная будет продолжаться вправо до тех пор, пока не выйдет на правую нижнюю границу диаманта. При этом никакие две ломаные не будут пересекаться. Поэтому после поворота картинки мы заключаем, что теорема 1.1 о количестве разбиений ацтекского диаманта на домино эквивалентна следующему утверждению.

Теорема 5.1. *Из шахматной доски $(n+1)\times(n+1)$ вырезана клетка $a1$. На всех остальных клетках вертикали "a" стоят "хромые" шахматные короли. За один ход хромой король может сдвинуться вправо, вниз или вправо-вниз на одну клетку. Тогда существует $2^{n(n+1)/2}$ непересекающихся наборов маршрутов, двигаясь по которым все n королей могут перейти на клетки нижней горизонтали (порядок ходов несуществен, важен только вид траекторий).*

5.1 Теорема Линдстрома

Для независимого доказательства теоремы 5.1 мы подсчитаем количество наборов маршрутов, воспользовавшись следующей теоремой Линдстрома [6].

Будем рассматривать конечные ориентированные графы, у которых имеется n пронумерованных вершин – “входов” и еще n пронумерованных вершин – “выходов”, таких, что, начав движение по стрелкам от любого из входов, мы обязательно придем к одному из выходов. Будем такие графы называть *ациклическими* (они заведомо не содержат ориентированных циклов). Рассмотрим набор из n непересекающихся маршрутов, ведущих от входов к выходам. Граф называется *неперестановочным*, если в любом таком наборе маршрутов каждый вход соединен с выходом, имеющим тот же самый номер.

Пусть каждому ребру приписано некоторое вещественное число – “вес”. Вес пути в таком графе определим как произведение весов составляющих его ребер, а вес набора путей – как произведение весов этих путей.

Теорема (Линдстром, см. [6]). *Пусть дан неперестановочный ациклический ориентированный граф, имеющий n входов и n выходов. Обозначим через w_{km} суммарный вес путей, ведущих от k-го входа к m-му выходу. Тогда суммарный вес всех наборов из n непересекающихся маршрутов, ведущих от входов к выходам, равен* $\det(w_{km})$.

В частности, если все веса равны 1, теорема дает рецепт подсчета количества наборов непересекающихся маршрутов от входов к выходам.

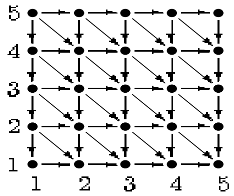
Мы рассмотрим две доски, по которым будут перемещаться хромые короли.

Первая доска – будем называть ее доска A_n – это обычная шахматная доска $(n+1)\times(n+1)$. Входы – это клетки первой вертикали, пронумерованные снизу вверх, а выходы – клетки первой горизонтали, пронумерованные слева направо. Граф возможных перемещений королей изображен ниже. Можно считать, что на угловой клетке $a1$ также стоит король, которому просто не нужно двигаться.

Вычислим матрицу, описывающую движение королей. Обозначим через a_{pr} количество всех способов, которыми хромой король может пройти с клетки $(1,p)$ на клетку $(r,1)$. Тогда элементы матрицы $A^{(n)} = (a_{pr})$ (напомним, что это матрица $(n+1)\times(n+1)$) можно вычислять последовательно по правилу, напоминающему правило вычисления биномиальных коэффициентов в треугольнике Паскаля:

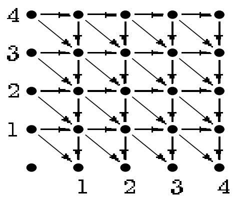
$$a_{pr} = a_{p-1\,r} + a_{p\,r-1} + a_{p-1\,r-1}.$$

Семейство чисел, заданных этим правилом, называется числами Деланноя (Delannoy). Так, для доски 5×5 (т.е. при $n = 4$) имеем



$$A^{(4)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 13 & 25 & 41 \\ 1 & 7 & 25 & 63 & 129 \\ 1 & 9 & 41 & 129 & 321 \end{pmatrix}$$

Вторая доска – обозначим ее B_n – это шахматная доска $(n+1) \times (n+1)$, у которой вырезана угловая клетка $a1$, запрещено движение королей вниз по первой вертикали и вправо по первой горизонтали. Входы – это клетки первой вертикали, пронумерованные снизу вверх, а выходы – клетки первой горизонтали, пронумерованные слева направо (и то, и другое – без учета клетки $a1$). Заметим, что *количество интересующих нас непересекающихся наборов маршрутов здесь то же самое, что и на доске* A_n. Обозначим через b_{pr} количество способов, которыми хромой король может пройти с клетки $(1, p+1)$ на клетку $(r+1, 1)$, не заходя по пути на клетки первой вертикали (т.е. на клетки $(1,1)$, $(1,2)$, … , $(1,p)$) и на клетки первой горизонтали, и рассмотрим $(n \times n)$-матрицу $B^{(n)} = (b_{pr})$, описывающую движение королей в этой ситуации. Для $n = 4$ имеем такую картинку:



$$B^{(4)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 2 & 10 & 26 & 50 \\ 2 & 14 & 50 & 126 \end{pmatrix}$$

Как видим, $B^{(4)} = 2A^{(3)}$.

Лемма 5.1.

$$b_{pr} = 2a_{p\,r}.$$

Доказательство. Рассмотрим "pr-маршруты" короля на доске B и покажем, как им можно сопоставить "pr-маршруты" на доске A.

1) Если первый ход короля – горизонтальный, то король может a_{pr} способами добраться к клетке над правым нижним углом и далее сделать ход вниз.

2) Если же первый ход – диагональный, то и после этого король имеет a_{pr} вариантов движения к правому нижнему углу. Некоторые из них, правда, приводят его на первую горизонталь (и у этих маршрутов последний ход горизонтальный) – так изменим эти маршруты, передвинув всю их среднюю часть на одну клетку вверх и заменив самый первый (диагональный) ход на горизонтальный, а самый последний (горизонтальный) ход – на диагональный.

Нетрудно видеть, что это биекция.

Доказательство теоремы 5.1. Числа a_{pr}, b_{pr} – это матричные элементы матриц $A^{(n)}$, $B^{(n)}$. Из леммы следует, что $B^{(n)} = 2A^{(n-1)}$. А так как по теореме Линдстрома величины $\det B^{(n)}$ и $\det A^{(n)}$ выражают одно и то же количество наборов маршрутов, мы получаем рекуррентное соотношение

$$\det A^{(n)} = 2^n \cdot \det A^{(n-1)},$$

из которого сразу следует утверждение теоремы 5.1.

5.2. Вертикальные домино и горизонтальные шаги

Для каждого маршрута t хромого короля обозначим через $v(t)$ количество горизонтальных шагов в этом маршруте. Положим

$$a_{pr}(x) = \sum x^{v(t)},$$

где суммирование ведется по всем маршрутам хромого короля на доске A из клетки $(1, p)$ в клетку $(r, 1)$. Аналогично определим $b_{pr}(x)$ для доски B, причем суммирование будем вести по всем маршрутам хромого короля на доске B из клетки $(1, p+1)$ в клетку $(r+1, 1)$.

Для произвольного набора $P = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ непересекающихся маршрутов королей положим

$$v(P) = v(t_1) + v(t_2) + \ldots + v(t_n).$$

Пусть

$$AA(n, x) = \sum_P x^{v(P)},$$

где суммирование ведется по всем наборам непересекающихся маршрутов на доске A_n.

Лемма 5.2.

$$b_{pr}(x) = (1+x)a_{pr}(x).$$

Доказательство. Запишем обе части доказываемого равенства как сумму одночленов и построим взаимно однозначное соответствие между слагаемыми в разных частях равенства. Рассмотрим более внимательно биекцию из доказательства леммы 5.1, два пункта в этом доказательстве дают два разных способа отождествления маршрутов. В первом пункте мы дополняем маршрут "из семейства a_{pr}" одним вертикальным и одним горизонтальным звеном. При переходе от маршрутов к одночленам мы должны соответствующий одночлен домножить на x, поскольку количество горизонтальных ходов увеличилось на 1. Во втором пункте мы добавляем к маршруту "из семейства a_{pr}" один диагональный шаг и при этом, возможно, меняем порядок шагов, выполняя горизонтальный шаг в начале, а не в конце маршрута. На уровне одночленов мы будем при этом иметь одинаковые выражения.

Доказательство теоремы 1.2. По теореме Линдстрома для случая, когда каждое горизонтальное ребро имеет вес x, а остальные ребра – вес 1,

$$AA(n,x) = \det(a_{pr}(x)).$$

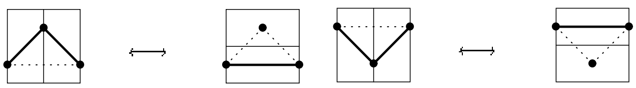
Вместе с утверждением леммы 5.2 это сразу дает нам рекуррентное соотношение

$$AA(n,x) = (1+x)^n AA(n-1,x),$$

из которого мгновенно получается утверждение теоремы 1.2.

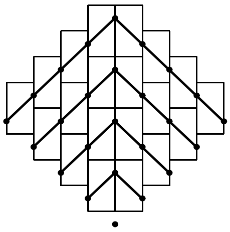
5.3. Ранг

Сделанная переформулировка вопроса о замощении ацтекских диамантов дает очень прозрачное истолкование операции переключения и ранга разбиения. Действительно, переключение – это просто замена в одном из маршрутов пары ходов "вертикальный плюс горизонтальный" на один диагональный ход (либо наоборот).

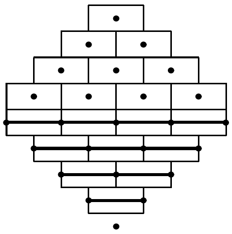


(20)

Заметим, что разбиению на вертикальные домино соответствует набор ломаных "Катеты", когда каждая ломаная идет вдоль катетов



Катеты



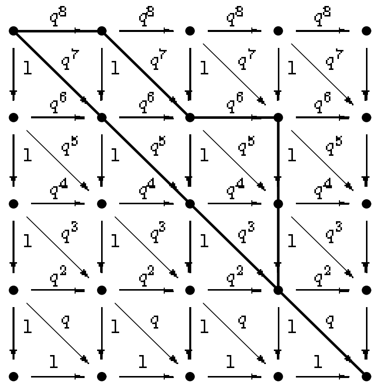
Гипотенузы

равнобедренного прямоугольного треугольника; а разбиению на горизонтальные домино соответствует набор горизонтальных ломаных "Гипотенузы" (тех же самых треугольников).

При выполнении переключений форма ломаной меняется, при этом "площадь подграфика" этой ломаной, т.е. площадь, ограниченная замкнутой линией "ломаная + прямая, соединяющая ее концы", меняется на 1, см. (20) (сторона доминошки равна 1). Таким образом, ранг разбиения равен сумме площадей подграфиков всех ломаных.

Докажем, например, еще раз следствие из теоремы 4.1 о том, что максимальный ранг разбиения равен $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Минимальные площади подграфиков имеет набор ломаных "Гипотенузы" – площади всех подграфиков ломаных в этом наборе равны нулю. Максимальные площади подграфиков имеет набор ломаных "Катеты" – площади подграфиков его ломаных равны 1, 4, ... , n^2. Таким образом, максимальный ранг равен $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$, что и требуется.

Теперь мы опишем, как ранг разбиения может быть задан в терминах весов ребер графа перемещений. Пусть, как обычно, вес пути в графе равен произведению весов его ребер; а вес набора из нескольких путей равен произведению весов этих путей. Рассмотрим следующее назначение весов. Здесь каждое вертикальное ребро имеет вес 1. Каждое из остальных ребер имеет вес q^S, где S – площадь вертикального столбика, у которого это ребро является верхней стороной.



Пусть $f(q)$ есть сумма весов всех наборов непересекающихся маршрутов королей на доске A_n для приведенного выше набора весов.

Лемма 5.3.

$$f(q) = q^{n(n+1)(2n+1)/6} AD(n, q).$$

Доказательство. Как мы отмечали, для каждого набора непересекающихся маршрутов королей ранг соответствующего разбиения на домино равен сумме площадей областей, каждая из которых заключена между ломаной, по которой двигался король, и прямой, соединяющей его начальное и конечное положение. Предлагаемое назначение весов позволяет вычислять эти площади как веса путей. Например, на картинке показаны два пути из точки $(1;5)$ – диагональный, его вес равен q^{16}, и второй, его вес равен $q^8 \cdot q^7 \cdot q^6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot q = q^{22}$. Частное весов – q^6 – имеет показатель, как раз равный площади области между путями.

Напомним, что A_n – это доска $(n+1) \times (n+1)$. Вес набора, состоящего только из диагональных путей, равен $q^{n(n+1)(2n+1)/6}$. Таким образом, вес любого набора, деленный на $q^{n(n+1)(2n+1)/6}$, совпадает с соответствующим слагаемым в ранговом многочлене $AD(n, q)$, а сумма всех таких выражений и есть в точности ранговый многочлен!

Обозначим

$$a_{pr}(q) = \sum_P r(P),$$

где суммирование ведется по всем маршрутам P хромого короля из клетки $(1, p+1)$ в клетку $(q+1, 1)$, а через $r(P)$ обозначен вес маршрута P (который имеет вид q^S). По прежнему, в задачах о диаманте ранга n матрица $a_{pr}(q)$ имеет размеры $(n+1) \times (n+1)$.

По теореме Линдстрома многочлен $f(q)$ равен определителю матрицы $a_{pr}(q)$. К сожалению, лемма 5.1 непосредственно не обобщается на ранги, поэтому для подсчета определителя мы применим другое рассуждение.

Теорема 5.2.

$$\det a_{pr}(q) = q^{n(n+1)(2n+1)/6} \prod_{k=0}^{n-1} (1 + q^{2k+1})^{n-k}.$$

Доказательство. Последовательно проделаем с матрицей $a_{pr}(q)$ следующие действия, не меняющие определителя.

1. Просматривая матрицу снизу вверх до второй строки включительно, вычтем из каждой строчки предыдущую:

$$a_{pr}^{(1)}(q) = a_{pr}(q) - a_{p-1\, r}(q) \quad \text{при} \quad p > 1.$$

2. Просматривая матрицу снизу вверх до третьей строки включительно, вычтем из каждой строчки предыдущую, умноженную на q^2:

$$a_{pr}^{(2)}(q) = a_{pr}^{(1)}(q) - q^2 a_{p-1\, r}^{(1)}(q) \quad \text{при} \quad p > 2.$$

3. Просматривая матрицу снизу вверх до четвертой строки включительно, вычтем из каждой строчки предыдущую, умноженную на q^4:

$$a_{pr}^{(3)}(q) = a_{pr}^{(2)}(q) - q^4 a_{p-1\, r}^{(2)}(q) \quad \text{при} \quad p > 3.$$

И так далее (на m-м шаге используется множитель q^{2m-2}).

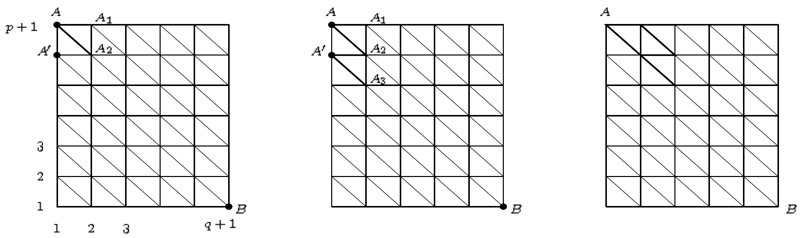
Мы утверждаем, что в результате получится верхнетреугольная матрица, у которой в $(m+1)$-й строке на диагонали стоит элемент

$$a_{m+1\, m+1}^{(m)}(q) = q^{m^2} \prod_{k=0}^{m-1} (1 + q^{2k+1}). \tag{21}$$

Утверждение теоремы немедленно получается из этого факта. Для доказательства предъявим комбинаторные истолкования многочленов

$a^{(m)}_{pq}(q)$. Чтобы не думать о краевых эффектах, будем пока считать, что числа p и q больше m.

Напомним, что $a_{pr}(q)$ – это сумма весов путей хромого короля из клетки $(1, p{+}1)$ в клетку $(q{+}1, 1)$. Вычисляя $a^{(1)}_{pr}(q)$, мы рассматриваем со знаком плюс веса путей, ведущих из точки A в точку B, и со знаком минус – веса путей из точки A' в точку B (см. левый рисунок). Заметим, что каждый путь $A'B$ может быть достроен до пути AB, если добавить к нему вертикальный отрезок AA'; вес пути при этом не изменится. Таким образом, $a^{(1)}_{pr}(q)$ – это сумма весов путей хромого короля из клетки $(1, p + 1)$ в клетку $(q + 1, 1)$, которые не содержат отрезок AA'. Эти пути выходят из точки A либо по отрезку AA_1, либо по отрезку AA_2.



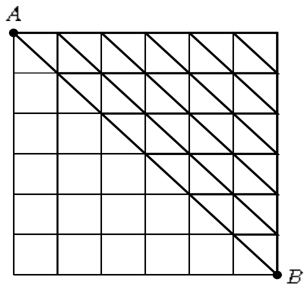
Теперь поймем, что представляет собой $a^{(2)}_{pr}(q)$. Вычисляя $a^{(2)}_{pr}(q)$, мы берем со знаком плюс веса путей вида AA_1B, AA_2B и со знаком минус веса путей $A'A_2B$, $A'A_3B$ (домноженные на q^2, см. средний рисунок). Зафиксируем на секунду какие-либо пути A_3B и A_2B и заметим, что

$$r(AA_2A_3B) = q^2 r(A'A_3B), \quad r(AA_1A_2B) = q^2 r(A'A_2B).$$

Следовательно, мы можем считать, что все пути из A' сокращаются в нашей разности, и таким образом многочлен $a^{(2)}_{pr}(q)$ подсчитывает веса путей AB, идущих вблизи A по жирным отрезкам (см. правый рисунок).

Продолжая рассуждение, мы аналогично установим, что многочлен $a^{(m)}_{pr}(q)$ подсчитывает веса путей AB, идущих вблизи A по перекошенному треугольнику Паскаля ранга m; иными словами, эти пути не должны содержать вертикальных отрезков на линиях $x = 1$, $x = 2$, $\ldots$, $x = m$.

Учет краевых условий показывает, что при $p > q = m + 1$ требуемых путей не существует, поэтому процесс, описанный в начале доказательства, дает верхнетреугольную матрицу. С другой стороны, при $p = q = m+1$ многочлен $a_{pr}^{(m)}(q)$ дает множество путей, идущих по перекошенному треугольнику Паскаля до вертикальной линии, содержащей точку B (и по ней спускающихся вниз). Нетрудно проверить, что суммарный вес таких путей задается формулой (21).



Доказательство теоремы 1.3 сразу следует из леммы 5.3 и теоремы 5.2.

6. Разбиения квадратов на домино

Обозначим через K_{2n} квадрат $2n \times 2n$. Как и для ацтекских диамантов, количество вертикальных домино в произвольном разбиении T квадрата K_{2n} четно, будем обозначать его $2v(T)$. В стиле предыдущих обозначений пусть $AK(2n, x)$ обозначает производящую функцию для числа вертикальных домино:

$$AK(2n, x) = \sum_T x^{v(T)}.$$

В статье Л. Пачтера [10] доказана следующая теорема.

Теорема 6.1. *Количество разбиений на домино квадрата $2n \times 2n$ – это число вида*

$$\#K_{2n} = 2^n(2m + 1)^2.$$

Мы не будем повторять здесь доказательство этой теоремы. Но нам потребуется доказательство чуть более слабого результата.

Лемма 6.1. *Количество разбиений на домино квадрата $2n \times 2n$ делится на 2^n.*

Доказательство. Рассмотрим одну диагональ квадрата и раскрасим клетки этой диагонали попеременно в черный и белый цвета. Говоря ниже о диагонали, мы будем иметь в виду только эту диагональ. Пусть A – одна из черных клеток, T – произвольное разбиение квадрата K_{2n} на домино, T' – разбиение, симметричное T относительно диагонали.

Построим по разбиениям T и T' цепочку клеток, содержащую клетку A. Нетрудно сообразить, что цепочка симметрична относительно диагонали и кроме клетки A имеет на диагонали еще ровно одну – белую! – клетку (в противном случае цепочка охватывает симметричную область, разбитую на доминошки, но при этом содержащую нечетное число клеток). Цепочки, соответствующие разным черным клеткам диагонали, попарно не пересекаются. Значит, существует ровно n непересекающихся цепочек, содержащих клетки диагонали. Доминошки, не принадлежащие ни одной из цепочек, будем называть стабильными.

Заметим теперь, что при сдвиге доминошек в любой из цепочек получится новое разбиение на домино. Тогда мы можем разбить все множество разбиений на домино на блоки по 2^n штук: для каждого разбиения возьмем все его стабильные доминошки, а оставшуюся часть фигуры замостим, пользуясь для каждой из n цепочек выбором – отражать эту цепочку относительно диагонали или оставить как есть. Вместе с каждым из 2^n вариантов этого выбора мы получим свое разбиение на домино – всего 2^n штук.

Лемма 6.2. *Возьмем любую цепочку из доказательства леммы* 6.1. *Пусть она содержит V вертикальных и H горизонтальных доминошек. Тогда число $\frac{1}{2}(V - H)$ – нечетное.*

Доказательство. Удобнее перейти к двойственному объекту. Пусть доминошки изображаются отрезками, соединяющими центры соседних клеток. Отрезки первого разбиения будем рисовать красным цветом, отрезки второго – синим. Тогда цепочка – это цикл, в котором красные отрезки чередуются с синими. Обозначим через L половину цепочки, т. е. путь, начинающийся и кончающийся на диагонали. Пусть первое звено в L красное; тогда последнее – синее, это ясно из соображений шахматной раскраски. Обозначим, через H_r, H_b, V_r, V_b количество горизонтальных красных, горизонтальных синих, вертикальных красных и вертикальных синих звеньев в пути L соответственно. Тогда в силу симметрии очевидно, что во всей цепочке имеется V_r вертикальных красных звеньев, принадлежащих L, и H_b вертикальных красных звеньев, не принадлежащих L, а также имеется H_r горизонтальных красных звеньев, принадлежащих L, и V_b горизонтальных красных звеньев, не принадлежащих L. Следовательно,

$$V - H = V_r + H_b - V_b - H_r. \tag{22}$$

Разобьем путь L на двузвенные фрагменты, каждый из которых содержит красное и следующее за ним синее звено. Если оба звена вертикальны или оба горизонтальны, то суммарный вклад этих звеньев в правую часть (22) нулевой. Если же звенья "образуют уголок", то их вклад равен ± 2. Нам осталось проверить, что количество таких уголков нечетно.

Как отмечалось в доказательстве леммы 6.1, между концами пути L расположено четное число клеток диагонали. Введем систему координат, в которой начало пути L имеет координаты $(0,0)$, а конец – координаты $(2m+1, 2m+1)$. Будем двигаться по пути L от начала к концу. Смещение по прямолинейному двузвенному фрагменту не меняет четности x-координаты, а по "уголковому" – меняет. Поэтому число рассматриваемых уголков нечетно.

Это рассуждение подсказал нам Е. Абакумов.

Теорема 6.2. *Существует такой многочлен $P_n(x)$ с целыми коэффициентами ($\deg P_n = n^2 - 2$), что*

$$AK(2n, x) = (1 + x)^n P_n(x).$$

Доказательство. Рассмотрим все n цепочек из доказательства леммы 6.1. Пусть k-я цепочка содержит v_k вертикальных и g_k горизонтальных доминошек, а стабильная часть содержит V вертикальных доминошек. Тогда суммарный вклад в производящую функцию блока из 2^n разбиений, построенного в доказательстве леммы 6.1, равен

$$(x^{v_1/2} + x^{g_1/2})(x^{v_2/2} + x^{g_2/2}) \dots (x^{v_n/2} + x^{g_n/2}) x^V.$$

По лемме 6.2 числа $\frac{1}{2}(v_k - g_k)$ нечетны, следовательно, каждая скобка делится на $(1 + x)$, и все произведение делится на $(1 + x)^n$. Суммируя вклады всех блоков, получаем, что вся производящая функция делится на $(1 + x)^n$.

Замечание. Утверждение теоремы 6.2 можно легко вывести из результатов Кастелейна [8]. Кроме знаменитой формулы

$$\#K_{2m,2n} = 4^{mn}\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\left(\cos^2\frac{j\pi}{2m+1}+\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}\right),$$

Кастелейн доказывает и более тонкую формулу. Пусть

$$AK_{2m,2n}(x,y) = \sum_T x^{v(T)}y^{h(T)},$$

где суммирование ведется по всем разбиениям T прямоугольника на домино, $v(T)$ – половина числа вертикальных, а $h(T)$ – половина числа горизонтальных доминошек в разбиении T. Тогда

$$AK_{2m,2n}(x,y) = 4^{mn}\prod_{j=1}^{m}\prod_{k=1}^{n}\left(y\cos^2\frac{j\pi}{2m+1}+x\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}\right).$$

Полагая $y=1$, мы можем записать

$$\begin{aligned}AK(2n,x) &= AK_{2n,2n}(x,1)\\ &= 4^{n^2}\left(\prod_{j=1}^{n}\cos^2\frac{j\pi}{2n+1}\right)^n\prod_{j=1}^{n}\prod_{k=1}^{n}\left(x+\frac{\cos^2\frac{k\pi}{2n+1}}{\cos^2\frac{j\pi}{2n+1}}\right).\end{aligned}$$

Как видим, в последнем произведении при $j=k$ получается скобка $(x+1)$. Таким образом, -1 – корень многочлена $AK(2n,x)$ кратности n. Деля многочлен $AK(2n,x)$ на $(x+1)$, полученное частное – еще раз на $(x+1)$, потом снова на $(x+1)$ и т.д., убеждаемся что результат деления $AK(2n,x)$ на $(x+1)^n$ будет многочленом с целыми коэффициентами.

Ранг разбиений прямоугольников

Подход, примененный в разделе 5, позволяет ввести понятие ранга разбиения для разбиений на домино большого класса клетчатых фигур, включая прямоугольники (впрочем, мы будем говорить только о квадратах). Отметим середины вертикальных ребер через одну и соединим отрезками все пары отмеченных точек, которые лежат на границе одной и той же доминошки. Как и в случае с диамантами, по нарисованной картинке разбиение прямоугольника на домино восстанавливается однозначно. Тот же очевидный эффект (20) имеет операция переключения: при ее выполнении одна ломаная либо “поднимается вверх”, либо “опускается вниз”.

На рис. 6, 7 показаны разбиения квадрата, для которых ломаные находятся в самом нижнем и в самом высоком положении. Эти разбиения распадаются в объединение “рамок” – у минимального разбиения горизонтальные стороны рамок целиком выложены горизонтальными доминошками, а у максимального разбиения вертикальные стороны целиком выложены вертикальными доминошками.

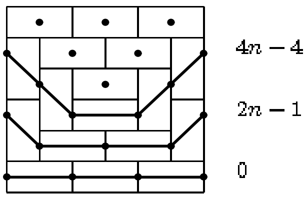


Рис. 6. Разбиение минимального ранга.

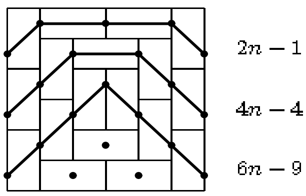


Рис. 7. Разбиение максимального ранга.

Определение 5. *Рангом разбиения квадрата на домино назовем минимальное количество переключений, которое требуется, чтобы получить разбиение, изображенное на рис. 6. Введем также соответствующую производящую функцию*

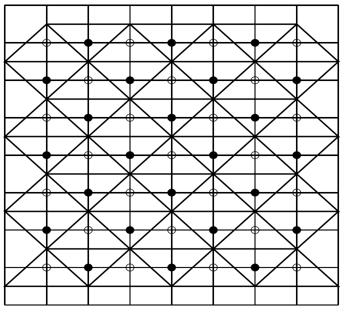
$$AK(n,q) = \sum_T q^{r(T)}.$$

Лемма 6.3. *Максимальный ранг разбиения квадрата K_{2n} на домино равен $\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$.*

Доказательство. Достаточно вычислить, какова площадь между соответственными ломаными в максимальном и минимальном положениях. Для удобства вычислений рядом с каждой ломаной на рис. 6 указано, насколько она прогнулась вниз, т.е. какова площадь между этой ломаной и горизонталью, соединяющей ее концы. Как видим, k-й снизу ломаной соответствует площадь $2(k-1)n-(k-1)^2$. Аналогичные пометки сделаны на рис. 7. Суммируя, получаем, что максимальный ранг равен

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(2(k-1)n-(k-1)^2\Big)+\sum_{k=1}^{n}\Big(2kn-k^2\Big)$$
$$=2\Big(2n\cdot\frac{(n-1)n}{2}-\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}\Big)+n^2=\frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

Как и в случае с ацтекскими диамантами, ранг разбиения может быть вычислен с помощью назначения весов ребер, показанного на рис. 5. Утверждение теоремы 4.2 наглядно иллюстрируется с помощью наших ломаных. Ниже на рисунке воспроизведена черно-белая разметка узлов, как на рис. 5, а также нарисованы линии, по которым могут идти наши вспомогательные ломаные. Если центр квадрата 2×2, в котором происходит переключение  $\to$ , расположен в белой вершине, то ранг разбиения уменьшается, а если в черной – увеличивается. Это следует из того, что соответствующая ломаная изменится так, как показано на диаграмме (20).



Как и в случае с диамантами, ранг разбиения может быть вычислен с помощью специального назначения весов, см. рис. 8.

Множитель 2^n из теоремы 6.1 может быть истолкован также и в терминах ранговых многочленов.

Теорема 6.3. *Существует такой многочлен $R_n(q)$ с целыми коэффициентами, что*
$$AK(2n,q)=(1+q)^nR_n(q).$$

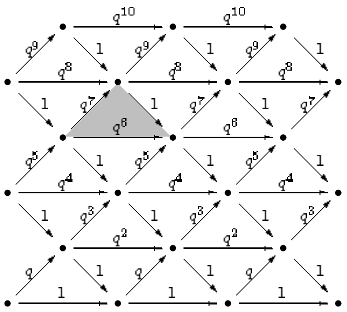


Рис. 8. Веса для ранговой статистики.

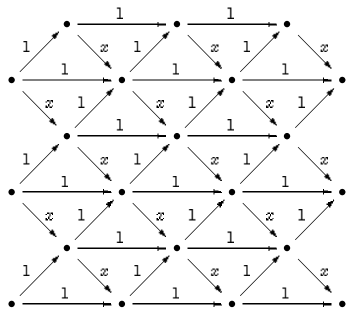


Рис. 9. Веса для вертикальной статистики.

Доказательство. Пусть

$$a_{ij}(q) = \sum_P w(P),$$

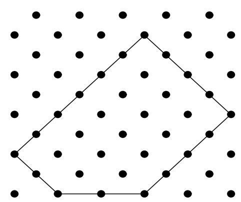
где суммирование ведется по всем путям от i-го входа к j-му выходу, а слагаемые $w(P)$ – это веса путей, заданные на рис. 8. По теореме Линдстрома

$$q^M AK(2n, q) = \det\Big(a_{ij}(q)\Big),$$

где M – нормировочный показатель, равный весу минимального набора путей. Мы докажем, что все матричные элементы $a_{ij}(q)$ делятся на $(1+q)$. Утверждение теоремы следует отсюда немедленно.

Возьмем произвольный "маленький" треугольник вроде того, что закрашен на рис. 8. Рассмотрим два любых пути, совпадающих всюду, кроме границы этого треугольника: один идет по основанию, а другой по обеим боковым сторонам. Очевидно, сумма весов этих двух путей делится на $(1+q)$.

Заметим еще, что, поскольку в графе перемещений количество вертикальных рядов вершин на 1 больше количества горизонтальных, пути, идущие от i-го входа к j-му выходу, расположены в пятиугольнике, у которого 4 стороны идут по диагонали, а пятая сторона горизонтальна. Исключения составляют только случаи $i = 1$ или $j = 1$ – в этих случаях пути заметают четырехугольник или даже треугольник, но и здесь одна из сторон обязательно горизонтальна.



Опишем разбиение множества путей, составляющих выражение $a_{ij}(q)$, на пары, такие, что сумма весов путей в одной паре делится на $(1+q)$. Пусть пути, идущие от i-го входа к j-му выходу, заметают область, у которой горизонтальна нижняя сторона. Возьмем какой-нибудь путь; путь – это последовательность звеньев “вправо вверх”, “вправо”, “вправо вниз”. Нас интересуют два вида фрагментов: двузвенный “вправо вверх – вправо вниз” и однозвенный “вправо”. Найдем в нашем пути самое раннее вхождение такого фрагмента (оно существует, в силу того что нижняя сторона области горизонтальна) и заменим его на второй фрагмент. Получится другой путь. Это и есть требуемое разбиение на пары.

В случае, когда горизонтальная сторона – верхняя, следует рассматривать треугольники, у которых вершина ниже основания (а для разбиения на пары – фрагменты “вправо вниз – вправо вверх” и “вправо”).

Замечание. Хотя по теореме 6.1 число $\#K_{2n}/2^n$ есть точный квадрат, многочлены $P_n(x)$ и $R_n(x)$ из теорем 6.2 и 6.3 не являются квадратами многочленов. Например, в приложении 2 перечислены все разбиения на домино квадрата K_4 и указан вклад каждого разбиения в функции $AK(4,x)$, $AK(4,q)$. Суммируя, получаем, что

$$\begin{aligned} AK(4,x) &= 1+9x+16x^2+9x^3+x^4 = (1+x)^2(1+7x+x^2), \\ AK(4,q) &= 1+q+2q^2+5q^3+6q^4+6q^5+6q^6+5q^7+2q^8+q^9+q^{10} \\ &= (1+q)^2(1-q+3q^2+3q^4+3q^6-q^7+q^8)\,. \end{aligned}$$

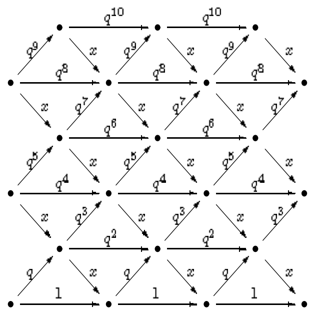
Другое доказательство теоремы 6.2. Заметим, что вертикальным домино соответствуют наклонные отрезки в графе перемещений.

Поскольку функция $AK(n,x)$ учитывает лишь половину всех вертикальных домино, достаточно рассматривать лишь отрезки, идущие, скажем, вправо вниз. Тогда функция $AK(n,x)$ также может быть подсчитана по теореме Линдстрома для назначения весов, показанного на рис. 9. Это назначение весов обладает тем же свойством, что и предыдущее: сумма весов путей, обходящих с разных сторон границу любого элементарного треугольника, делится на $(1+x)$. Поэтому применимо рассуждение из доказательства теоремы 6.3.

Замечание. Рассмотрим производящую функцию

$$AK(n,x,q)=\sum_T x^{v(T)}q^{r(T)}.$$

Утверждение о том, что функция $AK(n,x,q)$ делится на n-ю степень некоторого многочлена, неверно. Но тем не менее утверждения теорем 6.2 и 6.3 можно объединить следующим образом. Рассмотрим совместное назначение весов



Здесь сумма весов любых двух путей, совпадающих всюду, кроме обхода элементарного треугольника, делится на $(x+q)$ или $(1+qx)$. Поэтому многочлен $AK(n,x,q)$ представим в виде линейной комбинации многочленов вида $(x+q)^k(1+qx)^{n-k}$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}[x,q]$.

Приложение 1. Ацтекские подземелья

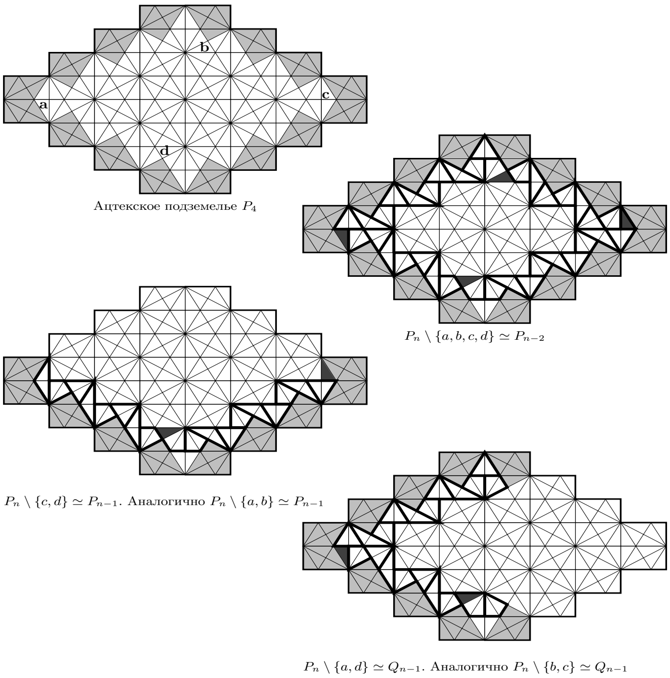


Рис. 10. Соотношение $P_n P_{n-2} = P_{n-1}^2 + Q_{n-1}^2$.

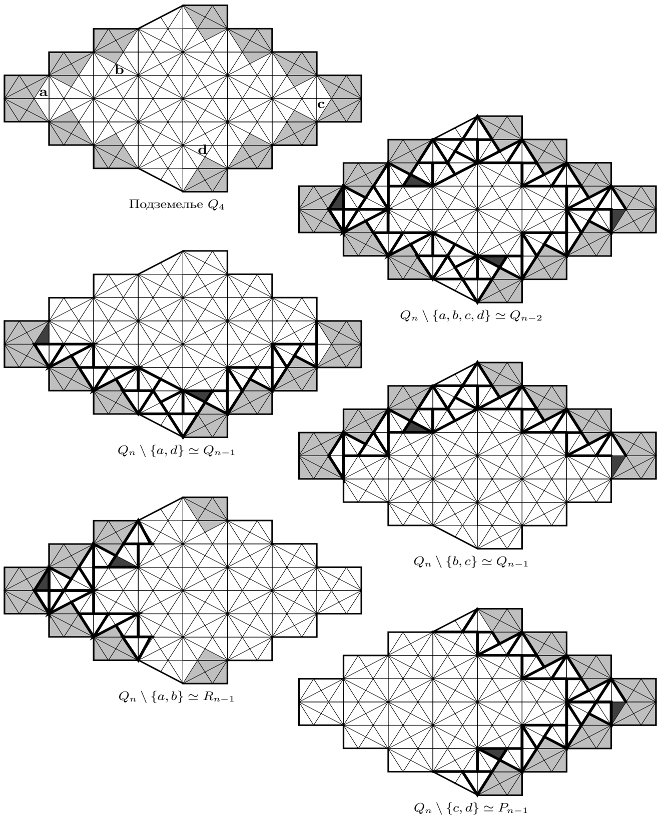


Рис. 11. Соотношение $Q_nQ_{n-2} = Q_{n-1}^2 + P_{n-1}R_{n-1}$.

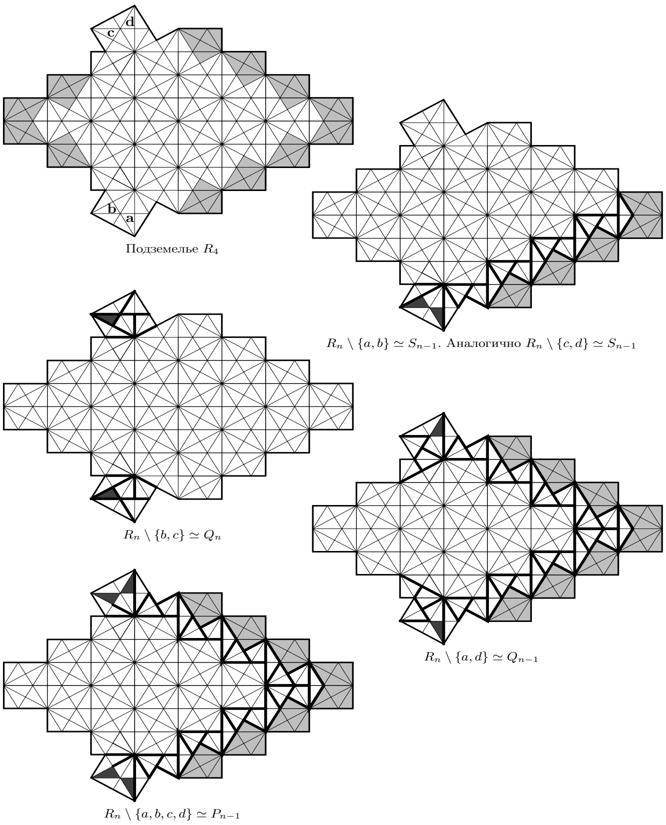


Рис. 12. Соотношение $R_n P_{n-1} = Q_n Q_{n-1} + S_{n-1}^2$.

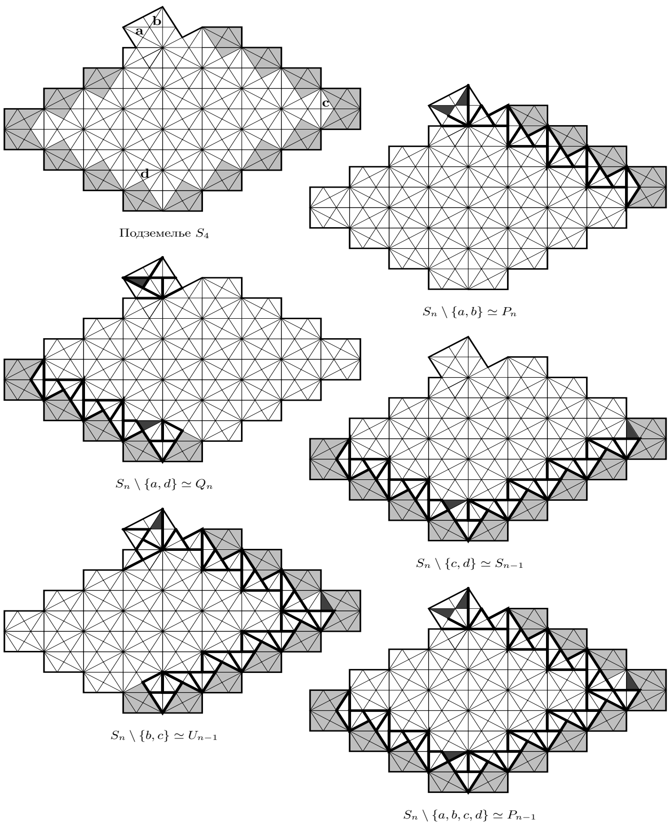
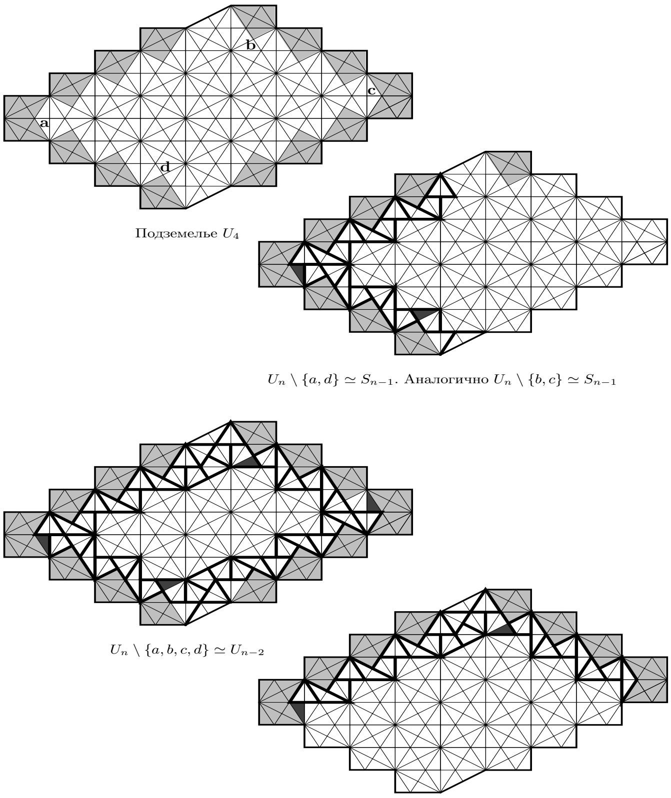


Рис. 13. Соотношение $S_n P_{n-1} = P_n S_{n-1} + Q_n U_{n-1}$.



Подземелье U_4

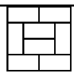
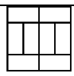
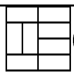
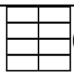
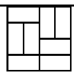
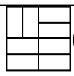
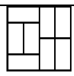
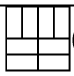
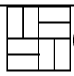
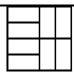
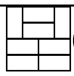
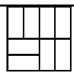
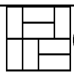
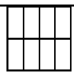
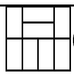
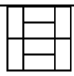
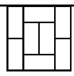
$U_n \setminus \{a, d\} \simeq S_{n-1}$. Аналогично $U_n \setminus \{b, c\} \simeq S_{n-1}$

$U_n \setminus \{a, b, c, d\} \simeq U_{n-2}$

$U_n \setminus \{a, b\} \simeq U_{n-1}$. Аналогично $U_n \setminus \{c, d\} \simeq U_{n-1}$

Рис. 14. Соотношение $U_n U_{n-2} = S_{n-1}^2 + U_{n-1}^2$.

Приложение 2. Разбиения квадрата 4×4

Ранг	Разбиения	Вклад в $AK(2n, q)$	Вклад в $AK(2n, x)$
0		1	x
1		q	x^2
2	(2)	$2q^2$	$2x$
3	(1) , (4)	$5q^3$	$1+4x^2$
4	(4) , (2)	$6q^4$	$4x+2x^3$
5	(2) , (2) , (2)	$6q^5$	$6x^2$
6	(2) , (4)	$6q^6$	$2x+4x^3$
7	(4) , (1)	$5q^7$	$4x^2+x^4$
8	(2)	$2q^8$	$2x^3$
9		q^9	x^2
10		q^{10}	x^3

Литература

1. С. Л. Берлов, С. В. Иванов, К. П. Кохась, *Петербургские математические олимпиады.* Задача 97.109. Лань, СПб. (2003).
2. К. П. Кохась, *Разбиения на домино.* — Мат. просвещение. Третья серия, вып. 9 (2005), 143–163.
3. M. Ciucu, *Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry.* — J. Combin. Theory Ser. A. **77**, No. 1 (1997), 67–97.

4. M. Ciucu, *Perfect matchings and perfect powers.* — J. Algebraic Combin. **17**, No. 3 (2003), 335–375.
5. N. Elkies, G. Kuperbeg, M. Larsen, J. Propp, *Alternating-sign matrices and domino tilings.* — J. Algebraic Combin. **1** (1992), 111–132.
6. I. M. Gessel, X. G. Viennot, *Determinants, paths and plane partitions.* Preprint (1989).
7. P. John, P. Sachs, H. Zarnitz, *Domino covers in square chessboards.* — Zastosowania Matematyki (Applicationes Mathematicae) XIX, 3–4 (1987), 635–641.
8. P. W. Kasteleyn, *The statistics of dimers on a lattice* I. *The number of dimer arrangements on a quadratic lattice.* — Physica **27** (1961), 1209–1225.
9. E. Kuo, *Application of graphical condensation for enumerating matchings.* — Teoret. Comput. Sci. **319** (2004), 29–57, `arXiv:math.CO/0304090`.
10. L. Pachter, *Combinatorial approaches and conjectures for 2-divisibility problems concerning domino tilings of polyminoes.* — Electron. J. Combin. **4** (1997), R29.
11. J. Propp, *Frieze-ing and condensation*, `http://www.math.wisc.edu/~propp/bilinear/domino`.
12. J. Propp, *Generalized domino shuffling*, `arXiv:math.CO/0111034`.
13. J. Propp, R. Stanley, *Domino tilings with barriers.* — J. Combin. Theory Ser. A. **87**, No. 2 (1999), 347–356, `arXiv:math.CO/9801067`.
14. Eu Sen-Peng, Fu Tung Shan, *A simple proof of Aztec diamond theorem*, `arXiv:math.CO/0412041`.
15. D. Speyer, *Perfect matchings and the octahedron recurrence.* — J. Algebraic Combin. **25**, No. 3 (2007), 309–348.
16. V. Strehl, *Counting domino tilings of rectangles via Resultants.* — Adv. in Appl. Math. **27**, No. 2–3 (2001), 597–626.
17. Yang Bo-Yin, *Three enumeration problems concerning Aztec diamonds.* Ph. D. Thesis, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts (1991).

Kokhas K. P. Domino tilings of aztec diamonds and squares.

The article gives several new combinatorial proofs of well-known theorems about domino tilings of aztec diamonds and squares. We prove also generalizations of these theorems for the generating polynomials of some statistics of tilings. Some results here are new, for example, we describe how to calculate the rank of a tiling using special weights of edges on the square grid.

The text is self-sufficient, we give numerous illustrations to all combinatorial constructions.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: kostik@kk1437.spb.edu

Поступило 19 ноября 2008 г.