Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 360, 2008 г.

В. С. Капитонов, А. Г. Пронько

ПЯТИВЕРШИННАЯ МОДЕЛЬ И ПЛОСКИЕ РАЗБИЕНИЯ В ЯЩИКЕ

1. Введение

Плоские разбиения являются естественным обобщением обычных (линейных) разбиений неотрицательных целых чисел. Для заданного числа n его плоское разбиение есть представление вида $n = \sum_{i_1,i_2\geqslant 0} n_{i_1 i_2}$, где $n_{i_1 i_2}$ $(i_1, i_2 = 1, 2, \dots)$ – целые неотрицательные числа, такие, что $n_{i_1 i_2} \geqslant n_{j_1 j_2}$ всякий раз, как $i_1 \leqslant j_1$, $i_2 \leqslant j_2$ (см., например, [1, 2]). Плоские разбиения часто представляют в виде таблиц

$$\begin{matrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} & \cdots \\ n_{2,1} & n_{2,2} & n_{2,3} & \cdots \\ n_{3,1} & n_{3,2} & n_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix} \tag{1.1}$$

Рассматривая числа $n_{i_1 i_2}$ как значения высот, такие таблицы можно естественно интерпретировать как "трехмерные диаграммы Юнга".

В том случае, когда размер таблиц и максимальное значение чисел $n_{i_1 i_2}$ ограничен, плоские разбиения именуются плоскими разбиениями в ящике. Более точно, для таких плоских разбиений подразумевается выполнение дополнительных условий: $n_{i_1 i_2} = 0$ при $i_1 \geqslant a$ и $i_2 \geqslant b$, и, кроме того, $n_{i_1 i_2} \leqslant c$ для $i_1 \leqslant a$, $i_2 \leqslant b$, где a, b, c – натуральные числа. Эти числа могут интерпретироваться как линейные размеры параллелепипеда, а сами плоские разбиения – как его укладки единичными кубами. Как следует из определения плоских разбиений, укладки кубов тогда будут характеризоваться невозрастающей высотой поверхности (значением ее координаты вдоль оси z) при увеличении значения координат x и y.

При графическом изображении плоских разбиений как трехмерных диаграмм Юнга существует естественная интерпретация конфигураций укладок кубами в терминах "градиентных" линий. Эти ли-

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 07-01-00358 .

нии могут быть определены как результат пересечения поверхности укладок кубами, включая границы ящика, с плоскостями $x = p + 1/2$ ($p = 0, 1, \dots$). Пример плоского разбиения с указанием градиентных линий, которые изображены жирными линиями, приведен на рис. 1 слева. Очевидно, что конфигурации градиентных линий находятся во взаимно однозначном соответствии с плоскими разбиениями в ящике.

Рассматривая эти градиентные линии как линии некоторой вершинной модели на квадратной решетке, нетрудно видеть, что данная модель является пятивершинной моделью, соответствующая конфигурация которой показана на рис. 1 справа. Отличие этой модели от знаменитой шестивершинной модели заключается в запрете вершины со встречающимися линиями. Отождествление элементарных фрагментов плоского изображения трехмерных укладок кубами с вершинами модели показано на рис. 2. Модель рассматривается на решетке с N горизонтальными и M вертикальными прямыми, причем $N = b + c$ и $M = a + b$; граничные условия фиксированные, с b подряд входящими линиями на верхней границе справа и исходящими на левой границе внизу. Для перечисления плоских разбиений все веса должны быть выбраны равными единице.

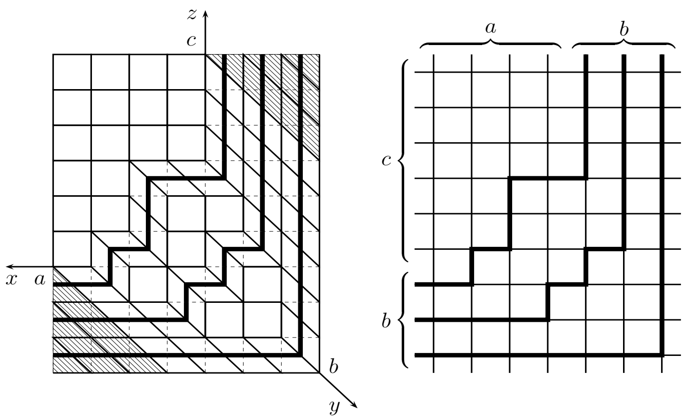

Рис. 1. Слева: пример плоского разбиения в трехмерной интерпретации. Жирными линиями изображены ‘‘градиентные’’ линии. Справа: соответствующая конфигурация пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями.

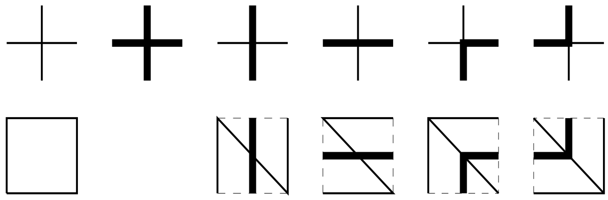

Рис. 2. Вершины шестивершинной модели и соответствующие им плоские фрагменты изображения трехмерных укладок. В пятивершинной модели вершина второго типа исключена.

Стандартный подход к исследованию плоских разбиений, описанных в терминах градиентных линий, основан на использовании теории непересекающихся путей [3–5]. Цель нашей работы – показать, что привлечение пятивершинной модели позволяет использовать также и алгебраические методы интегрируемых моделей для вычисления различных интересных величин, связанных с плоскими разбиениями.

Чтобы дать пример одной такой величины, полезно также упомянуть, что плоские разбиения часто рассматриваются как покрытия шестиугольника ромбами трёх типов [6]. Данный шестиугольник легко видеть на левой картинке рис. 1 (светлая область). Ромбами здесь являются два типа ромбов и квадраты (ромбы с углами 90°). Интерес представляет число плоских покрытий с фиксированным ромбом [7–10]. Данная величина есть не что иное, как некоторая одноточечная корреляционная функция в контексте пятивершинной модели (с точностью до множителя равного статистической сумме).

Необходимо отметить, что в настоящее время существует устойчивый интерес к привлечению интегрируемых моделей для решения задач комбинаторики. Этот интерес основан, в частности, на успешном применении методов, развитых ранее при исследовании различных интегрируемых моделей, к решению задач, связанных с плоскими разбиениями в бесконечном объеме [11–15]. Стоит также упомянуть о приложениях шестивершинной модели с граничными условиями доменной стенки и их модификаций к перечислению и исследованию свойств переменно-знаковых матриц [16–20]. Плоские разбиения в ящике, в свою очередь, могут быть рассмотрены в контексте различных интегрируемых моделей, таких, как интегрируемая модель бозонных фазовых операторов [21, 22], а также четырех- и пятивершинная модели с определенными граничными условиями [23, 24].

Среди различных формулировок плоских разбиений в ящике в терминах интегрируемых моделей пятивершинная модель интересна, на наш взгляд, тем, что ее веса должны удовлетворять условию свободных фермионов. Для такой модели эффективным методом является переход к ее формулировке в терминах фермионов, или "фермионизация". В следующем разделе показано, что фермионизация может быть выполнена фактически напрямую, посредством преобразования Йордана–Вигнера.

Далее, в разделе 3 показано, что соответствующий пятивершинной модели с равными весами фермионный аналог оператора перехода (трансфер-матрицы) имеет вид экспоненты от квадратичной формы по фермионным операторам. Статистическая сумма записывается в виде определителя некоторой матрицы порядка $b \times b$, представимой в виде произведения двух диагональных и одной ганкелевой матриц. Последняя оказывается ассоциированной с ансамблем полиномов Лагерра.

Наконец, в разделе 4 мы рассматриваем одноточечную корреляционную функцию, описывающую вероятность обнаружения линии на горизонтальном ребре. Эта величина эквивалентна числу плоских разбиений, соответствующих покрытиям ромбами шестиугольника с одним фиксированным ромбом определенного типа.

2. Пятивершинная модель и фермионы

В этом разделе мы сформулируем вначале пятивершинную модель в рамках операторного формализма, типичного для использования операторов перехода типа диагональ-диагональ. Далее, после применения преобразования Йордана–Вигнера мы перепишем статистическую сумму в терминах некоторого оператора перехода (уже фермионного) типа ряд-ряд, что более удобно для дальнейших вычислений на решетке прямоугольной формы.

Начнем с определения больцмановского веса вершины. В качестве переменных, описывающих состояния на ребрах, будем использовать переменные типа заполнения, принимающие значение 0, если ребро пустое, и 1, если ребро содержит линию. Пусть μ, ν, μ' и ν' – переменные заполнения, приписанные, соответственно, левому, нижнему, верхнему и правому ребрам вершины, а $w_{\mu,\nu;\mu',\nu'}$ есть соответствующий этой вершине больцмановский вес. В пятивершинной модели, соответствующей перечислению плоских разбиений,

$$
\begin{aligned}
&w_{0,0;0,0} = w_{0,1;1,0} = w_{1,0;0,1} = w_{0,1;0,1} = w_{1,0;1,0} = 1, \\
&w_{1,1;1,1} = 0,
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

а также $w_{\mu,\nu;\mu',\nu'} = 0$ для $\mu + \nu \neq \mu' + \nu'$.

В формализме, который мы намерены рассмотреть, вершинам квадратной решетки $N \times M$ будут сопоставляться операторы X_j ($j = 1, \dots, N+M-1$), действующие в пространстве $\mathcal{H}_{N+M} = (\mathbb{C}^2)^{\otimes(N+M)}$. Каждый X_j будет нетривиально действовать только в j-й и $(j+1)$-й копии пространства $\mathbb{C}^2$ в $\mathcal{H}_{N+M}$. Пусть v_0, v_1 образуют базис в $\mathbb{C}^2$,

$$
v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{2.2}
$$

Для базисных векторов пространства $\mathcal{H}_{N+M}$, которое будет играть роль квантового пространства состояний, будем использовать “бра” и “кет” обозначения

$$
|\Psi_{\mu_1,\mu_2\dots,\mu_{N+M}}\rangle := v_{\mu_1} \otimes v_{\mu_2} \otimes \cdots \otimes v_{\mu_{N+M}}, \tag{2.3}
$$

где $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{N+M} = 0, 1$. Операторы X_j определим по формуле

$$
\langle \Psi_{\mu_1,\dots,\mu_{N+M}} | X_j | \Psi_{\mu'_1,\dots,\mu'_{N+M}} \rangle = w_{\mu_j,\mu_{j+1};\mu'_j,\mu'_{j+1}} \prod_{\substack{l=1 \\ l\neq j,j+1}}^{N+M} \delta_{\mu_l,\mu'_l}. \tag{2.4}
$$

Здесь $w_{\mu,\nu;\mu',\nu'}$ – больмановский вес, определенный выше, и $\delta_{\mu,\mu'}$ – символ Кронекера.

В терминах спиновых операторов

$$
\sigma_j^\alpha = \underbrace{I \otimes \cdots \otimes I}_{j-1} \otimes \sigma^\alpha \otimes I \otimes \cdots \otimes I \quad (\alpha = x, y, z), \tag{2.5}
$$

где I – единичная матрица 2×2, а σ^x, σ^y, σ^z – матрицы Паули,

$$
\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{2.6}
$$

а операторы X_j имеют вид

$$X_j = \frac{1}{4}\left(3 + \sigma_j^z + \sigma_{j+1}^z - \sigma_j^z\sigma_{j+1}^z\right) + \frac{1}{2}\left(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^y\right). \tag{2.7}$$

Статистическая сумма пятивершинной модели с фиксированными граничными условиями, показанными на правой картинке рис. 1, может быть записана в виде

$$Z = \langle L|\,\Xi\,|R\rangle, \tag{2.8}$$

где вектор $|R\rangle$ учитывает граничные условия на верхней и правой границах решетки,

$$|R\rangle := |\Psi\underbrace{0,\ldots,0}_{a},\underbrace{1,\ldots,1}_{b},\underbrace{0,\ldots,0}_{c}\rangle, \tag{2.9}$$

а вектор $\langle L|$ – на левой и нижней границах,

$$\langle L| := \langle\Psi\underbrace{0,\ldots,0}_{c},\underbrace{1,\ldots,1}_{b},\underbrace{0,\ldots,0}_{a}|. \tag{2.10}$$

Оператор Ξ описывает переход через всю решетку, с правого верхнего угла до левого нижнего, и, как произведение операторов перехода типа диагональ-диагональ, например, при $N \geqslant M$, записывается в виде

$$\begin{aligned}\Xi = {} & X_N(X_{N+1}X_{N-1})\cdots(X_{2M-1}\cdots X_3X_1)\\ & \times\cdots(X_{N+M-1}\cdots X_{N-M+3}X_{N-M+1})\cdots(X_{M+1}X_{M-1})X_M.\end{aligned} \tag{2.11}$$

В этом выражении каждая группа операторов является оператором перехода типа диагональ-диагональ. А именно, крайний справа оператор, X_M, соответствует правой верхней вершине решетки, $X_{M+1}X_{M-1}$ соответствует второму диагональному ряду вершин от правого верхнего угла и т.д., вплоть до левой нижней вершины, которой соответствует оператор X_N. Полезно отметить, что, поскольку $X_jX_k = X_kX_j$ при $|k-j| \geqslant 2$, операторы X_j в выражении для Ξ могут быть сгруппированы также вдоль вертикальных либо горизонтальных рядов решетки. Например, группируя сомножители вдоль вертикальных рядов, для оператора Ξ можно написать

$$\begin{aligned}\Xi = {} & (X_N\cdots X_2X_1)(X_{N+1}\cdots X_3X_2)\\ & \times\cdots(X_{N+M-1}\cdots X_{M+1}X_M).\end{aligned} \tag{2.12}$$

В этой формуле порядок групп сомножителей совпадает с порядком вертикальных рядов решетки, которым они соответствуют на правой картинке рис. 1 (порядок сомножителей в каждой группе справа налево соответствует перебору вершин вертикального ряда решетки сверху вниз).

Рассмотренная операторная формулировка интересна тем, что позволяет применить конструкцию Йордана–Вигнера и выразить все операторы через алгебру канонических фермионных операторов [25]. Обозначая $\sigma_j^{\pm} = \frac{1}{2}\big(\sigma_j^x \pm \mathrm{i}\sigma_j^y\big)$, положим

$$f_j = \Sigma_j^z\, \sigma_j^+, \quad f_j^* = \sigma_j^-\, \Sigma_j^z, \quad \Sigma_j^z := \prod_{k=1}^{j} \sigma_k^z. \tag{2.13}$$

Для всех $j, k = 1, \dots, N + M$ имеем

$$f_j f_k^* + f_k^* f_j = \delta_{jk}, \quad f_j f_k + f_k f_j = 0, \quad f_j^* f_k^* + f_k^* f_j^* = 0. \tag{2.14}$$

Операторы f_j^* и f_j являются операторами рождения и уничтожения фермионов относительно вакуумного вектора $|\Omega\rangle = |\Psi_{0,\dots,0}\rangle$, и для любого базисного вектора пространства $\mathcal{H}_{N+M}$ имеем

$$|\Psi_{\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_{N+M}}\rangle = (f_1^*)^{\mu_1}(f_2^*)^{\mu_2} \cdots (f_{N+M}^*)^{\mu_{N+M}}|\Omega\rangle, \tag{2.15}$$

где порядок операторов существен. В частности, для векторов (2.10) и (2.9) имеем

$$\langle L| = \langle\Omega| f_{c+b} f_{c+b-1} \cdots f_{c+1}, \quad |R\rangle = f_{a+1}^* f_{a+2}^* \cdots f_{a+b}^* |\Omega\rangle. \tag{2.16}$$

Принимая во внимание, что $(\Sigma_j)^2 = 1$ и $\sigma_j^z = 1 - 2 f_j^* f_j$, формулу (2.7) можно переписать в виде

$$X_j = 1 - q_j q_{j+1} + f_{j+1}^* f_j + f_j^* f_{j+1}, \tag{2.17}$$

где через q_j мы обозначили плотность числа фермионов относительно вакуума, $q_j := f_j^* f_j$. Выражения (2.16) и (2.17), подставленные в формулы (2.8) и (2.12), дают представление для статистической суммы в терминах фермионов.

В качестве последнего подготовительного шага мы преобразуем формулы (2.8) и (2.12) для статистической суммы к виду, более удобному для последующих вычислений. Рассмотрим операторы перестановки фермионов

$$P_{j,k} = 1 - q_j - q_k + f_j^* f_k + f_k^* f_j, \tag{2.18}$$

обладающие, как нетрудно проверить, свойствами

$$P_{j,k} f_j^* P_{j,k} = f_k^*, \quad P_{j,k} f_j P_{j,k} = f_k, \quad P_{j,k}|\Omega\rangle = |\Omega\rangle. \tag{2.19}$$

Нам понадобится оператор трансляции фермионов, который дается стандартной формулой для оператора циклического сдвига

$$U = P_{1,2} P_{2,3} \dots P_{N+M-1,N+M}, \quad U^{N+M} = 1. \tag{2.20}$$

Далее, введем в рассмотрение оператор T, который будет играть важную роль в дальнейшем, определяя его формулой

$$T := X_N \dots X_2 X_1 U. \tag{2.21}$$

Выражая каждую группу операторов в формуле (2.12) через T и принимая во внимание, что $U^{-1} X_j U = X_{j-1}$, для статистической суммы получим представление

$$Z = \langle L | T^M | \widetilde{R} \rangle. \tag{2.22}$$

Здесь

$$|\widetilde{R}\rangle := U^N |R\rangle = f_{N+a+1}^* f_{N+a+2}^* \cdots f_{N+M}^* |\Omega\rangle, \tag{2.23}$$

и напомним также, что $N = b + c$ и $M = a + b$. Формула (2.22) и будет использована ниже для вычисления статистической суммы. Оператор T в ней играет роль оператора перехода типа ряд-ряд.

3. Свойства операторов и статистическая сумма

Оператор T, определенный формулой (2.21), в силу определенных свойств операторов X_j и U, как будет показано ниже, является экспонентой от некоторой квадратичной формы. Эта структура сохраняется и для его степеней, что позволит в результате выразить статистическую сумму в виде некоторого определителя.

Для записи квадратичных форм мы будем использовать компактную форму записи $f^* \mathcal{A} f = \sum_{j,k} \mathcal{A}_{jk} f_j^* f_k$, где $\mathcal{A}$ обозначает матрицу порядка $(N+M) \times (N+M)$ с элементами $\mathcal{A}_{j,k}$.

Перед обсуждением свойств операторов полезно привести вначале две основные общие формулы, касающиеся операторов, представимых в виде экспоненты от квадратичных форм по фермионам. Первая формула описывает произведение двух таких операторов. Пусть операторы A_i $(i = 1, 2)$ таковы, что $A_i = \exp\{f^* \ln(\mathcal{A}_i) f\}$; тогда

$$A_1 A_2 = \exp\{f^* \ln(\mathcal{A}_1 \mathcal{A}_2) f\}. \tag{3.1}$$

Вторая формула позволяет вычислять матричные элементы операторов. А именно, в p-частичном секторе матричные элементы оператора вида $A = \exp\{f^* \ln(\mathcal{A}) f\}$ выражаются через p-й минор матрицы $\mathcal{A}$:

$$\langle\Omega| f_{i_p} \cdots f_{i_2} f_{i_1}\, A\, f^*_{j_1} f^*_{j_2} \cdots f^*_{j_p} |\Omega\rangle = \begin{vmatrix} \mathcal{A}_{i_1,j_1} & \mathcal{A}_{i_1,j_2} & \dots & \mathcal{A}_{i_1,j_p} \\ \mathcal{A}_{i_2,j_1} & \mathcal{A}_{i_2,j_2} & \dots & \mathcal{A}_{i_2,j_p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathcal{A}_{i_p,j_1} & \mathcal{A}_{i_p,j_2} & \dots & \mathcal{A}_{i_p,j_p} \end{vmatrix}. \tag{3.2}$$

Формулы (3.1) и (3.2) могут быть доказаны разными методами. Например, эти формулы могут быть получены как следствия интеграла гауссовского типа в формализме интегрирования по грассмановым переменным, в котором операторы, зависящие от фермионов, являются интегральными операторами. Структура ядер операторов, представимых как экспонента от квадратичной формы по фермионам, сохраняется при свертке, и поэтому такие операторы иногда называют операторами с самовопроизводящимися ядрами [26].

Чтобы найти для оператора T соответствующую ему матрицу $\mathcal{T}$ в представлении в виде экспоненты $T = \exp\{f^* \ln(\mathcal{T}) f\}$, необходимо найти аналогичные матрицы для элементарных операторных сомножителей, содержащихся в выражении (2.21), а именно операторов X_j и $P_{j,j+1}$ (см. формулу (2.20)). Для этого рассмотрим операторы $V_j(\alpha)$, где α – вещественный параметр, определяя их по формуле

$$V_j(\alpha) := \exp\{f^* \ln(\mathcal{V}_j(\alpha)) f\}, \tag{3.3}$$

где $(N+M)\times(N+M)$ матрицы $\mathcal{V}_j(\alpha)$ имеют следующую блочную структуру:

$$\mathcal{V}_j(\alpha) = \begin{pmatrix} I_{(j-1)} & & & \\ & \alpha & 1 & \\ & 1 & \alpha & \\ & & & I_{(N+M-j-1)} \end{pmatrix}. \tag{3.4}$$

Здесь и всюду ниже $I_{(p)}$ обозначает единичную $p\times p$ матрицу. Полагая $\alpha \neq 1$, непосредственным вычислением получаем

$$V_j(\alpha) = 1 + (\alpha-1)(q_j + q_{j+1}) + \alpha(\alpha-2) q_j q_{j+1} + f^*_j f_{j+1} + f^*_{j+1} f_j. \tag{3.5}$$

Заметим, что, поскольку это выражение и матрицы $\mathcal{V}_j(\alpha)$, очевидно, хорошо определены при $\alpha \to 1$, мы можем распространить эквивалентность формул (3.3) и (3.5) также и на случай $\alpha = 1$. Указанный специальный случай важен тем, что выражение (3.5) при $\alpha = 1$ переходит в выражение (2.17) для операторов X_j. Полагая, что $X_j = V_j(1)$ также и для представления в виде экспоненты, мы можем написать

$$X_j = \exp\{f^* \ln(\mathcal{X}_j) f\}, \quad \mathcal{X}_j := \mathcal{V}_j(1). \tag{3.6}$$

Подчеркнем, что, поскольку операторы X_j и матрицы $\mathcal{X}_j$ имеют нулевые собственные значения, формула (3.6) должна пониматься в смысле некоторого предела. Операторы $V_j(\alpha)$ являются подходящей регуляризацией операторов X_j в том смысле, что $X_j = \lim_{\alpha\to 1} V_j(\alpha)$. Соответственно, логарифм матрицы $\mathcal{X}_j$ должен пониматься как $\ln(\mathcal{X}_j) = \lim_{\alpha\to 1} \ln(\mathcal{V}_j(\alpha))$. Ниже, однако, мы будем иметь дело только с самими матрицами $\mathcal{X}_j$, а не с логарифмами от них.

Далее, полагая $\alpha = 0$ в выражении (3.5), мы также приходим к выражению (2.18) для операторов перестановки при $k = j + 1$, т.е. $P_{j,j+1} = V_j(0)$. Таким образом,

$$P_{j,j+1} = \exp\{f^* \ln(\mathcal{P}_{j,j+1}) f\}, \quad \mathcal{P}_{j,j+1} := \mathcal{V}_j(0). \tag{3.7}$$

Принимая во внимание формулы (2.20) и (3.1) для оператора циклического сдвига $N + M$ фермионов, в свою очередь, мы получим представление $U = \exp\{f^* \ln(\mathcal{U}) f\}$, где

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} & 1 \\ I_{(N+M-1)} & \end{pmatrix}. \tag{3.8}$$

Вообще, для любого оператора, соответствующего некоторому элементу симметрической группы, будет справедливо представление в виде экспоненты от квадратичной формы по фермионам с логарифмом от матрицы соответствующей подстановки элементов, что есть, очевидно, следствие формул (3.1) и (3.7).

В результате, для оператора T имеем представление искомого вида с матрицей $\mathcal{T}$, равной

$$\mathcal{T} = \mathcal{X}_N \cdots \mathcal{X}_2 \mathcal{X}_1 \mathcal{U}. \tag{3.9}$$

Вообще, для любой целой степени оператора T справедлива формула $T^k = \exp\{f^* \ln(\mathcal{T}^k) f\}$, причем, как оказывается, явный вид матриц

$\mathcal{T}^k$ $(k = 1, \ldots, M)$ может быть получен прямым вычислением. Ниже мы приводим результат этого вычисления. Эти формулы могут быть доказаны, например, по индукции.

Матрицы $\mathcal{T}^k$ представимы в виде блочных матриц вида

$$\mathcal{T}^k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ C_k & D_k \end{pmatrix} \quad (k = 1, \ldots, M). \tag{3.10}$$

Матрица A_k является квадратной, размерности $N \times N$, нижнетреугольной матрицей, элементы которой выражаются через биномиальные коэффициенты по формуле

$$(A_k)_{ij} = \binom{i - j + k - 1}{i - j}. \tag{3.11}$$

Матрица B_k является прямоугольной, размерности $N \times M$, и ее первые $M - k$ столбцов нулевые; матричные элементы даются формулой

$$(B_k)_{ij} = \binom{i + j - M + k - 2}{j - M + k - 1}. \tag{3.12}$$

Матрица C_k также является прямоугольной, но имеет размерность $M \times N$, и ее последние $M - k$ строк нулевые; матричные элементы даются формулой

$$(C_k)_{ij} = \binom{N + k - i - j}{k - i}. \tag{3.13}$$

Матрица D_k является квадратной, размерности $M \times M$ и, в свою очередь, обладает блочной структурой вида

$$D_k = \begin{pmatrix} & S_k \\ I_{(M-k)} & \end{pmatrix}. \tag{3.14}$$

Здесь квадратная $k \times k$ матрица S_k является верхнетреугольной, с элементами

$$(S_k)_{ij} = \binom{j - i + N - 1}{j - i}, \tag{3.15}$$

где $i, j = 1, \ldots, k$.

Обратимся теперь к вычислению статистической суммы. Применяя формулу (3.2) к представлению (2.22), для статистической суммы имеем выражение в виде минора матрицы B_M, составленного из элементов последних b строк и последних b столбцов (напомним, что $M = a + b$, $N = b + c$). Таким образом, получим

$$Z = \det H, \tag{3.16}$$

где $b \times b$ матрица H имеет матричные элементы

$$H_{ij} = (B_M)_{c+i,a+j} = \binom{a+c+i+j-2}{a+j-1}. \tag{3.17}$$

Матрица H может быть записана как произведение трех матриц

$$H = \Lambda_c^{-1}\, \widetilde{H}\, \Lambda_a^{-1}, \tag{3.18}$$

где через Λ_p $(p = 0, 1, \ldots)$ обозначена диагональная $b \times b$ матрица с элементами

$$(\Lambda_p)_{ij} = (p + i - 1)!\, \delta_{ij}, \tag{3.19}$$

а матрица $\widetilde{H}$ является ганкелевой,

$$\widetilde{H}_{ij} = (a + c + i + j - 2)! = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^{a+c+i+j-2}\, \mathrm{d}x. \tag{3.20}$$

Из формулы для матричных элементов в терминах интеграла следует, что матрица $\widetilde{H}$ для фиксированных a и c и различных $b = 1, 2, \ldots$ связана с ансамблем полиномов Лагерра $\{L_k^{(a+c)}(x)\}_{k=0,1,\ldots}$. Напомним, что полиномы Лагерра имеют явный вид

$$L_k^{(\lambda)}(x) = \sum_{l=0}^{k} (-1)^l \binom{k+\lambda}{k-l} \frac{x^l}{l!} \tag{3.21}$$

и удовлетворяют условию ортогональности

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} x^\lambda L_k^{(\lambda)}(x) L_{k'}^{(\lambda)}(x)\, \mathrm{d}x = h_k \delta_{kk'} \quad (\lambda > -1), \tag{3.22}$$

где $h_k = \Gamma(\lambda + k + 1)/k!$. Используя тот факт, что для определителя ганкелевой матрицы справедлива формула (см., например, [27])

$$\det \widetilde{H} = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{h_k}{\mu_k^2}, \tag{3.23}$$

где μ_k обозначает старший коэффициент ассоциированного полинома степени k, и учитывая, что в рассматриваемом нами случае h_k и μ_k равны

$$h_k = \frac{(k+a+c)!}{k!}, \quad \mu_k = \frac{1}{k!}, \tag{3.24}$$

получим

$$\det \widetilde{H} = \prod_{k=0}^{b-1} k!(k+a+c)!. \tag{3.25}$$

В результате для статистической суммы имеем формулу

$$Z = \prod_{k=0}^{b-1} \frac{k!(k+a+c)!}{(k+a)!(k+c)!}. \tag{3.26}$$

Раскрывая в полученной формуле факториалы (рассматривая разные случаи, например, полагая, что $a \leqslant b \leqslant c$) и добавляя подходящие сомножители в числитель и знаменатель, нетрудно получить выражение

$$\prod_{i=1}^{a}\prod_{j=1}^{b}\prod_{k=1}^{c} \frac{i+j+k-1}{i+j+k-2}, \tag{3.27}$$

которое является знаменитой формулой Мак-Магона для числа плоских разбиений в ящике размером $a \times b \times c$. Отметим, что формула (3.26), также как и (3.27), верна для любых натуральных a, b и c, без ограничений.

4. Одноточечная корреляционная функция

Занумеруем вертикальные линии решетки на правой картинке рис. 1 числами $m = 1, \ldots, M$ слева направо, а горизонтальные линии числами $n = 1, \ldots, N$ снизу вверх. Таким образом, для вершин решетки будем иметь декартовы координаты (m, n), с “началом координат” $(1, 1)$ в вершине в левом нижнем углу решетки.

Рассмотрим одноточечную корреляционную функцию $G(m, n)$, которую мы определим как вероятность обнаружения линии на горизонтальном ребре, соединяющем вершины с координатами (m, n) и $(m+1, n)$. Как уже упоминалось во введении, с точки зрения интерпретации плоских разбиений как укладок шестиугольника ромбами эта корреляционная функция равна, с точностью до умножения на статистическую сумму, числу укладок ромбами шестиугольника с одним фиксированным ромбом определенного типа.

Для интересующей нас корреляционной функции, аналогично формуле (2.22) для статистической суммы, имеем следующую формулу:

$$G(m,n) = \frac{1}{Z}\langle L|\, T^m \, q_{N-n+1}\, T^{M-m}\, |\widetilde{R}\rangle. \tag{4.1}$$

Здесь, как и выше, оператор q_j является плотностью числа фермионов, $q_j := f_j^* f_j$. Чтобы воспользоваться формулой (3.1), заменим оператор q_j подходящей экспонентой от квадратичной формы по фермионам, используя дифференцирование по параметру:

$$\begin{aligned} q_j &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\exp\{\alpha q_j\}\Big|_{\alpha=0} \\ &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\exp\left\{f^* \ln\left(I + (\mathrm{e}^\alpha - 1)\mathcal{E}_j\right) f\right\}\Big|_{\alpha=0}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где $\mathcal{E}_j$ обозначает $(N+M)\times(N+M)$ матрицу со всеми элементами равными нулю, кроме одного, равного единице и стоящего на диагонали на j-й позиции. Для корреляционной функции, в результате применения формулы (3.2), имеем

$$\begin{aligned} G(m,n) &= \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial\alpha}\det[H + (\mathrm{e}^\alpha - 1)W]\Big|_{\alpha=0} \\ &= \mathrm{tr}\,(H^{-1}W), \end{aligned} \tag{4.3}$$

где мы использовали формулу (3.16). Здесь W – матрица ранга один, являющаяся правым нижним подблоком, размерности $b\times b$, правого верхнего блока, размерности $N\times M$, матрицы $\mathcal{T}^m\mathcal{E}_{N-n+1}\mathcal{T}^{M-m}$. Обозначая через E_{N-n+1} матрицу левого верхнего блока, размерности $N\times N$, матрицы $\mathcal{E}_{N-n+1}$, чьи остальные блоки равны нулю, для интересующего нас произведения матриц имеем

$$\mathcal{T}^m\mathcal{E}_{N-n+1}\mathcal{T}^{M-m} = \begin{pmatrix} \cdots & A_m E_{N-n+1} B_{M-m} \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \tag{4.4}$$

где точками обозначены несущественные для нас блоки. Матрица W определяется как матрица с элементами

$$W_{ij} = (A_m E_{N-n+1} B_{M-m})_{c+i,a+j}. \tag{4.5}$$

Учитывая, что $(E_k)_{ij} = \delta_{ki}\delta_{kj}$, имеем

$$W_{ij} = (A_m)_{c+i,N-n+1}(B_{M-m})_{N-n+1,a+j} \tag{4.6}$$

и, используя (3.11) и (3.12), приходим к явному выражению

$$W_{ij} = \binom{i+m+n-b-2}{i+n-b-1}\binom{j+a+b+c-m-n-1}{j+a-m-1}. \tag{4.7}$$

Из этих формул видно, что матрица W имеет вид произведения вектора-столбца на вектор-строку.

Рассмотрим теперь задачу обращения матрицы H. Из формулы (3.18) следует, что

$$H^{-1} = \Lambda_a\, \widetilde{H}^{-1}\, \Lambda_c, \tag{4.8}$$

где диагональные матрицы Λ_a и Λ_c даются формулой (3.19). Поскольку матрица $\widetilde{H}$ ганкелева, матричные элементы обратной матрицы содержатся в ядре Кристоффеля–Дарбу $K_b(x,y)$ полиномов Лагерра,

$$K_b(x,y) = \sum_{k=0}^{b-1} \frac{k!}{(k+a+c)!}\, L_k^{(a+c)}(x) L_k^{(a+c)}(y), \tag{4.9}$$

которое является производящей функцией для этих матричных элементов,

$$K_b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{b} \widetilde{H}_{ij}^{-1}\, x^{i-1} y^{j-1}. \tag{4.10}$$

Используя формулу для полиномов Лагерра (3.2), нетрудно найти матричные элементы матрицы $\widetilde{H}^{-1}$. В результате для элементов матрицы H^{-1} получим

$$\begin{aligned} H_{ij}^{-1} = {}& \frac{(-1)^{i+j}(i+a-1)!(j+c-1)!}{(i+a+c-1)!(i-1)!(j+a+c-1)!(j-1)!} \\ & \times \sum_{k=\max(i,j)-1}^{b-1} \frac{k!(k+a+c)!}{(k-i+1)!(k-j+1)!}. \end{aligned} \tag{4.11}$$

После подстановки полученных выражений в формулу (4.3) для корреляционной функции мы получаем выражение в терминах тройной суммы. Записывая суммы по i и j как обрывающиеся гипергеометрические ряды, окончательное выражение для корреляционной функции можно представить в виде суммы произведений двух гипергеометрических рядов:

$$G(m,n) = \sum_{k=\max(0,m-a,b-n)}^{b-1} \frac{(k+a)!(k+c)!}{k!(k+a+c)!} \times \binom{k+a+b+c-m-n}{k+a-m}\binom{k+m+n-b-1}{k+n-b} \times {}_3F_2\left(\begin{matrix}-k,-k-a+m,-k-a-c\\-k-a-b-c+m+n,-k-a\end{matrix}\,\middle|\,1\right) \times {}_3F_2\left(\begin{matrix}-k,-k-n+b,-k-a-c\\-k-m-n+b+1,-k-c\end{matrix}\,\middle|\,1\right). \quad (4.12)$$

В этой формуле число членов в обоих гипергеометрических рядах определяется значениями первых двух верхних индексов. Кроме того, условия суммирования по k таковы, что вторые верхние индексы гипергеометрических рядов не положительны ни при каких значениях натуральных чисел a, b, m, n.

Формула (4.12) справедлива для любых значений размеров ящика a, b, c и значений координат $m = 1,\dots,a+b-1$ и $n = 1,\dots,b+c$. Формула (4.12) численно согласуется с результатами, полученными в работах [7–10] для специальных случаев перечислений укладок ромбами шестиугольника с фиксированным ромбом.

Литература

1. G. E. Andrews, *The Theory of Partitions.* Addison-Wesley Publishing, 1976.
2. D. M. Bressoud, *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.
3. B. Lindstrom, *On the vector representations of induced matroids.* — Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 85–90.
4. I. M. Gessel, X. Viennot, *Binomial determinants, paths, and hook length formulae.* — Adv. Math. **58** (1985), 300–321.
5. K. Johansson, *Nonitersecting paths, random tilings and random matrices.* — Probab. Theory Rel. Fields **123** (2002), 225–280.
6. H. Cohn, M. Larsen, J. Propp, *The shape of a typical boxed plane partition.* — New York J. Math. **4** (1998), 137–165.
7. M. Fulmek, C. Krattenthaler, *The number of rhombus tilings of a symmetric hexagon which contain a fixed rhombus on the symmetry axis.* I. — Ann. Combin. **2** (1998), 19–40; `arXiv:math/9712244`.
8. M. Fulmek, C. Krattenthaler, *The number of rhombus tilings of a symmetric hexagon which contain a fixed rhombus on the symmetry axis.* II. — Europ. J. Combin. **21** (2000), 601–640; `arXiv:math/9909038`.

9. C. Krattenthaler, *A (conjectural)* $1/3$*-phenomenon for the number of rhombus tilings of a hexagon which contain a fixed rhombus.* — In: A. K. Agarwal et al. (eds.), Number Theory and Discrete Mathematics, Hindustan Book Agency, New Delhi (2002), pp. 13–30; `arXiv:math/0101009`.
10. M. Ciucu, C. Krattenthaler, *A factorization theorem for classical group characters, with applications to plane partitions and rhombus tilings*, `arXiv:0812.1251 [math.CO]`.
11. A. Okounkov, N. Reshetikhin, *Correlation function of Schur process with application to local geometry of a random* 3*-dimensional Young diagram.* — J. Amer. Math. Soc. **16** (2003), 581–603.
12. P. L. Ferrari, H. Spohn, *Step fluctuations for a faceted crystal.* — J. Stat. Phys. **113** (2003), 1–46.
13. A. Okounkov, N. Reshetikhin, *Random skew plane partitions and the Pearcey process*, `arXiv:math/0503508`.
14. R. Kenyon, A. Okounkov, *Limit shapes and the complex Burgers equation*, `arXiv:math-ph/0507007`.
15. R. Kenyon, A. Okounkov, S. Sheffield, *Dimers and amoebae.* — Ann. Math. **163**, No. 3 (2006), 1019–1056.
16. G. Kuperberg, *Another proof of the alternative-sign matrix conjecture.* — Int. Math. Res. Not. **1996** (1996), 139–150
17. D. Zeilberger, *Proof of the refined alternating sign matrix conjecture.* — New York J. Math. **2** (1996), 59–68; `arXiv:math/9606224`.
18. G. Kuperberg, *Symmetry classes of alternating-sign matrices under one roof*, `arXiv:math.CO/0008184`.
19. A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov, *Bethe roots and refined enumeration of alternating-sign matrices.* — J. Stat. Mech. (2006), P07004; `arXiv:math-ph/0605004`.
20. F. Colomo, A. G. Pronko, *The limit shape of large alternating-sign matrices*, `arXiv:0803.2697[math-ph]`.
21. N. M. Bogoliubov, *Boxed plane partitions as an exactly solvable boson model.* — J. Phys. A **38** (2005), 9415–9430; `arXiv:cond-mat/0503748`.
22. Н. В. Цилевич, *Квантовый метод обратной задачи для* q*-бозонной модели и симметрические функции.* — Функц. анализ и его прил. **40**, вып. 3 (2006), 53–65.
23. Н. М. Боголюбов, *Четырехвершинная модель и случайные укладки.* — Теор. мат. физ. **155**, вып. 1 (2008), 25–38.
24. Н. М. Боголюбов, *Пятивершинная модель с фиксированными граничными условиями.* Препринт ПОМИ 4/2008.
25. C. Destri, H. J. de Vega, *Light-cone lattice approach to fermionic theories in 2D: The massive Thirring model.* — Nucl. Phys. B **290** (1987), 363–391.
26. C. Itzykson, J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, V. 1. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1989.
27. G. Szegö, *Orthogonal Polynomials.* Amer. Math. Soc., Providence, RI (1975).

Kapitonov V. S., Pronko A. G. The five-vertex model and boxed plane partitions.

Boxed plane partitions are considered in terms of the five-vertex model on a finite lattice with fixed boundary conditions. Assuming that all weights of the model have the same value, the one-point correlation function describing the probability of having a given state on an arbitrary horizontal edge of the lattice is calculated. This is equivalent to the enumeration of boxed plane partitions that correspond to rhombus tilings of a hexagon with one fixed rhombus of a particular type. The solution of the problem is given for the case of a box of generic size.

С.-Петербургский государственный
технологический институт
(Технический университет)

E-mail: kapiton@pdmi.ras.ru

Поступило 10 декабря 2008 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: agp@pdmi.ras.ru