Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 360, 2008 г.

П. Б. Затицкий

О СОВПАДЕНИИ КАНОНИЧЕСКИХ ВЛОЖЕНИЙ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ В БАНАХОВЫ

Рассмотрим метрическое пространство (X,ρ). Определим свободное аффинное пространство $F(X)$ на X как множество конечных формальных комбинаций $\sum\alpha_i\cdot\delta_{x_i}$, где $x_i\in X$, $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $\sum\alpha_i=0$. Здесь δ_x можно понимать как атомарную дельта-меру, сосредоточенную в точке x, тогда $F(X)$ есть множество зарядов с конечным носителем на X и суммарным зарядом 0. Норма $\|\cdot\|$ на $F(X)$ называется *согласованной с метрикой*, если $\|\delta_x-\delta_y\|=\rho(x,y)$ для любых x, $y\in X$. Хорошо известны две канонические нормы, согласованные с метрикой.

1) Норма Хаусдорфа–Куратовского. Каждой мере $\mu=\sum\alpha_i\delta_{x_i}$ сопоставим непрерывную функцию $f_\mu:=\sum\alpha_i\rho(x_i,\cdot)$ на X. Заметим, что эта функция ограничена (благодаря тому, что $\sum\alpha_i=0$). Ее норма в пространстве ограниченных непрерывных функций и есть норма $\|\mu\|_{\text{HK}}$ Хаусдорфа–Куратовского меры μ. Запишем выражение для нормы Хаусдорфа–Куратовского в терминах исходной меры μ:

$$\|\mu\|_{\text{HK}}=\sup_{x\in X}\left|\int\rho(x,\cdot)d\mu\right|. \tag{1}$$

2) Норма Канторовича–Рубинштейна [1]. Рассмотрим множество L всех 1-липшицевых функций $f:X\to\mathbb{R}$ (то есть таких функций, что $|f(x)-f(y)|\leqslant\rho(x,y)$). Определим норму $\|\mu\|_{\text{KR}}$ меры μ равенством

$$\|\mu\|_{\text{KR}}=\sup_{f\in L}\left|\int f d\mu\right|.$$

Таким образом, пространство Канторовича–Рубинштейна является (каноническим) предсопряженным к пространству $\text{Lip}\,(X)$ липшицевых функций на X, определенных с точностью до аддитивной константы. Единичный шар этой нормы есть выпуклая оболочка всех мер вида $\frac{\delta_x-\delta_y}{\rho(x,y)}$, $x,y\in X$. В самом деле, 1-липшицевы функции суть в точности те, интеграл от которых по мерам указанного вида не превосходит 1, так что пространство липшицевых функций сопряжено пространству с указанным единичным шаром.

Отметим, что в [1] норма вводилась через оптимальное решение транспортной задачи. Другие равносильные пределения и характеристические свойства нормы Канторовича–Рубинштейна см. в [2].

Следующие свойства метрического пространства X введены и изучались в [2].

Определение 1. *Пространство X называется линейно жестким, если согласованная с метрикой норма на $F(X)$ единственна, и слабо линейно жестким, если совпадают нормы Канторовича–Рубинштейна и Хаусдорфа–Куратовского.*

Очевидно, линейно жесткое пространство является слабо линейно жестким. Обратное неверно, соответствующие примеры приведены в [2]. Там же доказано, что линейно жесткое пространство X, содержащее хотя бы 3 точки, имеет бесконечный диаметр (следовательно, оно бесконечно и некомпактно).

Основным нашим результатом является следующая

Теорема 1. *При $n \geq 5$ не существует слабо линейно жестких пространств на n точках.*

Для доказательства нам понадобится следующий факт комбинаторики многогранников.

Теорема 2. *Пусть $n \geq 4$. Пусть P – выпуклый центрально-симметричный многогранник в $\mathbb{R}^{n-1}$, имеющий ровно $2n$ вершин. Тогда если $n = 2k$, то у P хотя бы C_{2k}^k граней (здесь и далее: максимальной размерности), а если $n = 2k+1$, то у P хотя бы $2 \cdot C_{2k}^k$ граней. Обе оценки не улучшаемы.*

Доказательство. Пусть $\pm B_i$, $i = 1, \ldots, n$, – вершины P. Тогда вектора B_i линейно зависимы. Пусть $\sum_i a_i \cdot B_i = 0$, где не все a_i равны 0. Не умаляя общности можно считать, что $a_i \geq 0$ (иначе заменим B_i на $-B_i$). Ясно, что грань содержит либо $n-1$, либо n вершин. Пусть $\epsilon_i = \pm 1$, $i = 1, \ldots, n$.

Лемма 1. 1. *Пусть $k \leq n$ и $a_k \neq 0$. Гиперплоскость, проходящая через вершины $\epsilon_i B_i$, $i \neq k$, задает грань многогранника P, не содержащую точек $\pm B_k$, тогда и только тогда, когда $|\sum_{i \neq k} \epsilon_i a_i| < a_k$.*

2. *Через вершины* $\epsilon_i B_i$, $i = 1, \dots, n$, *проходит гиперплоскость тогда и только тогда, когда* $\sum_i \epsilon_i a_i = 0$.

Доказательство. 1. Гиперплоскость задает грань тогда и только тогда, когда все вершины многогранника лежат по одну сторону от нее. Ясно, что вершины $-\epsilon_i B_i$, $i \neq k$, лежат по одну сторону от этой гиперплоскости, так как у них сумма коэффициентов разложения по базису $\epsilon_i B_i$ равна $-1 < 0$. Остается узнать про вершины $\pm B_k$. Имеем

$$\pm B_k = \pm\left(\sum_{i \neq k} \frac{-a_i \cdot \epsilon_i}{a_k} \epsilon_i B_i\right).$$

Модуль суммы коэффициентов в разложении равен $|\sum_{i \neq k} \frac{-a_i \cdot \epsilon_i}{a_k}|$. Это выражение меньше единицы тогда и только тогда, когда точки $\pm B_k$ лежат по ту же сторону от нашей гиперплоскости, что и остальные вершины.

2. Пусть $a_k \neq 0$. Тогда

$$\epsilon_k B_k = \left(\sum_{i \neq k} \frac{-a_i \cdot \epsilon_i \cdot \epsilon_k}{a_k} \epsilon_i B_i\right),$$

так что $\epsilon_k B_k$ лежит в гиперплоскости, натянутой на точки $\epsilon_i B_i$, $i \neq k$, если и только если сумма коэффициентов в этом разложении равна 1, то есть

$$\sum_{i \neq k} \frac{-a_i \cdot \epsilon_i \cdot \epsilon_k}{a_k} = 1,$$
$$\sum_{i \neq k} -a_i \cdot \epsilon_i = \epsilon_k \cdot a_k,$$
$$\sum_i a_i \cdot \epsilon_i = 0. \qquad \square$$

Допустим, что мы нашли такое k и нашли такое разбиение $\{1, 2, \dots, n\} \setminus \{k\} = A_- \cup A_+$, что $A_- \cap A_+ = \varnothing$ и $|\sum_{i \in A_+} a_i - \sum_{j \in A_-} a_j| < a_k$. Положим $\epsilon_i = 1$ для $i \in A_+$ и $\epsilon_i = -1$ для $i \in A_-$. Тогда гиперплоскость, проходящая через вершины $\epsilon_i B_i$, $i \neq k$, задает грань по лемме 1. То есть каждое такое разбиение задает две $(n-1)$-вершинные грани – указанную и симметричную ей. Пусть $|A_+| = m$.

Такое разбиение будем называть $(m, n-m-1)$ разбиением первого типа со старшим числом a_k (если $a_k = a_l$, но $k \neq l$, то мы различаем разбиения со старшим числом a_k и старшим числом a_l). Ясно, что разным разбиениям соответствуют разные грани.

Теперь заметим, что если мы нашли разбиение $\{1, 2, \ldots, n\} = A_- \cup A_+$, такое, что $A_- \cap A_+ = \varnothing$ и $\sum_{i \in A_+} a_i = \sum_{j \in A_-} a_j$, то среди элементов $a_i, i \in A_+$, можно выбрать ненулевой элемент a_k. Положим $\epsilon_i = 1$, если $i \in A_+$, и $\epsilon_i = -1$, если $i \in A_-$. Тогда гиперплоскость, проходящая через вершины $\epsilon_i B_i$, задает грань по лемме 1. Значит, такое разбиение задает две n-вершинные грани – указанную и симметричную ей. Пусть $|A_+| = m$. Такое разбиение будем называть $(m, n-m)$ разбиением второго типа. Ясно, что разным разбиениям соответствуют разные грани.

Итого, мы установили соответствие между гранями многогранника и разбиениями чисел a_i. Теперь будем искать такие разбиения.

Упорядочим a_i по возрастанию. Теперь $a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n$. Через A обозначим набор чисел $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ Пусть $N(A)$ – количество разбиений набора A. Через P_n обозначим минимальное количество разбиений n чисел.

Если $a_1 = 0$, то $N(A) \geq 2 \cdot N(A \setminus \{a_1\})$, так как к любому разбиению набора $A \setminus \{a_1\}$ можно добавить a_1 двумя способами – в любое из двух множеств.

Докажем индукцией по n, что количество разбиений набора из n неотрицательных чисел не меньше, чем указано в формулировке теоремы 2 (в формулировке указано количество граней; чтобы получить количество разбиений, его нужно поделить пополам).

База: $n = 4$. Легко проверяется, что при $n = 4$ имеется хотя бы три разбиения. При этом ровно три разбиения может быть только в том случае, когда все четыре числа равны. Последнее утверждение проще понять на языке многогранников: центрально-симметричный многогранник с 6 гранями в $\mathbb{R}^3$ – это обязательно параллелепипед, вершины которого удовлетворяют аффинной зависимости как раз с равными коэффициентами.

Переход. Если в наборе есть нулевой элемент, то $N(A) \geq 2 \cdot N(A \setminus \{a_1\}) \geq 2 \cdot P_{n-1}$.

Пусть все числа в наборе равны. Если $n = 2k$, то все разбиения второго типа и их количество равно $\frac{C_{2k}^k}{2}$, что и требовалось. Если $n = 2k+1$, то все разбиения первого типа и их количество равно C_{2k+1}^k, что больше, чем заявленное C_{2k}^k.

Пусть среди наших чисел есть два разных: $b > a$. Тогда рассмотрим набор $A \setminus \{a, b\} \cup \{b - a\}$. Для него есть хотя бы P_{n-1} разбиений по предположению индукции. Сопоставим им разбиения нашего набора. Рассмотрим какое-то разбиение π нового набора. Ниже S_1 и S_2 обозначают суммы по частям разбиения и c обозначает старший член разбиения (не вошедшее в разбиение число).

1. Если разбиение π второго типа, то $S_1 + (b - a) = S_2$. Ему сопоставляем разбиение $S_1 + b = S_2 + a$.

2. Если разбиение π первого типа со старшим членом не $b - a$, то есть $|S_1 + (b-a) - S_2| < c$, то ему сопоставляем $|S_1 + b - a - S_2| < c$. (Тут есть формальная тонкость: возможно, $c = b - a$, но мы рассматриваем именно одно выделенное число $b - a$.)

3. Если разбиение π первого типа со старшим членом $b - a$ и $0 < S_1 - S_2 < b - a$, то ему сопоставляем $0 < S_1 + a - S_2 < b$.

4. Если разбиение π первого типа со старшим членом $b - a$ и $0 = S_1 - S_2 < b - a$, то ему сопоставляем два разбиения $0 < S_1 + a - S_2 < b$ и $-b < -a = S_1 - a - S_2 < b$. Заметим, что количество M таких разбиений равно количеству разбиений второго типа набора $A \setminus \{a, b\}$.

Теперь рассмотрим набор $A \setminus \{a, b\} \cup \{b + a\}$. Для него тоже есть хотя бы P_{n-1} разбиений по предположению индукции. Сопоставим им разбиения нашего набора. Посмотрим, какие они бывают. (Здесь S_1, S_2, c имеют тот же смысл, что и выше.)

1. Если разбиение второго типа, то $S_1 + (b + a) = S_2$. Ему сопоставляем разбиение $S_1 + b + a = S_2$.

2. Если разбиение первого типа и $|S_1 + (b + a) - S_2| < c$, то ему сопоставляем $|S_1 + b + a - S_2| < c$.

3. Если разбиение первого типа и $0 < S_1 - S_2 < b + a$, то ему сопоставляем $-b < -a < S_1 - S_2 - a < b$.

4. Если разбиение первого типа и $0 = S_1 - S_2 < b + a$, то ему сопоставляем два разбиения $0 < S_1 + a - S_2 < b$ и $-b < -a = S_1 - a - S_2 < b$. Опять же, количество M таких разбиений равно количеству разбиений второго типа набора $A \setminus \{a, b\}$.

Так мы нашли достаточно много разбиений нашего набора A. Несложно проверяется, что разбиения, построенные по правилам 1–3, попарно различны. Совпадают только разбиения, построенные по правилу 4. Посчитаем общее количество различных построенных разбиений: $P_{n-1} - M + P_{n-1} - M + 2 \cdot M = 2 \cdot P_{n-1}$. То есть в итоге мы доказали, что если не все элементы равны, то $N(A) \geq 2 \cdot P_{n-1}$.

То есть

$$\text{при} \quad n = 2k: \ P_{2k} \geq \min\left\{2 \cdot P_{2k-1}, \frac{C_{2k}^k}{2}\right\},$$
$$\text{а при} \quad n = 2k+1: \ P_{2k+1} \geq \min\left\{2 \cdot P_{2k}, C_{2k+1}^k\right\}.$$

Из этих неравенств и равенства $P_4 = 3$ следует заявленная оценка, так как

$$\frac{C_{2k}^k}{2} = \min\left\{2 \cdot C_{2k-1}^{k-1}, \frac{C_{2k}^k}{2}\right\} \ \text{ и } \ C_{2k}^k = \min\left\{2 \cdot \frac{C_{2k}^k}{2}, C_{2k+1}^k\right\}.$$

В качестве примера для $n = 2k$ приведем набор $a_i = 1$. Для него имеется ровно $\frac{C_{2k}^k}{2}$ разбиений, и, значит, у соответствующего многогранника ровно C_{2k}^k граней. Чтобы получить пример для нечетного n, достаточно добавить 0 к этому набору. $\square$

Перейдем к доказательству теоремы 1. Рассмотрим конечное слабо линейно жесткое метрическое пространство (X, ρ). Рассмотрим единичный шар в $F(X)$ для нормы Канторовича–Рубинштейна. Это будет симметричный многогранник P. Посмотрим на двойственный многогранник P', он есть единичный шар в пространстве $\mathrm{Lip}\,(X)$. Так как пространство X слабо линейно жесткое, все вершины многогранника P' суть функции $\pm\rho(x, \cdot)$ – это видно из (1). Значит, у многогранника P' не больше, чем $2n$ вершин, где n – мощность множества X. Так как размерность многогранника равна $n-1$ и он центрально-симметричный, то у него либо $2n$, либо $2n-2$ вершин.

Пусть $A_{x_1,x_2} = \frac{\delta_{x_1} - \delta_{x_2}}{\rho(x_1,x_2)}$ – вершина многогранника P. Тогда ей соответствует какая-то грань многогранника P' размерности $n-1$. В этой грани есть как минимум $n-1$ вершин (каждой соответствует $\pm\rho(x, \cdot)$), следовательно, как минимум для $n-1$ точек x из X верно равенство $|\rho(x, x_1) - \rho(x, x_2)| = \rho(x_1, x_2)$. Далее заметим, что если $\rho(x, x_1) - \rho(x, x_2) = \rho(x_1, x_2)$, то

$$\frac{\delta_x - \delta_{x_1}}{\rho(x, x_1)} = \frac{\rho(x, x_2)}{\rho(x, x_1)} \cdot \frac{\delta_x - \delta_{x_2}}{\rho(x, x_2)} + \frac{\rho(x_2, x_1)}{\rho(x, x_1)} \cdot \frac{\delta_{x_2} - \delta_{x_1}}{\rho(x_2, x_1)}.$$

То есть

$$A_{x,x_1} = \frac{\rho(x, x_2)}{\rho(x, x_1)} \cdot A_{x,x_2} + \frac{\rho(x_2, x_1)}{\rho(x, x_1)} \cdot A_{x_2,x_1}.$$

Но из того, что

$$\frac{\rho(x,x_2)}{\rho(x,x_1)}+\frac{\rho(x_2,x_1)}{\rho(x,x_1)}=1,$$

следует, что A_{x,x_1} лежит на отрезке, соединяющем A_{x,x_2} и A_{x_2,x_1}. То есть A_{x,x_1} не является вершиной многогранника P. Построим граф на n вершинах, каждая из которых соответствует элементу пространства X. Соединим вершины x и y ребром, если $A_{x,y}$ является вершиной многогранника P (это условие симметрично). Тогда, как показано выше, для любого ребра (x_1,x_2) существует не более одной вершины x такой, что имеются ребра (x,x_2) и (x,x_1).

Лемма 2. *В таком графе имеется не более чем $[n^2/4]$ ребер (при $n\geq 4$).*

Доказательство. Докажем это индукцией по n. База $n=4$ очевидна.

Переход $n\to n+1$. Указанное свойство графа наследственное, то есть для любого подграфа оно выполнено. Тогда в любом индуцированном подграфе на n вершинах не более $[n^2/4]$ ребер. Просуммируем по всем подграфам на n вершинах и получим, что ребер в графе не больше, чем $(n+1)\cdot[n^2/4]/(n-1)$ (каждое ребро посчитано $n-1$ раз). Осталось заметить, что $(n+1)\cdot[n^2/4]/(n-1)<[(n+1)^2/4]+1$, так что ребер в нашем графе строго меньше, чем $[(n+1)^2/4]+1$, что и требовалось доказать. □

Таким образом, мы доказали, что у многогранника P не более чем $n^2/2$ вершин (так как каждому ребру графа соответствуют две вершины многогранника). А значит, у многогранника P' не более чем $n^2/2$ граней.

Пусть $n\geq 5$. Если многогранник P' имеет $2n-2$ вершин и он центрально-симметричный, то у него ровно 2^{n-1} граней. Но $2^{n-1}>n^2/2$ при $n\geqslant 5$. Противоречие.

Если же у P' имеется $2n$ вершин, то по теореме 2 в нем хотя бы C_{2k}^k граней максимальной размерности при $n=2k$ и хотя бы $2\cdot C_{2k}^k$ граней максимальной размерности при $n=2k+1$. Это больше $n^2/2$ при $n\geq 6$.

Остается случай $n=5$. Как доказано выше, разбиений чисел a_i хотя бы $6=[\frac{5^2}{2}]$. Если их хотя бы 7, то противоречие получено. Пусть их ровно 6. Тогда в индуктивном построении в доказательстве теоремы 2 в каждом из случаев количество разбиений набора из 4 элементов было равно в точности 3, то есть все числа в этих наборах были равны. Если $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le a_5$ и $a_5 \ne a_1$, то $a_5 - a_1 = a_5 + a_1 = a_2 = a_3 = a_4$. То есть $a_1 = 0$ и $a_2 = a_3 = a_4 = a_5$.

Тогда $B_2 + B_3 + B_4 + B_5 = 0$. (Напомним, что $\pm B_i$ – вершины многогранника P'). Вспомним, что B_i есть $\pm$ функция расстояния до точки. То есть для любой точки $x \in X$

$$\pm\rho(x, x_2) \pm \rho(x, x_3) \pm \rho(x, x_4) \pm \rho(x, x_5) = 0.$$

Заметим, что среди знаков $\pm$ есть не менее одного минуса. Если минус ровно один (скажем, при $\rho(x, x_2)$), то подставим $x = x_2$ и получим противоречие. Значит, минусов хотя бы 2. Аналогично, плюсов хотя бы 2. Значит, плюсов и минусов по два. Можно считать, что

$$\rho(x, x_2) + \rho(x, x_3) - \rho(x, x_4) - \rho(x, x_5) = 0. \tag{2}$$

Через d_{ij} будем обозначать $\rho(x_i, x_j)$. Из равенства (2) следует, что

$$\begin{aligned} d_{23} &= d_{24} + d_{25} = d_{34} + d_{35}, \\ d_{45} &= d_{24} + d_{34} = d_{25} + d_{35}. \end{aligned}$$

Из этих соотношений видно, что

$$\begin{aligned} d_{24} &= d_{35} = a, \\ d_{25} &= d_{34} = b, \\ d_{23} &= d_{45} = a + b. \end{aligned}$$

Не умаляя общности можно считать, что $a \ge b$ и что $t = d_{12}$ не больше любого из d_{1i}. Пусть $d_{14} = t + t_1, d_{15} = t + t_2$. Тогда из (2) следует, что $d_{13} = t + t_1 + t_2$.

Теперь приведем пример 1-липшицевой функции $f = \pm\rho(x_i, \cdot)$, задающей вершину многогранника P':

$$f(x_1) = t, \quad f(x_2) = 0, \quad f(x_3) = a - b, \quad f(x_4) = a, \quad f(x_5) = b.$$

Несложно убедиться, что такая функция подходит. Следовательно, пространство X не является слабо линейно жестким.

Теорема 1 доказана. Для полноты картины остается заметить, что при $n = 4$ существуют слабо линейно жесткие пространства на n точках: для произвольных положительных a, b, c положим

$$\begin{aligned} \rho(D,A) =& a, \\ \rho(D,B) =& b, \\ \rho(D,C) =& c, \\ \rho(A,B) =& a+b, \\ \rho(B,C) =& b+c, \\ \rho(A,C) =& a+c. \end{aligned}$$

Автор благодарен Ф. В. Петрову за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. L. V. Kantorovich, G. Sh. Rubinshtein, *On a space of totally additive functions.* — Vestn. Leningr. Univ. **13**, No. 7 (1958), 52–59.
2. J. Melleray, F. V. Petrov, A. M. Vershik, *Linearly rigid metric spaces and the embedding problem*, — Fund. Math. **199**, No. 2 (2008), 177–194.

Zatitskiy P. B. On the coincidence of the canonical embeddings of a metric space into a Banach space.

Recall the two classical canonical isometric embeddings of a finite metric space X into a Banach space. That is, the Hausdorff–Kuratowsky embedding $x \to \rho(x,\cdot)$ into the space of continuous functions on X with the max-norm, and the Kantorovich–Rubinshtein embedding $x \to \delta_x$ (where δ_x is the δ-measure concentrated at x) with the transportation norm. We prove that these embeddings are not equivalent if $|X| > 4$.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: paxa239@yandex.ru

Поступило 17 ноября 2008 г.