Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 360, 2008 г.

**Е. Ш. Гутшабаш, П. П. Кулиш**

# ДИСКРЕТНЫЕ СИММЕТРИИ, ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДАРБУ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛИ ВЕССА–ЗУМИНО–НОВИКОВА–ВИТТЕНА

## 1. Введение

Модель Весса–Зумино–Новикова–Виттена (WZNW) занимает важное место в современной теории поля. Она является обобщением широкого класса сигма-моделей (киральных полей) и возникает, в частности, в низкоэнергетических пределах полевых теорий, физике элементарных частиц и теории струн [1–3] и физике конденсированных сред [4]. Помимо этого, ее значение заключается в том, что при определенных редукционых предположениях она сводится к хорошо известным вполне интегрируемым системам – матричному уравнению синус-Гордона и цепочке Тоды [5] (стоит отметить также сделанное недавно наблюдение об интерпретации члена вида WZNW в рамках модели магнетика Ландау–Лифшица [6]).

Наиболее значительные и мощные результаты для модели WZNW получены в рамках конформной теории поля (см., например, [7]) и квантования [8], что соответствует некоторому конкретному соотношению (так называемой фикс-пойнт) между двумя константами связи, входящими в модель. В этом случае она допускает бесконечное число сохраняющихся токов и для группы $O(N)$ оказывается эквивалентной модели свободных фермионов. В то же время отказ от этого предположения позволяет рассмотреть (на классическом уровне) и другие интересные и важные решения.

В данной работе, используя ряд дискретных симметрий, присущих рассматриваемой модели, и опираясь на обнаруженное для нее в [9] представление нулевой кривизны, с помощью метода матричного преобразования Дарбу мы построим ее точные решения и выясним их специфику и физический смысл.

Несмотря на то, что имеются формулы связи между решениями (токами) этой модели и модели главного кирального поля, пуассоновы структуры моделей WZNW и главного кирального поля оказываются существенно различными [10]. В силу этого, а также ввиду уже указанной выше важности первой из них, такая задача актуальна и представляет, на наш взгляд, самостоятельный интерес, включая, в дальнейшем, возможность ее квантования и суперсимметричного обобщения; одновременно мы получаем точные решения для главного кирального поля (для группы SU (2)).

Работа построена следующим образом. В п. 2 мы описываем различные эквивалентные формулировки модели WZNW, ее действие и гамильтониан, а также ее пуассонову структуру. В п. 3 проводится анализ линеаризованной модели: построены точные решения, и получен закон дисперсии. В п. 4 после записи представления нулевой кривизны вводится матричное преобразование Дарбу, исследуются дискретные симметрии и приводятся точные решения исходной модели. Кроме этого, там же дается их физическая интерпретация.

## 2. Формулировка модели WZNW. Гамильтониан

Уравнение модели WZNW имет релятивистски инвариантную форму:

$$\partial^{\mu}(\partial_{\mu} g g^{-1}) - \varrho \epsilon^{\mu\nu} \partial_{\mu} g g^{-1} \partial_{\nu} g g^{-1} = 0, \tag{2.1}$$

или, эквивалентно,

$$g_{tt} - g_{xx} = g_t g^{-1}(g_t + \varrho g_x) - g_x g^{-1}(g_x + \varrho g_t), \tag{2.1$a$}$$

где $g : \mathbb{R}^{1,1} \to \mathrm{SU}\,(2)$, $g = g(x,t)$, $x, t \in (-\infty, \infty)$, $\varrho$ – константа связи, $\mu$, $\nu = 0, 1$, $\epsilon^{01} = -\epsilon^{10} = 1$. В конусных переменных $\xi = (t-x)/2$, $\eta = (t+x)/2$ уравнение (2.1) перейдет в следующее уравнение:

$$(\widehat{g}_{\xi} \widehat{g}^{-1})_{\eta} + (\widehat{g}_{\eta} \widehat{g}^{-1})_{\xi} - \varrho [\widehat{g}_{\xi} \widehat{g}^{-1}, \widehat{g}_{\eta} \widehat{g}^{-1}] = 0, \tag{2.1$b$}$$

причем $\widehat{g} = \widehat{g}(\xi, \eta)$ и $g(x,t) = \widehat{g}(\frac{t-x}{2}, \frac{t+x}{2})$, $\widehat{g}(\xi, \eta) = g(\eta - \xi, \eta + \xi)$.

Приведем еще одну эквивалентную формулировку модели, которая в ряде случаев может оказаться полезной:

$$(1+\varrho)(\widehat{g}^{-1} \widehat{g}_{\eta})_{\xi} + (1-\varrho)(\widehat{g}^{-1} \widehat{g}_{\xi})_{\eta} = 0. \tag{2.1$c$}$$

В терминах левых токов $I_0 = I_0(x,t) = g_t g^{-1}$, $I_1 = I_1(x,t) = g_x g^{-1}$, $I_0$, $I_1 \in \mathrm{su}\,(2)$, где $\mathrm{su}\,(2)$ – алгебра Ли группы SU (2), уравнение (2.1) можно переписать как

$$I_{0t} = I_{1x} + \varrho [I_0, I_1], \quad I_{1t} = I_{0x} + [I_0, I_1], \tag{2.2}$$

при этом второе равенство представляет собой тождество.

Действие для модели (2.1) задается в виде

$$\begin{aligned}
&W = W_1 + W_2,\\
&W_1 = \frac{1}{4\varkappa_1^2}\int dx\,dt\,\mathrm{Sp}\,(\partial_i g \partial_j g^{-1})\,\eta_0^{ij}\,\sqrt{-\det(\eta_0)},\\
&W_2 = \frac{\varkappa_2}{24\pi}\int\limits_{\mathcal{D}} d\tau \epsilon^{ijk}\mathrm{Sp}\,(g^{-1}\partial_i g g^{-1}\partial_j g g^{-1}\partial_k g),
\end{aligned}\tag{2.3}$$

где $\eta_0^{ij}$ – метрика Лоренца, $\mathcal{D}$ – область интегрирования – 3-мерное многообразие с границей, представляющей собой двумерное пространство-время (подробности и геометрическую интерпретацию см. в [10]), $\varkappa_1$, $\varkappa_2 \in \mathbb{R}$ – константы, причем $\varkappa_2$ – целое число и

$$\varrho = (\varkappa_1^2\varkappa_2)/(4\pi).\tag{2.4}$$

Случай $\varrho = 1$ отвечает уже упомянутой "фикс-пойнт" и поэтому далее не рассматривается.

Уравнения (2.2) порождаются (регуляризованным) гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2\varkappa_1^2}\int \mathrm{Sp}(I_0^2 + I_1^2 - I_{0\mathrm{init}}^2 - I_{1\mathrm{init}}^2)\,dx,\tag{2.5}$$

где $I_{0\mathrm{init}} = I_{0\mathrm{init}}(x,t)$, $I_{1\mathrm{init}} = I_{1\mathrm{init}}(x,t) \in \mathrm{su}\,(2)$ – некоторые вакуумные (затравочные, фоновые) решения уравнения (2.2); при этом предполагается, что $|I_{0,1}(x,t) - I_{0,1\mathrm{init}}(x,t)| \to 0$ при $x \to \pm\infty$ достаточно быстро (например, в смысле Шварца), а пуассонова структура задается фундаментальными скобками, реализующими алгебру Каца–Муди ($\mu$, $\nu = 1,2,3$):

$$\begin{gathered}
\frac{1}{2\varkappa_1^2}\{I_{0\mu}(x), I_{0\nu}(y)\} = -\epsilon_{\mu\nu\gamma}I_{0\gamma}(x)\delta(x-y) - \varrho\epsilon_{\mu\nu\gamma}I_{1\gamma}(x)\delta(x-y),\\
\frac{1}{2\varkappa_1^2}\{I_{0\mu}(x), I_{1\nu}(y)\} = -\epsilon_{\mu\nu\gamma}I_{1\gamma}(x)\delta(x-y) - \delta_{\mu\nu}\delta^{'}(x-y),\\
\{I_{1\mu}(x), I_{1\nu}(y)\} = 0.
\end{gathered}\tag{2.6}$$

Таким образом, пуассоновы структуры моделей WZNW и главного кирального поля оказываются существенно различными [10]: первая из них, в отличие от второй, является неультралокальной[1].

## 3. Линеаризованная модель WZNW

Рассмотрим линеаризованный вариант системы (2.2). Пусть $I_0 = I_{0\mathrm{init}} + J$, $I_1 = I_{1\mathrm{init}} + K$, где $I_{0\mathrm{init}}$, $I_{1\mathrm{init}}$ – некоторые ее известные (вакуумные) решения (в качестве простейших возьмем $I_{0\mathrm{init}} = i\alpha\sigma_3$, $I_{1\mathrm{init}} = i\beta\sigma_3$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ – константы, $\sigma_3$ – третья матрица Паули), а $J = J(x,t)$, $K = K(x,t)$ – малые возмущения решений, так что $||J|| \ll ||I_{0\mathrm{init}}||$, $||K|| \ll ||I_{1\mathrm{init}}||$ (здесь под нормой матрицы понимается, например, $||C|| = \sup(Cy)$ при $|y| = 1$). После подстановки этих выражений в (2.2) и линеаризации будем иметь

$$J_t - K_x = i\varrho\alpha[\sigma_3, K] + i\varrho\beta[J, \sigma_3], \quad K_t - J_x = i\alpha[\sigma_3, K] + i\beta[J, \sigma_3]. \tag{3.1}$$

В частности, решениями этой системы являются функции $J = K = e^{i(\omega t - kx)}\sigma_3$ и $J = K = e^{i(\omega t + kx)}\sigma_3$, $\omega$, $k \in \mathbb{R}$, так что дисперсионное соотношение имеет тот же вид, что и для обычного волнового уравнения:

$$\omega = \pm k, \tag{3.2}$$

т.е. в системе отсутствует дисперсия.

Полагая $J = \{J_{mn}\}$, $K = \{K_{mn}\}$, $m, n = 1, 2$, и учитывая, что $J$, $K \in \mathrm{su}(2)$, уравнения (3.1) удобно переписать так:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} J_{11} \\ K_{11} \end{pmatrix}_t - \sigma_1 \begin{pmatrix} J_{11} \\ K_{11} \end{pmatrix}_x = 0, \\ &\begin{pmatrix} J_{21} \\ K_{21} \end{pmatrix}_t - \sigma_1 \begin{pmatrix} J_{21} \\ K_{21} \end{pmatrix}_x = 2i \begin{pmatrix} \varrho\beta & -\varrho\alpha \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{21} \\ K_{21} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Эти две системы являются гиперболическими и решаются методом характеристик. Для первой из них уравнения характеристик суть $x \pm t = c_\pm$, а условие на характеристиках дает $K_{11} - J_{11} = f_1(x - t)$,

[1] Как отмечено в [10], после введения еще и правых токов и вычисления их скобок Пуассона с левыми оказывается, что фазовое пространство модели реализуется как прямая сумма двух центральных расширений алгебр токов с двумя коциклами (и с противоположными друг другу знаками), пропорциональными производной от дельта-функции.

$K_{11} + J_{11} = f_2(x+t)$, где $c_\pm$ – произвольные вещественные числа, а $f_1(.)$, $f_2(.)$ – произвольные функции, постоянные на характеристиках. Отсюда имеем

$$\begin{aligned} K_{11}(x,t) &= \frac{1}{2}(f_2(x+t) + f_1(x-t)), \\ J_{11}(x,t) &= \frac{1}{2}(f_2(x+t) - f_1(x-t)). \end{aligned} \tag{3.4}$$

А для второй имеем, соответственно, $x \pm t = d_\pm$ (где $d_\pm$ – произвольные вещественные числа) и

$$dxdK_{21} - dtdJ_{21} + 2idt(\beta J_{21} - \alpha K_{21})(dx - \varrho dt) = 0. \tag{3.5}$$

Переходя в этом уравнении к конусным переменным, находим

$$\left(\frac{K_{21} + J_{21}}{2i(1+\varrho)}\right)_\xi = \beta J_{21} - \alpha K_{21}, \quad \left(\frac{K_{21} - J_{21}}{2i(1-\varrho)}\right)_\eta = \beta J_{21} - \alpha K_{21}. \tag{3.6}$$

Полагая $(K_{21} + J_{21})/(2i(1+\varrho)) = f_\eta$, $(K_{21} - J_{21})/(2i(1-\varrho)) = f_\xi$, получим волновое уравнение на функцию $f = f(\xi, \eta)$:

$$f_{\xi\eta} = i\{(1+\varrho)(\beta - \alpha)f_\eta - (1-\varrho)(\beta+\alpha)f_\xi\}. \tag{3.7}$$

Интегрируя это уравнение и возвращаясь к переменным $x$, $t$, будем иметь

$$\begin{pmatrix} J_{11} \\ K_{11} \end{pmatrix}(x,t) = \begin{pmatrix} \varrho f_t + f_x \\ \varrho f_x + f_t \end{pmatrix}, \tag{3.8}$$

где

$$\begin{aligned} f(x,t) = {} & e^{i[(\beta-\varrho\alpha)x + (\beta\varrho-\alpha)t]} \\ & \times \int_0^\infty \left[C_1(k)e^{i\sqrt{(\beta\varrho-\alpha)^2+k^2}t} + C_2(k)e^{-i\sqrt{(\beta\varrho-\alpha)^2+k^2}t}\right] \\ & \times \left[D_1(k)e^{i\sqrt{(\beta-\varrho\alpha)^2+k^2}x} + D_2(k)e^{-i\sqrt{(\beta-\varrho\alpha)^2+k^2}x}\right] dk, \end{aligned} \tag{3.9}$$

а $C_i(k)$, $D_i(k)$, $i = 1, 2$, – произвольные функции. Таким образом, возмущения на фоне затравочного решения (в компонентах $J_{21}$ и $K_{21}$) происходят на характеристиках в виде осцилляций с малыми переменными амплитудами (их малость должна гарантироваться соответствующими данными Коши) и частотами $(\beta - \varrho\alpha)$ (по $x$) и $(\beta\varrho - \alpha)$ (по $t$).

## 4. Преобразование Дарбу и точные решения

Переходя непосредственно к (2.1b), будем вначале искать решение в виде
$$\widehat{g}(\xi,\eta)=\widehat{u}(\xi)\widehat{v}(\eta), \tag{4.1}$$
где $\widehat{u}$, $\widehat{v}\in \mathrm{Mat}\,(2,\mathbb{C})$, $\widehat{v}^*\widehat{u}^*=\widehat{v}^{-1}\widehat{u}^{-1}$ и $\det\widehat{u}\det\widehat{v}=1$. Подставляя (4.1) в уравнение (2.1b), получим, что функции $\widehat{u}$, $\widehat{v}$ должны подчиняться условиям
$$[\widehat{u}^{-1},\,\widehat{v}_\eta\widehat{v}^{-1}]=0,\quad [\widehat{u}^{-1}\widehat{u}_\xi,\,\widehat{v}_\eta\widehat{v}^{-1}]=0. \tag{4.2}$$
В частности, им удовлетворяют четыре решения типа плоских волн (здесь $\omega$, $k\in\mathbb{R}$ – произвольные параметры):
$$g(x,t)=e^{\pm i(kx-\omega t)\sigma_3}\quad\text{и}\quad g(x,t)=e^{\pm i(kx+\omega t)\sigma_3}. \tag{4.3}$$
С другой стороны, используя анзатц (4.1) для решения уравнения (2.1c), мы придем к уравнению $(1-\varrho)(\widehat{g}^{-1}\widehat{g}_\xi)_\eta=0$. С учетом того, что $\varrho\neq 1$, это приводит к требованию $[u^{-1}u_\xi,v]=0$, которое также удовлетворяется на решениях (4.3).

Уравнение (2.1a) можно представить в виде условия совместности следующей линейной переопределенной матричной системы дифференциальных уравнений (лаксовой пары):
$$\begin{aligned}\Psi_x(x,t,\lambda)&=U(x,t,\lambda)\Psi(x,t,\lambda),\\ \Psi_t(x,t,\lambda)&=V(x,t,\lambda)\Psi(x,t,\lambda),\end{aligned} \tag{4.4}$$
где $U,V,\Psi\in\mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$, а матрицы $U$ и $V$ равны (см. [9])
$$U=a(\lambda)I_0+b(\lambda)I_1,\quad V=b(\lambda)I_0+a(\lambda)I_1, \tag{4.5}$$
причем $\lambda\in\mathbb{C}$ – спектральный параметр и
$$a(\lambda)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\varrho}{(1-\lambda)}-\frac{1+\varrho}{(1+\lambda)}\right],\ b(\lambda)=\frac{1}{2}\left[\frac{1-\varrho}{(1-\lambda)}+\frac{1+\varrho}{(1+\lambda)}\right]. \tag{4.6}$$

Представление (4.4)–(4.6) позволяет, в принципе, использовать метод обратной задачи рассеяния и построить широкий класс точных решений уравнения (2.1a). С этой целью, ограничившись только дискретным спектром задачи (4.4), воспользуемся методом матричного преобразования Дарбу [11]. Для этого прежде всего перейдем к конусным переменным и произведем в (4.4)–(4.6) замену спектрального параметра: $\lambda \to (1+\varrho-\mu)/\mu$, $\mu \in \mathbb{C}$. Тогда система (4.4) перейдет в систему

$$\begin{aligned} \widehat{\Psi}_\xi(\xi,\eta,\mu) &= P(\xi,\eta,\mu)\widehat{\Psi}(\xi,\eta,\mu), \\ \widehat{\Psi}_\eta(\xi,\eta,\mu) &= Q(\xi,\eta,\mu)\widehat{\Phi}(\xi,\eta,\mu), \end{aligned} \tag{4.7}$$

где ($A_0 = A_0(\xi,\eta) = \widehat{g}_\xi \widehat{g}^{-1}$, $B_0 = B_0(\xi,\eta) = \widehat{g}_\eta \widehat{g}^{-1}$)

$$P = \mu A_0, \quad Q = \frac{(1-\varrho)\mu}{2\mu - 1 - \varrho} B_0, \tag{4.8}$$

условие совместности которой эквивалентно (2.1b).

Введем оператор (здесь $I$ – единичная $(2\times 2)$-матрица)

$$\mathcal{R} = I - \mu S(\xi,\eta), \tag{4.9}$$

где $S(\ ,\ ) \in \mathrm{Mat}(2,\mathbb{C})$ – некоторая матрица, и проверим ковариантность системы (4.7) относительно преобразования: $\widehat{\Psi} \to \widehat{\Psi}[1] = \mathcal{R}\widehat{\Psi}$, $A_0 \to A_0[1]$, $B_0 \to B_0[1]$. В результате несложных преобразований получим следующие "одевающие"' соотношения для токов (случай $\varrho = 0$ соответствует модели главного кирального поля [10, 12]):

$$A_0[1] = A_0 - S_\xi, \;\; A_0[1] = S A_0 S^{-1}, \tag{4.10}$$

$$B_0[1] = S B_0 S^{-1} + \frac{2}{1-\varrho} S_\eta S^{-1}, \;\; B_0[1] = B_0 + \frac{1+\varrho}{1-\varrho} S_\eta, \tag{4.11}$$

где $A_0$, $B_0$ – некоторое известное (затравочное) решение уравнения (2.1b). Тогда для искомого поля $g[1]$ с учетом (4.9) будем иметь

$$\widehat{g}[1] = \widehat{\Psi}[1]_{|\mu=1} = c_1^2 \sigma^{(1)} (I - S) \widehat{\Psi}_{|\mu=1} \tau^{(1)}, \tag{4.12}$$

причем из бесследовости матриц токов вытекает, что $\det \widehat{\Psi} = \mathrm{const}$ (эту константу удобно считать равной единице), а $c_1^2 = 1/(\det(I - S))$ – константа, обеспечивающая требование $\widehat{g} \in \mathrm{SU}(2)$. Матрицы $\sigma^{(1)}$, $\tau^{(1)} \in \mathrm{SU}(2)$, присутствующие в (4.12), предполагаются невырожденными и постоянными и гарантируют сходимость решения к вакуумному (возможность введения таких матриц связана с инвариантностью уравнения (2.1a) относительно преобразований $g \to \sigma g$, $g \to g\tau$, $g \to \sigma g \tau$).

Для определения матрицы $S$ воспользуемся следующим приемом. Наряду с (4.7) рассмотрим еще одну лаксову пару вида

$$\Phi_\xi = A_0\Phi\Lambda, \;\; \Phi_\eta = (1-\varrho)B_0\Phi\Lambda(2\Lambda - I_{(\varrho)})^{-1}, \tag{4.13}$$

где $\Lambda = \operatorname{diag}(\tilde\lambda^{(1)}, \tilde\lambda^{(2)})$, а $\tilde\lambda^{(1)}$, $\tilde\lambda^{(2)}$ – некоторые (пока произвольные) комплексные числа, $I_{(\varrho)} = (1+\varrho)I$. Пусть теперь $\widehat\Phi$ – некоторое фиксированное решение системы (4.13), отвечающее выбору $\Lambda = \widehat\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)})$. Тогда можно убедиться, что система (4.7) инвариантна относительно подстановки

$$S = \widehat\Phi\widehat\Lambda^{-1}\widehat\Phi^{-1}, \tag{4.14}$$

и, тем самым, одевающие соотношения (4.10)–(4.12) оказываются полностью определенными[2].

Следует также сказать, что введенное таким образом преобразование Дарбу является матричным аналогом скалярного преобразования [10], в качестве которого берется вронскиан двух решений уравнения Шредингера, имеющего квантовомеханический смысл оператора рождения частиц. На языке рассматриваемой спектральной задачи (4.7) (или (4.14)) процедура матричного преобразования также означает, очевидно, добавление в дискретный спектр соответствующей ассоциированной линейной задачи нового собственного значения.

Выясним некоторые свойства матрицы $S$. Для этого положим $I_0 = (i/2)I_{0\alpha}\sigma_\alpha$, $I_1 = (i/2)I_{1\alpha}\sigma_\alpha$, где $\alpha$ пробегает значения от 1 до 3, так что $I_0 = -I_0^*$, $I_1 = -I_1^*$ (символ "$*$" – операция эрмитова сопряжения) и, кроме того, $\operatorname{Sp} I_0 = \operatorname{Sp} I_1 = 0$. Из (4.10)–(4.11) тогда следует, что матрицы $S_\xi$, $S_\eta$ также должны быть антиэрмитовыми. Таким образом,

$$(S+S^*)_\xi = 0, \;\; (S+S^*)_\eta = 0, \tag{4.15}$$

и, значит, $S + S^* = S_0(\lambda)$, где $S_0(\lambda)$ – произвольная матрица, причем $S_0(\lambda) = S_0^*(\lambda)$ и

$$\operatorname{Sp} S_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{(1)}} + \frac{1}{\lambda^{(2)}} + \frac{1}{\bar\lambda^{(1)}} + \frac{1}{\bar\lambda^{(2)}}. \tag{4.16}$$

[2]Преобразование, аналогичное (4.9), (4.14), было недавно использовано при построении точного решения в двумерной вихревой гидродинамике идеальной жидкости [13]. Отметим также, что матричное преобразование Дарбу (вида (4.14)) было применено в [14] при интегрировании самодуальных уравнений Янга–Миллса.

Из требования совместности порознь (4.10) и (4.11) будем иметь

$$S_\xi S = [A_0, S], \ \ (1+\varrho)S_\eta S - 2S_\eta = (1-\varrho)[S, B_0]. \qquad (4.17)$$

Принимая во внимание (4.14) и полагая $L = [(1+\varrho)S - 2I]^{-1}$, найдем два полезных обобщенных "сплетающих" соотношения:

$$[A_0, S]S^{-1} = -S^{*-1}[A_0, \, S^*], \ \ [B_0, S]L = L^*[S^*, B_0]. \qquad (4.18)$$

Ясно, что формулы (4.10)–(4.12) носят итерационный характер, и поэтому после $N$-кратного повторения преобразования (4.9) мы получим $N$-солитонное решение:

$$A_0[N] = \prod_{i=1}^{N} S[i] A_0 S[i]^{-1}, \ \ B_0[N] = B_0 - \frac{1+\varrho}{1-\varrho}\sum_{i=1}^{N} S_\eta[i], \qquad (4.19)$$

и

$$\widehat{g}[N] = \left(\prod_{i=1}^{N} c_i^2 \sigma^{(i)}(I - S[i])\right)\widehat{\Psi}\prod_{i=1}^{N}\tau^{(i)}, \qquad (4.20)$$

где $c_i^2 = 1/(\det(I - S[i]))$, а под символами произведений в (4.19)–(4.20) понимается упорядоченное произведение матричных сомножителей.

Возвращаясь к случаю однократных одевающих соотношений, построим явные решения уравнения (2.1a). Для этого предварительно отметим, что из условий $\bar{A}_0 = \sigma_2 A_0 \sigma_2$, $\bar{B}_0 = \sigma_2 B_0 \sigma_2$ следует инволюция на решение системы (4.13)

$$\Phi(\boldsymbol{\lambda}) = \sigma_2 \bar{\Phi}(\boldsymbol{\lambda})\sigma_2, \qquad (4.21)$$

которая выполняется, если и только если матрица $\Lambda = \Lambda(\vec{\lambda})$, где $\vec{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \, \lambda^{(2)})$ – комплексный вектор, имеет вид $\Lambda = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \, \bar{\lambda}_1)$, $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Тогда с учетом (4.16) и в силу произвольности $S_0$ можно считать, что

$$S + S^* = \left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\bar{\lambda}_1}\right)I. \qquad (4.22)$$

Выберем простейшее затравочное решение уравнения (2.1b) в виде классического "вращающегося и спирального (геликоидального) вакуума", например второе из решений (4.3)[3], так, что при этом $A_0 =$

[3]Граничная задача с такого рода стационарным вакуумом для нелинейной $O(3)$ сигма-модели (двумерного изотропного ферромагнетика Гейзенберга) методом обратной задачи была решена в [15, 16].

$i(\omega+k)\sigma_3$, $B_0 = i(\omega-k)\sigma_3$, а в качестве соответствующего решения $\Psi = \Psi(x,t,\mu)$ возьмем

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & ie^{-\bar{\varphi}(x,t,\mu)} \\ ie^{-\varphi(x,t,\mu)} & 0 \end{pmatrix}, \tag{4.23}$$

где

$$\varphi(x,t,\mu) = it\left[\mu(\omega+k) + \frac{\mu(1-\varrho)(\omega-k)}{2\mu-1-\varrho}\right] - ix\left[\mu(\omega+k) - \frac{\mu(1-\varrho)(\omega-k)}{2\mu-1-\varrho}\right].$$

Интегрируя (4.13), найдем

$$\widehat{\Phi}(\xi,\eta) = \begin{pmatrix} e^{\phi_1} & ie^{-\bar{\phi}_1} \\ ie^{-\phi_1} & e^{\bar{\phi}_1} \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

где ($\delta_1$ – произвольная вещественная постоянная)

$$\phi_1 = i\lambda_1(\omega+k)\xi + i\frac{(1-\varrho)(\omega-k)}{2\lambda_1-(1+\varrho)}\eta + \frac{\delta_1}{2}. \tag{4.25}$$

Матрица $S$, согласно (4.14), тогда равна

$$S = \frac{1}{2\cosh(\phi_1+\bar{\phi}_1)} \begin{pmatrix} \frac{e^{\phi_1+\bar{\phi}_1}}{\lambda_1} + \frac{e^{-(\phi_1+\bar{\phi}_1)}}{\bar{\lambda}_1} & -ie^{\phi_1-\bar{\phi}_1}(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\bar{\lambda}_1}) \\ ie^{-(\phi_1-\bar{\phi}_1)}(\frac{1}{\lambda_1}-\frac{1}{\bar{\lambda}_1}) & \frac{e^{\phi_1+\bar{\phi}_1}}{\bar{\lambda}_1} + \frac{e^{-(\phi_1+\bar{\phi}_1)}}{\lambda_1} \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

и, очевидно, удовлетворяет условию (4.16).

Введем обозначения ($g \in \mathrm{SU}(2)$)

$$g[1] = \begin{pmatrix} g_{11}[1] & -\bar{g}_{21}[1] \\ g_{21}[1] & \bar{g}_{11}[1] \end{pmatrix}.$$

Используя (4.12) и переходя к переменным $x$ и $t$, окончательно получим односолитонное решение ($c_1 = |\lambda_1|/(|\lambda_1|-1)$):

$$\begin{aligned} g_{11}[1](x,\,t) &= \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_1|-1}\left[1 - \frac{\cosh(\phi_1+\bar{\phi}_1+\nu_1)}{|\lambda_1|\cosh(\phi_1+\bar{\phi}_1)}\right]e^{-\varphi}, \\ g_{21}[1](x,\,t) &= \frac{\lambda_{1I}(|\lambda_1|-1)}{|\lambda_1|^3}\frac{1}{\cosh(\phi_1+\bar{\phi}_1)}e^{\phi_1-\bar{\phi}_1}\,e^{-\varphi}, \end{aligned} \tag{4.27}$$

где

$$\varphi = i(kx - \omega t),\ \lambda_1 = \lambda_{1R} + i\lambda_{1I} = |\lambda_1| e^{i\nu_1},\ \nu_1 = \arg\lambda_1$$

и при этом

$$\begin{gathered}
\phi_1 + \bar{\phi}_1 = 2\sqrt{(p_1 - \bar{p}_1)(q_1 - \bar{q}_1)}\,\frac{x - v_1 t - x_0}{\sqrt{1 - v_1^2}},\\
\phi_1 - \bar{\phi}_1 = it(p_1 + q_1 + \bar{p}_1 + \bar{q}_1) - ix(p_1 - q_1 + \bar{p}_1 - \bar{q}_1),\\
p_1 = \frac{\lambda_1(\omega + k)}{2}, \quad q_1 = \frac{(1 - \varrho)(\omega - k)}{2[2\lambda_1 - (1 + \varrho)]},
\end{gathered} \tag{4.28}$$

$p_1,\ q_1 \in \mathbb{C}$. Очевидно, что при $x \to \pm\infty$ имеем $g[1] \to g_{\text{init}}$, где $g_{\text{init}}$ – затравочное решение уравнения (2.1a) (второе из решений (4.3)), т.е. на больших расстояниях построенное решение сходится к фоновому. С физической точки зрения решение (4.27) представляет собой уединенную волну с амплитудой компоненты $g_{21}[1]$ равной $\lambda_{1I}(|\lambda_1| - 1)/|\lambda_1|^3$. Эта волна локализована вдоль направления $x(t) = x_0 + v_1 t$, где $x_0 = \delta_1/(i(p_1 - q_1 - \bar{p}_1 + \bar{q}_1))$ – положение центра инерции солитона при $t = 0$, $v_1 = (p_1 + q_1 - \bar{p}_1 - \bar{q}_1)/(p_1 - q_1 - \bar{p}_1 + \bar{q}_1)$ – скорость, а величина $2\sqrt{(p_1 - \bar{p}_1)(q_1 - \bar{q}_1)}$ имеет смысл его массы[4]. Кроме прямолинейного и равномерного движения, решение (4.27) описывает также осцилляции компоненты $g_{11}[1]$ по $x$ и по $t$ с частотами $k$ и $\omega$ и осцилляции компоненты $g_{21}[1]$ по $x$ и $t$ с частотами $p_1 - q_1 + \bar{p}_1 - \bar{q}_1 + k$ и $p_1 + q_1 + \bar{p}_1 + \bar{q}_1 + \omega$ соответственно.

Перейдем к двухсолитонному решению, воспользовавшись соотношением (4.20). С учетом (4.26)–(4.28) после некоторых вычислений будем иметь

$$\begin{aligned}
g_{11}[2] &= \frac{|\lambda_2||\lambda_1|}{(|\lambda_2| - 1|)(|\lambda_1| - 1)}\Delta_2\Delta_1 e^{-\varphi}\\
&\quad - \frac{\lambda_{2I}\lambda_{1I}(|\lambda_2| - 1)(|\lambda_1| - 1)}{|\lambda_2|^3|\lambda_1|^3}\,\frac{e^{-(\phi_2 - \bar{\phi}_2) + \phi_1 - \bar{\phi_1}}}{\cosh\Phi_2\cosh\Phi_1}e^{\varphi},\\
g_{21}[2] &= i\left\{\frac{\lambda_{2I}(|\lambda_2| - 1)}{|\lambda_2|^3}\,\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_1| - 1}\Delta_1\frac{e^{\phi_2 - \tilde{\phi}_2}}{\cosh\Phi_2}e^{-\varphi}\right.\\
&\quad \left. + \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_2| - 1}\,\frac{\lambda_{1I}(|\lambda_1| - 1)}{|\lambda_1|^3}\Delta_2\frac{e^{\phi_1 - \bar{\phi}_1}}{\cosh\Phi_1}e^{\varphi}\right\},
\end{aligned} \tag{4.29}$$

[4] При этом для вещественности этой величины, как нетрудно проверить, должно выполняться условие $(\omega^2 - k^2)(1 - \rho) < 0$.

$$\Delta_i = 1 - \frac{\cosh\chi_i}{|\lambda_i|\cosh\Phi_i}.$$

Здесь $\Phi_i = \phi_i + \bar{\phi}_i$, $\chi_i = \Phi_i + \nu_i$, $\nu_i = \arg\lambda_i$, $i = 1, 2$, выражение для $\Phi_2$ получается из (4.28) заменой $\lambda_1$ на $\lambda_2$,

Решение (4.29), как и (4.27), при $x \to \pm\infty$ сходится к фоновому. Отметим также появление в спектре возбуждений модели гармоники, кратной основной[5]. В случае общего положения, т.е. когда $v_1 \neq v_2$ (выражение для скорости $v_2$ получается заменой $\lambda_1$ на $\lambda_2$ в формуле для $v_1$), формулы (4.29) описывают комплекс, состоящий из двух солитонов. Далее, пусть для определенности $v_2 > v_1$. Тогда при $t \to \pm\infty$ из (4.29) следует, что

$$\begin{aligned} &g_{11}[2](x,t) - e^{-\varphi} \to -b_1 b_2 e^{-(\phi_2-\bar{\phi}_2)+\phi_1-\bar{\phi}_1} e^{\varphi} e^{-(\Phi_1+\Phi_2)},\\ &g_{21}[2](x,t) \to i[b_2 e^{\phi_2-\bar{\phi}_2} e^{-\phi} e^{-\Phi_2} + \frac{a_2}{a_1} b_1 e^{\phi_1-\bar{\phi}_1} e^{\varphi} e^{-\Phi_1}], \end{aligned} \tag{4.30}$$

где $a_j = |\lambda_j|/(|\lambda_j|-1)$, $b_1 = \lambda_{jI}(|\lambda_j|-1)/|\lambda_j|^3$, $j = 1, 2$. Эти асимптотики показывают, что двухсолитонный комплекс распадается на два фактически независимых односолитонных состояния. Таким образом, картина, описываемая решением (4.29), представляется следующей: если в бесконечно удаленном прошлом у нас имелось два солитона с разными скоростями, то при конечных значениях $t$ они будут образовывать некоторое составное состояние, а в бесконечно удаленном будущем это состояние снова распадется. Ясно, что такое положение будет иметь место и для произвольного конечного числа солитонов, что следует из анализа выражения (4.20).

Очевидно, что, как и для модели главного кирального поля [12], более разнообразная и интересная физическая ситуация здесь возникнет при обобщении уравнения (2.1) на случай группы SU $(N)$ при $N \geqslant 3$.

Приведем еще выражение для нерегуляризованной части плотности гамильтониана (2.5), вычисленной на односолитонном решении (4.27). Оно может быть получено, либо если воспользоваться "одевающими выражениями" (4.10), либо непосредственно из (4.27). В результате, полагая

$$I_0[1] = \begin{pmatrix} I_{011}[1] & -\bar{I}_{021}[1] \\ I_{021}[1] & -I_{011}[1] \end{pmatrix}, \quad I_1[1] = \begin{pmatrix} I_{111}[1] & -\bar{I}_{121}[1] \\ I_{121}[1] & -B_{111}[1] \end{pmatrix},$$

[5] Аналогичный эффект был получен, например, при интегрировании цилиндрически симметричной модели магнетика Гейзенберга [17].

находим:

$$\mathcal{H}_{\rm nonreg} = \mathrm{Sp}\,(I_0^2[1] + I_1^2[1]) = 2\{I_{011}^2[1] + I_{111}^2[1] - (|I_{021}[1]|^2 + |I_{121}[1]|^2)\}$$

$$= 2\Big\{\Big[-a_1^2\omega_1\Delta_1\frac{\sinh\nu_1}{|\lambda_1|\cosh^2\Phi_1} + ia_1^2\omega\Delta_1^2 + b_1^2\frac{i(\omega - r_1)\cosh\Phi_1 - \omega_1\sinh\Phi_1}{\cosh^2\Phi_1}\Big]^2$$

$$+\Big[a_1^2k_1\Delta_1\frac{\sinh\nu_1}{|\lambda_1|\cosh^2\Phi_1} - ia_1^2k_1\Delta_1^2 + b_1^2\frac{i(s_1 + k)\cosh\Phi_1 + k_1\sinh\Phi_1}{\cosh^2\Phi_1}\Big]^2\Big\} \qquad (4.31)$$

$$-a_1^2b_1^2\Big|\Delta_1\frac{i(r_1+\omega)\cosh\Phi_1 - \omega_1\sinh\Phi_1}{\cosh^2\Phi_1} - \frac{1}{\cosh\Phi_1}\Big(-\frac{\omega_1\sinh\nu_1}{|\lambda_1|\cosh\Phi_1} + i\omega\Delta_1\Big)\Big|^2$$

$$-a_1^2b_1^2\Big|\Delta_1\frac{i(r_1-k)\cosh\Phi_1 + k_1\sinh\Phi_1}{\cosh^2\Phi_1} - \frac{1}{\cosh\Phi_1}\Big(\frac{k_1\sinh\nu_1}{|\lambda_1|\cosh\Phi_1} - i\omega\Delta_1\Big)\Big|^2\Big\},$$

где $k_1 = p_1 - \bar{p}_1 - q_1 + \bar{q}_1$, $\omega_1 = p_1 - \bar{p}_1 + q_1 - \bar{q}_1$, $r_1 = p_1 + \bar{p}_1 + q + \bar{q}_1 + \omega$, $s_1 = q_1 + \bar{q}_1 - p_1 - \bar{p}_1 - k$, $k_1,\, \omega_1 \in \mathbb{C}$, $r_1,\, s_1 \in \mathbb{R}$.

Анализируя выражение (4.31), нетрудно видеть, что $\mathcal{H}_{\rm nonreg} \to -2(\omega^2 + k^2)$ и при этом $\mathrm{Sp}\,(I_{0\rm init}^2[1] + I_{1\rm init}^2[1]) \to -2(\omega^2 + k^2)$ при $x \to \pm\infty$, так что подынтегральное выражение в (2.5) действительно стремится к нулю.

Работа частично поддержана грантами РФФИ 07-02-92166-НЦНИ и 08-01-00638.

## Литература


1. S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields. Modern Applications*, Vol. 2. Cambridge Univ. Press, 1996.
2. С. В. Кетов, *Введение в квантовую теорию струн и суперструн.* Новосибирск, СО, 1991.
   P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Senechal, *Conformal Field Theory*, Springer, 1997.
3. E. Abdalla, M. C. B. Abdalla, K. D. Rothe, *Nonperturbative Methods in Two-Dimensional Quantum Field Theory.* World Scientific, 1991.
4. A. M. Tsvelik, *Quantum Field Theory in Condensed Matter Physics.* Cambridge Univ. Press, 2003.
5. L. Feher, L. O' Rainfeartaign, P. Ruelle, I. Tsutsui, A. Wipf. — Phys. Rep. **222** (1992), 1.
6. A. Melikyan, A. Pinzul and al., `arXiv:hep-th/0808.2489v1.`
7. V. G. Knizhnik, A. B. Zamolodchikov. — Nucl. Phys B. **247** (1984), 83.
8. A. Alekseev, L. Faddeev, M. Semenov-Tian-Shansky, A. Volkov, Preprint CERN-TH-5981/91, 1991.
9. S. G. Rajeev, A. Stern, P. Vitale. — Phys. Lett. B **388** (1996), 769.
10. Л. А. Тахтаджан, Л. Д. Фаддеев, *Гамильтонов подход в теории солитонов.* М., Наука, 1986.

11. V. Matveev, M. Salle, *Darboux Transformation and Solitons.* Springer-Verlag, 1991.
12. В. Е. Захаров, А. В. Михайлов. — ЖЭТФ **74** (1978), 1953.
В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский, *Теория солитонов. Метод обратной задачи.* М., Наука, 1980.
13. Е. Ш. Гутшабаш. — Зап. научн. семин. ПОМИ **335** (2006), 119.
14. Дж. Дж. Ниммо, К. Р. Джилсон, Й. Охта. — ТМФ **122** (2000), 284.
15. Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский. — ТМФ **90** (1992), 175.
16. Г. Г. Варзугин, Е. Ш. Гутшабаш, В. Д. Липовский. — ТМФ **104** (1995), 513.
17. Е. Ш. Гутшабаш. — Письма в ЖЭТФ **73** (2001), 317.

Gutshabash E. Sh., Kulish P. P. Discrete symmetries, Darboux transformation, and exact solutions of the Wess–Zumino–Novikov–Witten model.

The matrix Darboux transformation is applied to an auxiliary problem of the classical Wess–Zumino–Novikov–Witten model. One and two soliton solutions are written explicitly, and a matrix expression for the $N$-soliton solution is given. Discrete symmetries of the WZNW model are analyzed, and a solution of the linearized equation of motion is obtained.

Физический факультет С.-Петербургского государственного университета
*E-mail*: gutshab@EG2097.spb.edu

Поступило 12 ноября 2008 г.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН
*E-mail*: kulish@euclid.pdmi.ras.ru