Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 360, 2008 г.

Е. Е. Горячко

K_0-ФУНКТОР И ХАРАКТЕРЫ ГРУППЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ ПЕРЕКЛАДЫВАНИЙ ОТРЕЗКА

Введение

Рассмотрим полуинтервал $[0,1)$ (далее мы будем называть его "отрезок"), снабженный мерой Лебега, и все такие автоморфизмы этого пространства с мерой, что их действие на отрезке является "перекладыванием" конечного числа полуинтервалов с рациональными концами, образующих разбиение отрезка $[0,1)$.

Говоря строго, биекция $g\colon[0,1)\to[0,1)$ – *рациональное перекладывание отрезка*, если существуют такие число $n\in\mathbb{N}$, перестановка $u\in \mathrm{S}_n$ и разбиение отрезка $\big\{[x_0,x_1),\dots,[x_{n-1},x_n)\big\}$ на полуинтервалы с рациональными концами, что $g(x)=x-x_i+x_{u(i)}$ для всяких $i\in\{0,\dots,n-1\}=\underline{n}$ и $x\in[x_i,x_{i+1})$ (здесь и далее симметрическая группа S_n реализуется как группа биекций множества $\underline{n}$).

Легко проверить, что рациональные перекладывания отрезка образуют всюду плотную подгруппу в группе всех автоморфизмов отрезка $[0,1)$ как пространства с мерой. Эту подгруппу мы обозначим через R (по первой букве слова "rearrangement"). В настоящей работе *описывается структура* K_0*-функтора и исследуются некоторые свойства неразложимых характеров группы* R.

Основной прием в исследовании теории представлений группы рациональных перекладываний отрезка состоит в *описании группы* R *как индуктивного предела симметрических групп относительно периодических вложений*, изложенном в разделе 2 этой статьи. Данное описание позволяет отнести группу R к обширному классу локально-конечных групп, для которых интересующие нас задачи теории представлений могут быть сведены к изучению K_0-функтора и характеров конечных групп (в нашем случае – симметрических групп).

Построение общей теории представлений индуктивных пределов конечных групп изложено, например, в [3, 8]; исходные определения

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ НШ-2460.2008.1 для поддержки ведущих научных школ и гранта РФФИ 08-01-00379-а.

этой теории для удобства читателя приведены в разделе 1 этой статьи. Классический пример такого предела – бесконечная симметрическая группа, K_0-функтор и характеры которой описаны в [1, 8]. Индуктивными пределами конечных групп также являются различные группы матриц над счетными полями, рассматриваемые в [4, 5, 9]. Более общее применение индуктивного подхода возможно в теории представлений индуктивных пределов локально-компактных групп. Таким пределом является, например, бесконечная унитарная группа над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, исследуемая в [2].

Группа рациональных перекладываний отрезка R входит в этот ряд примеров, и, кроме того, как показано в разделе 2, она принадлежит более узкому классу *таких локально-конечных групп, что их* K_0-*функтор есть кольцо Рисса*, то есть на нем определено неотрицательное умножение и его порядковая единица является единицей относительно этого умножения. Из наличия кольцевой структуры на K_0-функторе группы R следует известный критерий неразложимости следов, указанный в теореме 1. Аналогичная ситуация имеет место и для классического примера бесконечной симметрической группы, причем умножение на ее K_0-функторе в определенном смысле двойственно умножению на K_0-функторе группы R.

В разделе 3 этой статьи определяется вспомогательная структура полукольца на множестве разбиений неотрицательных целых чисел. С ее помощью K_0-*функтор группы* R *можно описать в терминах симметрических функций*, что мы и делаем в теореме 2. Это описание позволяет отождествить гомоморфизмы на $K_0(\mathrm{R})$ и однородные функции на множестве непустых разбиений. Используя данное отождествление, в разделе 4 мы описываем континуум характеров и счетную серию неразложимых следов на $K_0(\mathrm{R})$, из которой мы получаем *счетную серию неразложимых характеров группы* R.

Наконец, в разделе 5 изучены некоторые свойства неразложимых характеров группы R и, в частности, доказана теорема 3 об их значениях на цикле $(0\,1)$. Эти свойства позволяют высказать несколько гипотез об описании характеров группы R, самая сильная из которых состоит в том, что ранее описанные характеры составляют полный список неразложимых характеров группы R. Нам представляются интересными как работа над этими гипотезами, так и в целом дальнейшее исследование теории представлений группы R.

Автор выражает благодарность А. М. Вершику за постановку задачи и полезные обсуждения в ходе работы над ней.

1. Общие сведения о K_0-функторе и характерах индуктивных пределов конечных групп

В этом разделе приведены исходные определения и факты, относящиеся к K_0-функтору и характерам групп, являющихся индуктивными пределами конечных групп (и, в частности, группы R).

Пусть группа G – индуктивный предел семейства конечных групп G_i, $i \in I$, где I – частично упорядоченное множество.

Определение 1. K_0-*функтор* $\mathrm{K}_0(G)$ *группы* G *– это упорядоченная абелева группа с порядковой единицей, состоящая из классов эквивалентности конечно-порожденных проективных виртуальных модулей над* G*; конус неотрицательных элементов* K_0*-функтора – конус истинных модулей; порядковая единица* K_0*-функтора – модуль, соответствующий регулярному представлению группы* G.

Понятие K_0-функтора определено для любых локально-полупростых алгебр, то есть для индуктивных пределов конечномерных полупростых алгебр. В этом смысле определенный K_0-функтор является K_0-функтором групповой алгебры группы G, но для краткости мы будем вести изложение только в терминах самой группы G.

Определение 2. *Комплексный гомоморфизм на* $\mathrm{K}_0(G)$*, то есть гомоморфизм абелевых групп между* $\mathrm{K}_0(G)$ *и* $\mathbb{C}$*, – след*[1] *на* K_0*-функторе группы* G*, если он неотрицателен и нормирован.*

Определение 3. *Комплексная функция на* G *– характер группы* G*, если она центральна, неотрицательно определена и нормирована.*

Как доказано в статье [3], множества следов на $\mathrm{K}_0(G)$ и характеров группы G суть симплексы Шоке в пространствах комплексных гомоморфизмов на $\mathrm{K}_0(G)$ и комплексных центральных функций на G соответственно; мы обозначим эти симплексы через $\mathcal{T}(\mathrm{K}_0(G))$ и $\mathcal{X}(G)$. Их границы Шоке $\operatorname{ex}\mathcal{T}(\mathrm{K}_0(G))$ и $\operatorname{ex}\mathcal{X}(G)$ состоят из неразложимых точек данных симплексов, то есть из неразложимых следов и неразложимых характеров соответственно (точка симплекса Шоке – неразложимая, если ее нельзя представить в виде нетривиальной выпуклой комбинации других точек этого симплекса).

Заменяя для всех $i \in I$ группу G_i на ее образ при каноническом вложении в группу G, далее мы будем считать, что G_i – подгруппа в G. Тогда G_i – подгруппа в G_j при $i \leqslant j$ и $G = \bigcup_{i\in I} G_i$.

[1] Точнее говоря, это *конечный след*, но других мы и не рассматриваем.

Легко проверить, что K_0-функторы групп G_i, $i \in I$, образуют индуктивное семейство упорядоченных абелевых групп с порядковыми единицами относительно вложений, которые для всех $i \leqslant j$ сопоставляют любому представлению π группы G_i индуцированное представление $\mathrm{ind}_{G_i}^{G_j}(\pi)$ группы G_j. Из непрерывности K_0-функтора относительно индуктивных пределов следует, что $\mathrm{K}_0(G)$ есть индуктивный предел групп $\mathrm{K}_0(G_i)$, $i \in I$, относительно этих вложений.

Как и в случае группы G, заменим для всех $i \in I$ группу $\mathrm{K}_0(G_i)$ на ее образ при каноническом вложении в $\mathrm{K}_0(G)$. Тогда $\mathrm{K}_0(G_i)$ – подгруппа в $\mathrm{K}_0(G_j)$ при $i \leqslant j$ и $\mathrm{K}_0(G) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{K}_0(G_i)$.

Предложение 1. *Между пространствами комплексных гомоморфизмов на* $\mathrm{K}_0(G)$ *и комплексных центральных функций на* G, *наделенными слабой топологией, имеется изоморфизм топологических векторных пространств, одновременно устанавливающий гомеоморфизм между симплексами Шоке* $\mathcal{T}(\mathrm{K}_0(G))$ *и* $\mathcal{X}(G)$ *и, значит, между их границами* $\mathrm{ex}\,\mathcal{T}(\mathrm{K}_0(G))$ *и* $\mathrm{ex}\,\mathcal{X}(G)$.

Доказательство. Пусть сначала группа G конечна. Здесь и далее через $\sigma(G)$ мы обозначаем множество классов эквивалентности неприводимых представлений (конечной) группы G; через χ_π – характер представления π для всякого $\pi \in \mathrm{K}_0(G)$.

Если τ – гомоморфизм на $\mathrm{K}_0(G)$, то для всех $g \in G$ положим

$$\chi(g) = \sum_{\pi \in \sigma(G)} \tau(\pi)\chi_\pi(g).$$

Тогда χ – центральная функция на G. Наоборот, если χ – центральная функция на G, то для всех $\pi \in \mathrm{K}_0(G)$ положим

$$\tau(\pi) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi(g)\overline{\chi_\pi(g)}.$$

Тогда τ – гомоморфизм на $\mathrm{K}_0(G)$. Из соотношений ортогональности для характеров конечных групп следует, что построенные отображения взаимнообратны. Непосредственно проверяется, что они линейны, непрерывны и переводят следы в характеры и наоборот.

Если теперь G – произвольная группа, являющаяся индуктивным пределом конечных групп G_i, $i \in I$, то, используя полученные выше разложения $G = \bigcup_{i \in I} G_i$ и $\mathrm{K}_0(G) = \bigcup_{i \in I} \mathrm{K}_0(G_i)$, мы можем определить искомый изоморфизм для группы G как продолжение построенных изоморфизмов для конечных групп G_i, $i \in I$. $\square$

2. Описание группы R как индуктивного предела симметрических групп, структура кольца на $K_0(R)$ и критерий неразложимости следов

В этом разделе определено ключевое понятие прямого произведения перестановок, при помощи которого мы описываем группу R как индуктивный предел симметрических групп и приводим критерий неразложимости следов на ее K_0-функторе.

Пусть l и m – натуральные числа.

Определение 4. *Прямое произведение* $u \sqcap v \in \mathrm{S}_{lm}$ *перестановок* $u \in \mathrm{S}_l$ *и* $v \in \mathrm{S}_m$ *– перестановка, определенная для всякого* $z \in \underline{lm}$ *по формуле* $u \sqcap v(z) = m\, u(z \operatorname{div} m) + v(z \bmod m)$.

Прямое произведение перестановок с точностью до изоморфизма есть прямое произведение автоморфизмов в категории, объекты которой – множества $\underline{n}$, $n \in \mathbb{N}$, а морфизмы – отображения между ними. В этом смысле двойственной к нему операцией является операция прямой суммы перестановок, о которой пойдет речь далее.

Непосредственно проверяется, что прямое произведение ассоциативно как операция на множестве $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{S}_n$ и является гомоморфизмом групп как отображение из группы $\mathrm{S}_l \times \mathrm{S}_m$ в группу S_{lm}.

Определение 5. *Периодическое вложение группы* S_l *в* S_{lm} *– сопоставление всякой перестановке* $u \in \mathrm{S}_l$ *перестановки* $u \sqcap \mathrm{id}_{\underline{m}} \in \mathrm{S}_{lm}$.

Из свойств операции $\sqcap$ следует, что периодическое вложение – мономорфизм групп. Далее, упорядочивая множество $\mathbb{N}$ по отношению делимости, мы получаем, что группы S_n, $n \in \mathbb{N}$, образуют индуктивное семейство относительно периодических вложений.

Предложение 2. *Группа* R *является индуктивным пределом групп* S_n, $n \in \mathbb{N}$, *относительно периодических вложений.*

Доказательство. Группа S_n вкладывается в группу R следующим образом: перестановке $u \in \mathrm{S}_n$ сопоставляется рациональное перекладывание g, переставляющее полуинтервалы $[0, \frac{1}{n}), \dots, [\frac{n-1}{n}, 1)$ в соответствии с действием u (отсюда $g(x) = \frac{u(\lfloor xn \rfloor)}{n} + \frac{\{xn\}}{n}$ для всякого $x \in [0,1)$). Так реализуются все элементы группы R в силу того, что произвольное разбиение отрезка на полуинтервалы с рациональными концами можно измельчить до разбиения на полуинтервалы равной длины. Наконец, эти вложения согласованы с периодическими вложениями групп S_n, $n \in \mathbb{N}$, что завершает доказательство. $\square$

Применяя к группе R как к индуктивному пределу симметрических групп общую теорию, изложенную в разделе 1, мы получаем, что ее K_0-функтор есть индуктивный предел K_0-функторов групп S_n, $n \in \mathbb{N}$, относительно вложений, определяемых с помощью периодических вложений этих групп. Данное описание эквивалентно тому, что $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ есть фактор абелевой группы $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_n)$ по подгруппе, порожденной элементами $\pi - \mathrm{ind}_{\mathrm{S}_l}^{\mathrm{S}_{lm}}(\pi)$ для всех $l, m \in \mathbb{N}$ и $\pi \in \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_l)$ (здесь мы считаем, что S_l вкладывается в S_{lm} периодически).

Определение 6. *Внешнее произведение* $\pi \boxtimes \rho \in \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_{lm})$, *определяемое операцией прямого произведения перестановок, представлений* $\pi \in \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_l)$ *и* $\rho \in \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_m)$ *– представление* $\mathrm{ind}_{\mathrm{S}_l \times \mathrm{S}_m}^{\mathrm{S}_{lm}}(\pi \otimes \rho)$ *(здесь мы считаем, что* $\mathrm{S}_l \times \mathrm{S}_m$ *вкладывается в* S_{lm} *при помощи операции* $\sqcap$*).*

Легко проверить, что продолжение по линейности операции $\boxtimes$ на абелеву группу $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_n)$ определяет на ней структуру ассоциативного коммутативного кольца с единицей.

Непосредственно проверяется, что $\mathrm{ind}_{\mathrm{S}_l}^{\mathrm{S}_{lm}}(\pi) = \pi \boxtimes \mathrm{reg}_m$ для всех $l, m \in \mathbb{N}$ и $\pi \in \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_l)$ (reg_m – регулярное представление группы S_m) и, значит, описанная выше подгруппа кольца $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_n)$ является его идеалом, порожденным (как идеал) элементами $\mathrm{reg}_1 - \mathrm{reg}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Итак, мы получаем, что на факторе группы $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_n)$ по этой подгруппе, то есть на $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$, задано ассоциативное и коммутативное фактор-умножение $\boxtimes$, превращающее его в кольцо Рисса.

Теорема 1. *Пусть* τ *– след на* K_0*-функторе группы* R*; тогда* τ *неразложим, если и только если* τ *– комплексный характер кольца* $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$*, то есть гомоморфизм колец с единицей между* $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ *и* $\mathbb{C}$*.*

Доказательство. Это утверждение – частный случай общего критерия неразложимости следов на кольце Рисса, доказанного в аналогичных ситуациях в гл. 14 книги [7] и в п. 3.1 статьи [8]. □

3. Полукольцо разбиений и описание $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ в терминах симметрических функций

В этом разделе определена структура полукольца на множестве разбиений неотрицательных целых чисел (это множество мы обозначим через $\mathcal{P}$ по первой букве слова “partition”) и построен изоморфизм колец между K_0-функтором группы R и фактор-кольцом абелевой группы симметрических функций, умножение в которой продолжает умножение на множестве непустых разбиений.

Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множество неотрицательных целых чисел. Пусть $[\lambda_1, \ldots, \lambda_r] \in \mathcal{P}$ – разбиение числа $\lambda_1 + \ldots + \lambda_r \in \mathbb{N}_0$ на слагаемые $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ для всяких $r \in \mathbb{N}_0$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{N}$. И, наконец, пусть $\mathcal{P}^\times = \mathcal{P} \setminus \{[\,]\}$ – множество непустых разбиений.

Известно, что разбиения параметризуют классы сопряженных элементов в симметрических группах, поэтому операции на множестве $\mathcal{P}$ можно определить как фактор-операции таких заданных на группах S_n, $n \in \mathbb{N}_0$, операций, что класс сопряженности результата их применения к данным перестановкам не зависит от замены этих перестановок на сопряженные. Такими операциями являются операции прямой суммы и прямого произведения перестановок.

Пусть l и m – целые неотрицательные числа.

Определение 7. *Прямая сумма $u \sqcup v \in \mathrm{S}_{l+m}$ перестановок $u \in \mathrm{S}_l$ и $v \in \mathrm{S}_m$ – перестановка, определенная для всякого $z \in \underline{l+m}$ по формуле $u \sqcup v(z) = u(z)$, $z < l$, и $u \sqcup v(z) = v(z-l) + l$, $l \leqslant z$.*

Прямая сумма перестановок с точностью до изоморфизма есть прямая сумма автоморфизмов в категории множеств $\underline{n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, и отображений между ними. Аналогично прямому произведению, прямая сумма ассоциативна и является гомоморфизмом групп как отображение из $\mathrm{S}_l \times \mathrm{S}_m$ в S_{l+m}. Кроме того, операция $\sqcap$ дистрибутивна справа и дистрибутивна слева с точностью до сопряжения относительно операции $\sqcup$, то есть $(u \sqcup v) \sqcap w = (u \sqcap w) \sqcup (v \sqcap w)$ и $u \sqcap (v \sqcup w)$ сопряжено с $(u \sqcap v) \sqcup (u \sqcap w)$ для всех $u \in \mathrm{S}_l$, $v \in \mathrm{S}_m$ и $w \in \mathrm{S}_n$.

Операция прямой суммы фактически является операцией на классах сопряженности, и, значит, она определяет фактор-операцию на множестве $\mathcal{P}$, которую мы обозначим через $+$ и относительно которой $\mathcal{P}$ – коммутативный моноид. Таким же образом операция прямого произведения определяет фактор-операцию на множестве $\mathcal{P}^\times$, которую мы обозначим через $\cdot$ и относительно которой $\mathcal{P}^\times$ – коммутативный моноид. Продолжим эту операцию с $\mathcal{P}^\times$ на $\mathcal{P}$, полагая, что $[\,] \cdot \lambda = [\,]$ для любых $\lambda \in \mathcal{P}$. Как легко проверить, тогда мы получим, что умножение на $\mathcal{P}$ билинейно относительно сложения.

Определение 8. *Полукольцо*[2] *разбиений $\mathcal{P}$ есть множество разбиений $\mathcal{P}$ с определенными выше сложением и умножением. Это ассоциативное коммутативное полукольцо с единицей, равной* [1].

---

[2] *Полукольцо* – коммутативный моноид (но, вообще говоря, не группа) по сложению, в котором также задано билинейное умножение.

Сложение в $\mathcal{P}$ является объединением разбиений, и, значит, $\mathcal{P}$ – свободный коммутативный моноид относительно сложения с базисом $\{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ (его элементы соответствуют классам сопряженности длинных циклов, то есть одноцикловых перестановок), поэтому умножение в $\mathcal{P}$ достаточно описать только на этом базисе.

Предложение 3. $[l][m] = \gcd(l,m)[\operatorname{lcm}(l,m)]$ *для всех* $l, m \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Пусть $u \in \mathrm{S}_l$ и $v \in \mathrm{S}_m$ – длинные циклы длин l и m соответственно. Тогда нам нужно проверить, что $u \sqcap v \in \mathrm{S}_{lm}$ – произведение циклов длины $\operatorname{lcm}(l,m)$, то есть что порядок орбиты любой точки $z \in \underline{lm}$ под действием $u \sqcap v$ есть $\operatorname{lcm}(l,m)$ (циклов длины $\operatorname{lcm}(l,m)$ в $u \sqcap v$ будет ровно $\frac{lm}{\operatorname{lcm}(l,m)} = \gcd(l,m)$ штук).

Пусть $a = z \operatorname{div} m \in \underline{l}$, $b = z \bmod m \in \underline{m}$ и $d \in \mathbb{N}$, тогда

$$(u \sqcap v)^d(z) = u^d \sqcap v^d(z) = m\,(a+d) \bmod l + (b+d) \bmod m.$$

Отсюда видно, что условие $(u \sqcap v)^d(z) = z$ равносильно тому, что $(a+d) \bmod l = a$ и $(b+d) \bmod m = b$. Это означает, что $l \mid d$ и $m \mid d$ и тогда $\operatorname{lcm}(l,m) \mid d$. Таким образом, мы получаем, что порядок орбиты любой точки z под действием перестановки $u \sqcap v$, по определению равный $\min\{d \in \mathbb{N} \mid (u \sqcap v)^d(z) = z\}$, есть $\operatorname{lcm}(l,m)$. $\square$

Пусть Λ – абелева группа симметрических функций от бесконечного числа переменных. Пусть $p_n \in \Lambda$ – n-я степенная сумма для любого $n \in \mathbb{N}$, а $p_\lambda = p_{\lambda_1} \cdot \ldots \cdot p_{\lambda_r}$ для любого $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_r] \in \mathcal{P}^\times$.

Каждая симметрическая функция однозначно представляется в виде многочлена с рациональными коэффициентами от степенных сумм, поэтому группа Λ вкладывается в пространство многочленов $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$. Множество $\{1\} \cup \{p_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}^\times\}$ – базис этого пространства; множество $\{p_\lambda \mid \lambda \in \mathcal{P}^\times\}$ – базис пространства, в которое вкладывается абелева группа $\Lambda^\times$ симметрических функций без свободного члена. Отсюда следует, что умножение в $\mathcal{P}^\times$ продолжается по линейности до умножения в $\Lambda^\times$, которое мы обозначим через $\times$ и относительно которого $\Lambda^\times$ – ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, равной p_1. При этом описанное вложение абелевых групп становится вложением кольца $\Lambda^\times$ в моноидное кольцо $\mathbb{Q}[\mathcal{P}^\times]$.

Определение 9. *Характеристическое отображение* ch *– гомоморфизм абелевых групп из* $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_n)$ *в* $\Lambda^\times$*, определенный по формуле* $\operatorname{ch}(\pi) = \frac{1}{n!}\sum_{u\in\mathrm{S}_n} \chi_\pi(u) p_{\kappa(u)}$ *для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $\pi \in \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_n)$ *(здесь и далее разбиение* $\kappa(u)$ *есть цикловый тип перестановки* u*).*

Теорема 2. *Характеристическое отображение* ch *является изоморфизмом колец с единицей между кольцом* $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_n)$ *с умножением* $\boxtimes$ *и кольцом* $\Lambda^\times$ *с определенным выше умножением* $\times$.

Доказательство. Биективность отображения ch – нетривиальный факт, доказанный в § 7 гл. 1 книги [6]. Гомоморфность характеристического отображения относительно умножений $\boxtimes$ и $\times$ проверяется аналогично тому, как там же доказана его гомоморфность относительно "произведения-индуцирования" представлений (или, в нашей терминологии, внешнего произведения представлений, определяемого операцией $\sqcup$) и обычного умножения в кольце Λ. $\square$

Следствие. *Кольцо* $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ *изоморфно фактор-кольцу кольца* $\Lambda^\times$ *по идеалу, порожденному элементами* $p_1 - p_1^n$ *для всех* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Как было доказано в разделе 2, $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ является фактором кольца $\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{K}_0(\mathrm{S}_n)$ по идеалу, порожденному элементами $\mathrm{reg}_1 - \mathrm{reg}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Как легко проверить, $\mathrm{ch}(\mathrm{reg}_n) = p_1^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, поэтому изоморфизм ch переводит это фактор-кольцо в фактор кольца $\Lambda^\times$ по требуемому илеалу. $\square$

4. Континуум характеров и счетная серия неразложимых следов на $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$

В этом разделе, используя естественные изоморфизмы между пространствами гомоморфизмов на $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$, однородных функций на $\mathcal{P}^\times$ и центральных функций на R, мы описываем континуум характеров кольца $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ и счетную серию неразложимых следов на нем.

Пусть $\mathcal{X}(\mathrm{K}_0(\mathrm{R}))$ есть множество комплексных характеров кольца $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$, а $\mathcal{X}_{\mathrm{hg}}(\mathcal{P}^\times)$ – множество комплексных однородных характеров моноида $\mathcal{P}^\times$, то есть таких гомоморфизмов моноидов по умножению $\chi\colon \mathcal{P}^\times \to \mathbb{C}$, что $\chi(n\lambda) = \chi(\lambda)$ для всех $n \in \mathbb{N}$ и $\lambda \in \mathcal{P}^\times$.

Предложение 4. *Между пространствами комплексных гомоморфизмов на* $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ *и комплексных однородных функций на* $\mathcal{P}^\times$, *наделенными слабой топологией, имеется изоморфизм топологических векторных пространств, одновременно устанавливающий гомеоморфизм между множествами* $\mathcal{X}(\mathrm{K}_0(\mathrm{R}))$ *и* $\mathcal{X}_{\mathrm{hg}}(\mathcal{P}^\times)$.

Доказательство. Заметим, что следствие из теоремы 2 влечет то, что гомоморфизмы на $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ находятся в естественном взаимнооднозначном соответствии с гомоморфизмами на $\Lambda^\times$, обращающимися в 0 на указанном в этом следствии идеале кольца $\Lambda^\times$.

Вложение кольца $\Lambda^\times$ в $\mathbb{Q}[\mathcal{P}^\times]$ таково, что любой гомоморфизм на $\Lambda^\times$ однозначно определяется своим сужением на моноид $\mathcal{P}^\times$ (базис $\mathbb{Q}[\mathcal{P}^\times]$), и это сужение может быть любой функцией на $\mathcal{P}^\times$.

При этом ясно, что условия обращения в 0 на указанном идеале и однородности, как и условия мультипликативности, для гомоморфизма на $\Lambda^\times$ и его сужения на $\mathcal{P}^\times$ равносильны. □

Совместно используя предложения 2 и 4, мы получаем непрерывные изоморфизмы между пространством гомоморфизмов на $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ и пространствами центральных функций на R и однородных функций на $\mathcal{P}^\times$ соответственно. Непосредственно проверяется, что сквозной изоморфизм является естественной биекцией между центральными функциями на группе $\mathrm{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{S}_n$, то есть функциями на ее классах сопряженности, и однородными функциями на множестве $\mathcal{P}^\times$, то есть функциями на разбиениях натуральных чисел.

Согласно теореме 1, неразложимые следы на $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ являются характерами этого кольца. Как было доказано выше, характерам кольца $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ соответствуют однородные характеры моноида $\mathcal{P}^\times$. Далее мы явно опишем континуальное множество этих характеров.

Пусть N – обобщенное натуральное число, то есть N – функция на множестве простых чисел со значениями в $\mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Умножение таких чисел есть поточечное сложение функций. Ясно, что оно продолжает умножение обычных натуральных чисел.

Определение 10. *Характер χ_N моноида $\mathcal{P}^\times$ – функция, определенная по формуле $\chi_N\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n[n]\right) = \sum_{n\,|\,N} a_n n$ для всякого разбиения $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n[n] \in \mathcal{P}^\times$ (в этой записи мы воспользовались разложением по базису $\{[n] \mid n \in \mathbb{N}\}$ в полукольце разбиений $\mathcal{P}$).*

Предложениие 5. *Функции χ_N действительно суть характеры моноида $\mathcal{P}^\times$ для всех обобщенных натуральных чисел N.*

Доказательство. Мультипликативность функций χ_N непосредственно следует из формулы, доказанной в предложении 3. □

Очевидно, что множество характеров моноида $\mathcal{P}^\times$ замкнуто относительно поточечного умножения и предельного перехода, поэтому всевозможные произведения и пределы характеров χ_N также суть характеры моноида $\mathcal{P}^\times$. При этом его однородными характерами являются произведения характеров χ_N с нулевой суммарной степенью. Легко видеть, что они образуют несчетное множество.

Таким образом, мы описали континуум характеров кольца $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$. Какие из этих характеров неотрицательны и, значит, являются неразложимыми следами на $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$? В настоящее время это открытый вопрос. Оставляя его в стороне, ниже мы доказываем неотрицательность элементов одной счетной серии этих характеров.

Пусть $N = 1$ (то есть N – функция, тождественно равная 0); значение характера χ_1 на $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n[n]$ равно a_1. Пусть $N = \infty$ (то есть N – функция, тождественно равная ∞); значение характера χ_∞ на $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n[n]$ равно $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n n$. Пусть $\chi_{1/\infty}$ есть отношение $\chi_1\chi_\infty^{-1}$ этих характеров; это однородный характер моноида $\mathcal{P}^\times$.

Пусть λ – стандартная мера Лебега на отрезке.

Определение 11. *Натуральный характер* χ_{nat} *группы* R *задан по формуле* $\chi_{\mathrm{nat}}(g) = \lambda(\{x \in [0,1) \mid g(x) = x\})$ *для любого* $g \in \mathrm{R}$.

Предложение 6. $\chi_{\mathrm{nat}}^k \in \mathcal{X}(\mathrm{R})$ *для всех* $k \in \mathbb{N} \cup \{0,\infty\}$.

Доказательство. Ясно, что $\chi_{\mathrm{nat}}^0 = 1$ – единичный характер группы R, а $\chi_{\mathrm{nat}}^\infty = \delta_{\mathrm{id}}$ – характер ее регулярного представления.

Пусть $k, n \in \mathbb{N}$; вычислим значение функции χ_{nat}^k на перестановке $u \in \mathrm{S}_n$, действующей на $[0,1)$ по формуле из предложения 3:

$$\chi_{\mathrm{nat}}^k(u) = \lambda(\{x \in [0,1) \mid \frac{u(\lfloor xn\rfloor)}{n} + \frac{\{xn\}}{n} = x\})^k =$$
$$= \lambda(\{x \in [0,1) \mid u(\lfloor xn\rfloor) = \lfloor xn\rfloor\})^k = \frac{|\{i \in \underline{n} \mid u(i) = i\}|^k}{n^k}.$$

Отсюда мы получаем, что сужение функции χ_{nat}^k на группу S_n как подгруппу в $\mathrm{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{S}_n$ есть нормированный характер k-й тензорной степени натурального представления группы S_n, то есть элемент $\mathcal{X}(\mathrm{S}_n)$, и, значит, в целом функция χ_{nat}^k – характер группы R. □

Предложение 7. *Для любого* $k \in \mathbb{N} \cup \{0,\infty\}$ *однородной функции* $\chi_{1/\infty}^k$ *на* $\mathcal{P}^\times$ *соответствует центральная функция* χ_{nat}^k *на* R.

Доказательство. Снова используя предложение 3, для $n \in \mathbb{N}$ рассмотрим $u \in \mathrm{S}_n$ как элемент группы R; пусть $\kappa(u) = \sum_{l\in\mathbb{N}} a_l[l] \in \mathcal{P}^\times$ (то есть a_l есть число циклов длины l в u). Тогда мы имеем

$$\chi_{1/\infty}^k(\kappa(u)) = \frac{a_1^k}{\left(\sum_{l\in\mathbb{N}} a_l l\right)^k} = \frac{|\{i \in \underline{n} \mid u(i) = i\}|^k}{n^k} = \chi_{\mathrm{nat}}^k(u).$$

Полученная формула означает требуемое утверждение. $\square$

Наконец, для любого $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ обозначим гомоморфизм на $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$, соответствующий центральной функции χ^k_{nat} на R и одновременно однородной функции $\chi^k_{1/\infty}$ на $\mathcal{P}^\times$, через τ^k_{nat} (здесь параметр k уже не имеет смысла степени). Тогда $\tau^k_{\mathrm{nat}} \in \mathcal{T}(\mathrm{K}_0(\mathrm{R})) \cap \mathcal{X}(\mathrm{K}_0(\mathrm{R}))$, так как $\chi^k_{\mathrm{nat}} \in \mathcal{X}(\mathrm{R})$ и $\chi^k_{1/\infty} \in \mathcal{X}_{\mathrm{hg}}(\mathcal{P}^\times)$. По теореме 1 отсюда следует, что $\tau^k_{\mathrm{nat}} \in \operatorname{ex}\mathcal{T}(\mathrm{K}_0(\mathrm{R}))$ и, значит, $\chi^k_{\mathrm{nat}} \in \operatorname{ex}\mathcal{X}(\mathrm{R})$. Таким образом, мы построили счетные серии неразложимых следов на $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$ и неразложимых характеров группы R соответственно.

5. Свойства неразложимых характеров группы R

В этом разделе мы исследуем некоторые свойства неразложимых характеров группы R, на основании которых далее мы высказываем несколько гипотез об их общем описании.

Предложение 8. *Любой неразложимый характер группы* R *равен* 0 *или* 1 *на длинных циклах как элементах группы* R.

Доказательство. Пусть χ есть неразложимый характер группы R; обозначим также через χ соответствующий однородный характер моноида $\mathcal{P}^\times$. Тогда по предложению 3 для любого $n \in \mathbb{N}$ мы получаем $\chi([n])^2 = \chi([n]^2) = \chi(n[n]) = \chi([n])$, откуда $\chi([n]) \in \{0, 1\}$. $\square$

Лемма. *Если значения неразложимого характера группы* R *на всех длинных циклах, образующих некоторую перестановку, равны* 1, *то его значение на данной перестановке также равно* 1.

Доказательство. Пусть χ – такой неразложимый характер группы R, что $\chi([\lambda_1]) = \ldots = \chi([\lambda_r]) = 1$, где $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_r] \in \mathcal{P}^\times$; докажем, что $\chi(\lambda) = 1$. Пусть $t = \operatorname{lcm}(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$, тогда, по предложению 3,

$$[\lambda_1] \cdot \ldots \cdot [\lambda_r] = \frac{\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_r}{t}\,[t].$$

Из данной формулы следует, что $\chi([\lambda_1]) \cdot \ldots \cdot \chi([\lambda_r]) = \chi([t])$, поэтому если $\chi([\lambda_1]) = \ldots = \chi([\lambda_r]) = 1$, то $\chi([t]) = 1$. Далее,

$$\lambda[t] = \Big(\sum_{i=1}^r [\lambda_i]\Big)[t] = \sum_{i=1}^r [\lambda_i][t] = \sum_{i=1}^r \lambda_i [t] = \Big(\sum_{i=1}^r \lambda_i\Big)[t].$$

Отсюда $\chi(\lambda)\chi([t]) = \chi([t])$, и, значит, $\chi(\lambda) = 1$, если $\chi([t]) = 1$. $\square$

Теорема 3. *Любой неразложимый характер группы* R*, отличный от единичного, равен* 0 *на цикле* (0 1) *как элементе группы* R.

Доказательство. Пусть χ – такой неразложимый характер группы R, что $\chi([2]) \neq 0$ и, значит, в силу предложения 8, $\chi([2]) = 1$. Проверим, что тогда χ – единичный характер, что равносильно тому, что его ограничения на все подгруппы S_n, $n \in \mathbb{N}$, образующие группу $\mathrm{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{S}_n$, – единичные характеры. Воспользуемся индукцией по числу n. Если $n \in \{1, 2\}$, то требуемое утверждение следует из того, что $\chi([1]) = \chi([2]) = 1$. Проверим, что ограничение характера χ на подгруппу S_n группы R при $n \geqslant 3$ – единичный характер, предполагая, что это выполнено для его ограничений на все симметрические подгруппы степени меньше n, образующие группу R.

Пусть $\lambda = [\lambda_1, \ldots, \lambda_r]$, где $r \geqslant 2$, – разбиение числа n; тогда классы сопряженности $[\lambda_1], \ldots, [\lambda_r]$ лежат в симметрических группах степени меньше n и, значит, $\chi([\lambda_1]) = \ldots = \chi([\lambda_r]) = 1$ по предположению индукции. Отсюда $\chi(\lambda) = 1$ по лемме, то есть значения характера χ на всех элементах группы S_n, отличных от длинных циклов, равны 1. Для завершения доказательства проверим, что $\chi([n]) = 1$, используя неотрицательную определенность функции χ.

Если допустить, что $\chi([n]) \neq 1$, то $\chi([n]) = 0$ по предложению 8 и, таким образом, характер χ равен 0 на длинных циклах и 1 на остальных элементах подгруппы S_n. Докажем, что тогда соответствующий χ гомоморфизм τ на $\mathrm{K}_0(\mathrm{R})$, определенный в предложении 1, не является неотрицательным, указав такое неприводимое представление π группы S_n, что $\tau(\pi) \notin [0, +\infty)$. Заметим, что по первому соотношению ортогональности для всякого неприводимого представления π группы S_n, отличного от единичного, выполнены равенства

$$\overline{\tau(\pi)} = \frac{1}{n!} \sum_{u \in \mathrm{S}_n} \overline{\chi(u)} \chi_\pi(u) =$$
$$= \frac{1}{n!} \sum_{u \in \mathrm{S}_n} \chi_\pi(u) - \frac{1}{n!} \sum_{\substack{u \text{ – длин-} \\ \text{ный цикл}}} \chi_\pi(u) = -\frac{1}{n} \chi_\pi\big((0\,1\,\ldots\,n-1)\big).$$

Отсюда видно, что для данного $n \geqslant 3$ нам достаточно указать такое неединичное неприводимое представление π группы S_n, что его характер принимает положительное значение на цикле $(0\,1\,\ldots\,n-1)$. Если n – нечетное, то таким представлением является представление знаком; если n – четное, то таким представлением является тензорное произведение представления знаком и $(n-1)$-мерной неприводимой компоненты натурального представления. В итоге мы получаем, что наше предположение неверно и, таким образом, $\chi([n]) = 1$. $\square$

Можно доказать (это доказательство технически сложнее, поэтому мы его опустим), что любой неединичный неразложимый характер группы R равен 0 также на длинных циклах длин 3 и 5.

Следствие. *Любой неединичный неразложимый характер группы* R *равен* 0 *на перестановках, состоящих из циклов четной длины.*

Доказательство. Пусть χ – неединичный неразложимый характер группы R (и соответствующий однородный характер моноида $\mathcal{P}^{\times}$), а λ – разбиение, состоящее из четных чисел. Тогда $[2]\lambda = 2\lambda$ и, значит, $\chi(\lambda) = \chi(2\lambda) = \chi([2]\lambda) = \chi([2])\chi(\lambda) = 0$. $\square$

Ясно, что это доказательство не зависит от того, какой именно общий делитель длин циклов в данной перестановке мы рассматриваем, поэтому мы получаем следующий факт: если длины циклов перестановки u делятся на число d, где $d \in \{2, 3, 5\}$, то любой неединичный неразложимый характер группы R обращается в 0 на u. Наша первая гипотеза состоит в том, что это верно для всех $d \geqslant 2$.

Далее можно рассмотреть более широкое множество перестановок без циклов длины 1 (им соответствуют рациональные перекладывания отрезка без неподвижных точек) и сформулировать более общую гипотезу о том, что каждый неединичный неразложимый характер группы R обращается в 0 на всех таких перестановках.

Наконец, наша самая сильная гипотеза состоит в том, что значения неразложимых характеров группы R вообще не зависят от циклов неединичной длины, поэтому все эти характеры суть описанные в разделе 4 степени натурального характера χ_{nat} группы R.

Литература

1. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Характеры и фактор-представления бесконечной симметрической группы.* — ДАН СССР **257**, вып. 5 (1981), 1037–1040.
2. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Характеры и фактор-представления бесконечной унитарной группы.* — ДАН СССР **267**, вып. 2 (1982), 272–276.
3. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Локально полупростые алгебры. Комбинаторная теория и* K_0*-функтор.* — В кн.: Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Новейшие достижения **26**. М., ВИНИТИ (1985), сс. 3–56.
4. А. М. Вершик, К. П. Кохась, *Вычисление группы Гротендика алгебры* $\mathbb{C}(\mathrm{PSL}(2, k))$*, где* k *– счетное алгебраически замкнутое поле.* — Алгебра и анализ **2**, вып. 6 (1990), 98–106.

5. К. П. Кохась, *Классификация комплексных фактор-представлений трехмерной группы Гейзенберга над счетным полем конечной характеристики.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **283** (2001), 140–155.
6. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла.* М., Мир (1985).
7. Р. Фелпс, *Лекции о теоремах Шоке.* М., Мир (1968).
8. A. M. Vershik, S. V. Kerov, *The Grothendieck group of the infinite symmetric group and symmetric functions (with the elements of the theory of* K_0*-functor of* AF*-algebras).* — In: Representation of Lie Groups and Related Topics (Adv. Stud. Contemp. Math. **7**). Gordon and Breach, New York (1990), pp. 39–117.
9. H.-L. Skudlarek, *Die unzerlegbaren Charaktere einiger diskreter Gruppen.* — Math. Ann. **223** (1976), 213–231.

Goryachko E. E. The K_0-functor and characters of the group of rational rearrangements of the segment.

We investigate the K_0-functor and characters of the group of rational rearrangements of the segment using a description of this group as the inductive limit of the symmetric groups with respect to the periodic embeddings.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: eugene@pdmi.ras.ru

Поступило 5 декабря 2008 г.