Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 360, 2008 г.

В. Е. Горин

НЕСТАЛКИВАЮЩИЕСЯ ДИФФУЗИИ ЯКОБИ КАК ПРЕДЕЛ МАРКОВСКИХ ЦЕПЕЙ НА ГРАФЕ ГЕЛЬФАНДА–ЦЕТЛИНА

Введение

Сюжет данной работы возник из задачи гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе. При разложении естественных представлений группы $U(\infty)$ на неприводимые появляется семейство вероятностных мер $\{P_{z,w}\}$, зависящих от двух параметров z и w. Эти меры определены на некотором бесконечномерном пространстве Ω. Более того, оказывается, что определение мер можно расширить до еще большего множества параметров. В соответствии с этим мы будем использовать четыре индекса z, w, z', w' вместо двух.

Меры $P_{z,w}$ и $P_{z,w,z',w'}$ были впервые обнаружены и изучены в работах [17] и [1]. Нашей целью является построение и исследование стохастической динамики, связанной с мерами $P_{z,w,z',w'}$.

Структура мер $P_{z,w,z',w'}$ существенно зависит от того, являются ли параметры целыми или нет. Мы рассматриваем первый случай, параметры z и w будут целыми числами. Обозначим эти два целых числа p и q соответственно. В нашем случае носитель мер является конечномерным подпространством в Ω и может быть отождествлен с $\mathcal{X} = [0,1]^{p+q+1}$. Вероятностные распределения $P_{p,q,z',w'}$ были явно описаны в статье [1]. Они задаются ортогональным полиномиальным ансамблем Якоби с некоторыми параметрами.

Мы строим семейство $J_{p,q,z',w'}(t)$ стационарных марковских процессов в пространстве $\mathcal{X}$. Каждая из мер $P_{p,q,z',w'}$ является инвариантным распределением соответствующего $J_{p,q,z',w'}(t)$. Сами случайные процессы $J_{p,q,z',w'}(t)$ получаются как пределы некоторых марковских цепей на графе Гельфанда–Цетлина. Эти марковские цепи возникают естественным образом при аппроксимации бесконечномерной унитарной группы возрастающей цепочкой групп $U(N)$. Мы будем называть подобные цепи цепями “вверх-вниз”. Аналогичные марковские цепи уже появлялись ранее, их изучением занимались Фулман

[6, 7], Бородин и Ольшанский [2], Петров [18].

Доказательство сходимости изучаемых марковских цепей на графе Гельфанда–Цетлина основывается на специальном детерминантном представлении их переходных вероятностей. Сходимость переходных вероятностей удается свести к сходимости некоторых матриц. Нахождение предела этих матриц облегчается тем фактом, что нам удается их диагонализовать.

Как выясняется, предельный марковский процесс $J_{p,q,z',w'}(t)$ обладает некоторыми интересными свойствами. Можно доказать, что $J_{p,q,z',w'}(t)$ является динамически-детерминантным точечным процессом. Это означает, что его динамические (пространственно-временные) корреляционные функции имеют детерминантный вид и могут быть выражены как миноры матрицы, задающейся некоторым расширенным ядром.

Также будет объяснено, что процесс $J_{p,q,z',w'}(t)$ может быть отождествлен с h-преобразованием Дуба $p+q+1$ независимых случайных блужданий на отрезке $[0,1]$.

Мы полностью описываем процессы $J_{p,q,z',w'}(t)$, подсчитываем их переходные вероятности и выписываем генераторы и собственные функции марковских полугрупп, отвечающих этим процессам.

При решении задач, связанных с гармоническим анализом на бесконечномерной унитарной группе, была обнаружена тесная связь с бесконечной симметрической группой $S(\infty)$ (см. [12] и [1, Introduction, Part (m)]). Построения настоящей работы во многом схожи с построениями статьи [2], где была изучена динамика, связанная с группой $S(\infty)$.

Оказалось, что марковские цепи, изучаемые в нашей работе, весьма похожи на марковские цепи, исследованные в статье [8]. Мы пользуемся некоторыми идеями и формулами из [8].

Хочется обратить внимание на то, что, хотя в случае целых параметров все изучаемые процессы определены на конечномерном пространстве, в случае более общих значений параметров пространство уже становится бесконечномерным. Таким образом, наш случай может рассматриваться как некоторое вырождение общего. Задача построения динамики для нецелых значений параметров остается нерешенной; видимо, для этого случая необходимо будет использовать иную аргументацию.

Статья организована следующим образом. В первых четырех разделах мы проводим подготовительную работу: в разделе 1 вводятся марковские цепи, связанные с графом Гельфанда–Цетлина; в разделе 2 мы описываем меры $P_{z,w,z',w'}$ и формулируем решаемую задачу; в разделе 3 изучаются основные свойства исследуемых марковских цепей; наконец, в разделе 4 мы выражаем переходные вероятности марковских цепей в детерминантном виде, который удобен для совершения предельных переходов.

В разделе 5 формулируются и доказываются основные результаты статьи. Мы доказываем существование предельного процесса, вычисляем его одномерные распределения и переходные вероятности (см. теорему 5.1). Детерминантная форма переходных вероятностей гарантирует свойство детерминантности для предельных марковских процессов (см. предложение 5.5).

В разделе 6 изучаются марковские полугруппы, отвечающие построенным процессам. Будут подсчитаны их собственные функции и собственные значения (см. теорему 6.1); это позволит нам затем найти простое выражение для генераторов полугрупп (см. теорему 6.4).

В разделе 7 объясняется связь между нашими процессами и h-преобразованием Дуба.

Автор благодарен Г. И. Ольшанскому за постановку задачи и многочисленные плодотворные обсуждения.

Во время написания работы автор был поддержан Фондом поддержки математики им. Леонарда Эйлера и Фондом поддержки молодых ученых "Конкурс Мебиуса".

1. Марковские цепи на графе Гельфанда–Цетлина

В этом разделе вводятся марковские цепи, изучаемые в работе.

Граф Гельфанда–Цетлина $\mathbb{GT}$ (также называемый графом сигнатур) – это градуированный граф, вершинами которого являются так называемые *сигнатуры*. N-й этаж графа, обозначаемый $\mathbb{GT}_N$, состоит из наборов N целых чисел $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \dots \geqslant \lambda_N)$, которые называются сигнатурами порядка N. Мы соединяем две сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\mu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ ребром и пишем $\lambda \prec \mu$, если

$$\mu_1 \geqslant \lambda_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_N \geqslant \mu_{N+1}.$$

Условимся считать, что $\mathbb{GT}_0$ состоит из единственного элемента – пустой сигнатуры $\emptyset$. Сигнатура $\emptyset$ соединена ребром с каждой сигнатурой из $\mathbb{GT}_1$.

Путем в графе Гельфанда–Цетлина называется последовательность вершин

$$\lambda(n) \prec \lambda(n+1) \prec \cdots \prec \lambda(m), \quad \lambda(i) \in \mathbb{GT}_i.$$

Обозначим через $\operatorname{Dim}(\lambda)$ количество путей, соединяющих $\emptyset$ и $\lambda \in \mathbb{GT}_N$.

Для сигнатур $\mu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ и $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ положим

$$p^{\downarrow}(\lambda \mid \mu) = \begin{cases} \operatorname{Dim}(\lambda)/\operatorname{Dim}(\mu), & \text{если } \lambda \prec \mu, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Понятно, что

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N : \lambda \prec \mu} p^{\downarrow}(\lambda \mid \mu) = 1.$$

Числа $p^{\downarrow}(\lambda \mid \mu)$ называются *копереходными вероятностями* или *переходной функцией “вниз”*.

Последовательность $\{M_N\}_{N=0,1,\dots}$, в которой каждая из M_N является вероятностной мерой на $\mathbb{GT}_N$, называется *когерентной системой распределений* в том случае, если для любого $N \geqslant 0$ меры M_{N+1} и M_N сохраняются при применении копереходных вероятностей с этажа $\mathbb{GT}_{N+1}$ на этаж $\mathbb{GT}_N$, иными словами,

$$\sum_{\mu \in \mathbb{GT}_{N+1}} p^{\downarrow}(\lambda \mid \mu) M_{N+1}(\mu) = M_N(\lambda) \qquad \text{для любой } \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

Определим *носитель* когерентной системы M как множество

$$\operatorname{supp}(M) = \{\lambda \in \mathbb{GT} : M(\lambda) \neq 0\} \subset \mathbb{GT},$$

где $M(\lambda)$ означает меру $M_N(\lambda)$ одноэлементного множества $\{\lambda\} \subset \mathbb{GT}_N$.

Если задана некоторая когерентная система распределений, то мы можем говорить и о *переходных вероятностях* или же *переходных функциях “вверх”*. Переходные вероятности $p^{\uparrow}(\mu|\lambda)$ определены для всех $\lambda \in \operatorname{supp}(M)$ по формуле

$$p^{\uparrow}(\mu \mid \lambda) = \frac{M_{N+1}(\mu)}{M_N(\lambda)} \cdot p^{\downarrow}(\lambda \mid \mu), \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N, \mu \in \mathbb{GT}_{N+1}, M_N(\lambda) \neq 0.$$

Любая когерентная система распределений $\{M_N\}$ определяет марковскую цепь $H(t)$, $t = 0, 1, \dots$, на пространстве состояний $\operatorname{supp}(M)$. Цепь $H(t)$ принимает значения в множестве $L_t = \mathbb{GT}_t \bigcap \operatorname{supp}(M)$, ее одномерные распределения задаются мерами M_t. Переходные вероятности цепи $H(t)$ – это в точности числа $p^{\uparrow}(\mu \mid \lambda)$:

$$\operatorname{Prob}\{H(t+1) = \mu \mid H(t) = \lambda\} = p^{\uparrow}(\mu \mid \lambda).$$

Обратим внимание на то, что, в то время как переходные вероятности цепи $H(t)$ зависят от выбора когерентной системы, копереходные вероятности $\operatorname{Prob}\{H(t) = \lambda \mid H(t+1) = \mu\}$ суть не что иное как величины $p^{\downarrow}(\lambda \mid \mu)$, и зависят они только от структуры графа Гельфанда–Цетлина.

Будем называть $H(t)$ *идущей вверх цепью*, отвечающей системе распределений $\{M_N\}$.

Определим также семейство стационарных марковских цепей $T_N(t)$, $N = 0, 1, \dots$. Пространством состояний цепи $T_N(t)$ является $L_N = \mathbb{GT}_N \bigcap \operatorname{supp}(M)$. Одномерное распределение цепи $T_N(t)$ задается мерой M_N, а переходные вероятности определяются как композиция переходных функций “вверх” и “вниз”: сначала из L_N в L_{N+1}, а затем обратно в L_N. Обозначим через $p_N^{st}(\lambda \mid \lambda')$ переходные вероятности цепи T_N. Справедлива формула

$$p_N^{st}(\lambda \mid \lambda') = \sum_{\mu \in L_{N+1}} p^{\downarrow}(\lambda \mid \mu) p^{\uparrow}(\mu \mid \lambda').$$

Будем называть $T_N(t)$ *цепью вверх-вниз на N-м этаже*, отвечающей системе распределений $\{M_N\}$.

В настоящей работе мы изучаем поведение цепей вверх-вниз, отвечающих некоторым когерентным системам, при $N \to \infty$.

Замечания. Приведенные выше определения имеют смысл не только для графа Гельфанда–Цетлина GT. Вершик и Керов в своих работах ввели переходные и копереходные вероятности для произвольных ветвящихся графов (см., например, [12, Section 9] и работы, упомянутые там). Таким образом, марковские цепи, аналогичные $H(t)$ и $T_N(t)$, могут быть определены для произвольных ветвящихся графов. Для графа Юнга цепи вверх-вниз недавно изучались Бородиным и Ольшанским в статье [2]. Последняя оказала большое влияние на нашу работу.

2. Меры $P_{z,w,z',w'}$ и построение предельного процесса

В статье [17] было введено 4-параметрическое семейство когерентных систем $M_N^{z,w,z',w'}$. Эти системы возникают естественным образом при решении задачи гармонического анализа на бесконечномерной унитарной группе. Они задаются следующими формулами:

$$M_N^{z,w,z',w'}(\lambda) = \big(S_N(z,w,z',w')\big)^{-1} \cdot \mathrm{Dim}^2(\lambda) \\ \times \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(z-\lambda_i+i)\Gamma(w+N+1+\lambda_i-i)\Gamma(z'-\lambda_i+i)\Gamma(w'+N+1+\lambda_i-i)},$$

где z, w, z', w' – комплексные числа, четверка (z,w,z',w') принадлежит множеству *допустимых значений* (см. [17, Definition 7.6]) а $S_N(z,w,z',w')$ является нормировочной константой

$$S_N(z,w,z',w') \\ = \prod_{i=1}^{N} \frac{\Gamma(z+w+z'+w'+i)}{\Gamma(z+w+i)\Gamma(z+w'+i)\Gamma(z'+w+i)\Gamma(z'+w'+i)\Gamma(i)}.$$

Предположим, что $z = k$ и $w = l$, где $k, l \in \mathbb{Z}$, $k + l \geqslant 0$. В работе [17] было показано, что (k,l,z',w') является четверкой допустимых значений, если параметры z' и w' вещественны, а кроме того, $z'-k > -1$, $w'-l > -1$.

Обратим внимание на то, что для любого целого n сдвиг

$$k \mapsto k+n, \quad l \mapsto l-n, \quad z' \mapsto z'+n, \quad w' \mapsto w'-n, \quad \lambda_i \mapsto \lambda_i + n$$

не меняет вероятностных распределений M_N. Это означает, что по сути когерентная система $\{M_N^{k,l,z',w'}\}$ зависит от трех, а не от четырех параметров. В соответствии с этим в дальнейшем мы будем считать, что $k = p \geqslant 0$ и $l = 0$; $z > p-1$ и $w > -1$.

Из определения меры $M_N^{p,0,z',w'}$ видно, что $\mathrm{supp}(M)$ состоит из сигнатур $\lambda \in \mathbb{GT}_N$, таких, что

$$p \geqslant \lambda_1 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_N \geqslant 0.$$

Мы будем все время неявно предполагать, что λ удовлетворяет этим неравенствам.

Положим $X_{N,p} = \{0, 1, \dots, N+p-1\}$. Заметим, что $0 \leqslant \lambda_i - i + N \leqslant N+p-1$. Поставим в соответствие сигнатуре λ набор $X(\lambda)$ различных точек из множества $X_{N,p}$ следующим образом:

$$X(\lambda) = X_{N,p} \setminus \{\lambda_1 - 1 + N, \lambda_2 - 2 + N, \dots, \lambda_N - N + N\}.$$

Понятно, что $|X(\lambda)| = p$ и $X(\lambda)$ однозначно определяет λ. Пусть

$$X(\lambda) = \{0 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_p \leqslant N + p - 1\}.$$

Замечание. Отображение $\lambda \mapsto X(\lambda)$ также может быть определено другим эквивалентным образом. Для начала отождествим λ с диаграммой Юнга. Длины строчек этой диаграммы – в точности числа λ_i. Затем рассмотрим транспонированную диаграмму и длины ее строчек (иными словами, рассмотрим высоты столбцов исходной диаграммы). Мы получим набор чисел

$$0 \leqslant \mu_1 \leqslant \mu_2 \leqslant \dots \leqslant \mu_p \leqslant N.$$

Наконец, положим $x_i = \mu_i + i - 1$. Эквивалентность этого определения приведенному выше доказана, например, в [15, (1.7)].

Мы будем работать с $X(\lambda)$ вместо λ по следующим причинам: во-первых, $|X(\lambda)| = p$, и, таким образом, $|X(\lambda)|$ не зависит от N. Следовательно, мы можем отождествить наборы $X(\lambda)$, отвечающие различным N, с элементами одного и того же фиксированного пространства. Во-вторых, оказывается, что переход к следующему этажу графа Гельфанда–Цетлина очень просто описывается именно при использовании интерпретации $X(\lambda)$. Это будет более подробно описано в дальнейшем.

Обозначим через $P_N^{p,z',w'}$ образ вероятностной меры $M_N^{p,0,z',w'}$ под действием отображения $\lambda \mapsto X(\lambda)$. Легко видеть, что P_N является вероятностной мерой на $(X_{N,p})^p$, а ее носитель есть

$$\operatorname{supp}(P_N) = \{(x_1, \dots, x_p) \in (X_{N,p})^p : x_1 < x_2 < \dots < x_p\}.$$

Для любого $N = 0, 1, 2 \dots$ множество $(X_{N,p})^p$ вкладывается в гиперкуб $\mathcal{X} = [0, 1]^p$ следующим образом:

$$\pi_N : (x_1, \dots, x_p) \mapsto \left(\frac{x_1}{N + p - 1}, \dots, \frac{x_p}{N + p - 1} \right).$$

Обозначим через $\tilde{P}_N^{p,z',w'}$ образ меры $P_N^{p,z',w'}$ при вложении π_N.

Предложение 2.1. *При* $N \to \infty$ *меры* $\tilde{P}_N^{p,z',w'}$ *слабо сходятся к некоторой мере* $\mu_{p,z',w'}$.

Мера $\mu_{p,z',w'}$ *может быть задана своей функцией плотности (относительно меры Лебега)* $\rho_{p,z',w'}$:

$$\rho_{p,z',w'}(x_1,\dots,x_p)$$
$$= \begin{cases} B_{p,z'w'} \cdot \prod\limits_{i<j}(x_i-x_j)^2 \prod\limits_{i=1}^{p} x_i^{w'}(1-x_i)^{z'-p}, & x_1 < x_2 <,\dots,< x_p, \\ 0 & \textit{иначе}, \end{cases}$$

где $B_{p,z'w'}$ *– нормировочная константа.*

Доказательство. В несколько видоизмененной версии это предложение было доказано в [1, Theorem 11.6]. Мы также в дальнейшем проведем выкладку, проверяющую это утверждение (см. предложение 5.2). $\square$

Цель нашей работы – построение стационарного случайного процесса, для которого $\mu^{p,z',w'}$ является инвариантной мерой. Этот процесс будет получен нами как предел марковских цепей вверх-вниз на графе Гельфанда–Цетлина.

Обозначим через $X_{p,z',w'}(t)$ образ идущего вверх марковского процесса $H(t)$, отвечающего когерентной системе $\{M_N^{p,0,z',w'}\}$, под действием отображения $\lambda \mapsto X(\lambda)$.

А через $U_{p,z',w'}^N(t)$ обозначим образ марковской цепи $T_N(t)$, отвечающей когерентной системе $\{M_N^{p,0,z',w'}\}$, под действием отображения $\lambda \mapsto X(\lambda)$.

Наконец, положим

$$J_{p,z',w'}^N(t) = \pi_N\left(U_{p,z',w'}^N\left(\lfloor t\cdot N^2\rfloor\right)\right).$$

Далее нами будет доказана следующая теорема:

Теорема 2.2. *Существует предельный стационарный марковский процесс* $J_{p,z',w'}(t)$ *на пространстве* $\mathcal{X}$. *Конечномерные распределения процессов* $J_{p,z',w'}^N(t)$ *сходятся при* $N \to \infty$ *к соответствующим конечномерным распределениям процесса* $J_{p,z',w'}(t)$.

Нами будут подсчитаны переходные вероятности процесса $J_{p,z',w'}(t)$ и соответствующий ему инфинитезимальный генератор.

3. Свойства марковских цепей $X_{p,z',w'}(t)$

В этом разделе мы подсчитываем одномерные распределения и переходные вероятности марковской цепи $X_{p,z',w'}(t)$. В дальнейшем мы будем опускать индексы и писать $X(t)$.

Напомним, что одномерные распределения процесса $X(t)$ в момент времени N задаются мерой $P_N^{p,z',w'}$, которая является образом меры $M_N^{p,0,z',w'}$ под действием отображения $\lambda \mapsto X(\lambda)$, и

$$M_N^{z,w,z',w'}(\lambda) = \big(S_N(z,w,z',w')\big)^{-1} \cdot \mathrm{Dim}^2(\lambda)$$
$$\times \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(z-\lambda_i+i)\Gamma(w+N+1+\lambda_i-i)\Gamma(z'-\lambda_i+i)\Gamma(w'+N+1+\lambda_i-i).}$$

По формуле Вейля для размерности (см., например, [21])

$$\mathrm{Dim}(\lambda) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N} \frac{\lambda_i-\lambda_j+j-i}{j-i}$$
$$= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant N} \frac{(\lambda_i-i+N)-(\lambda_j-j+N)}{j-i}, \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

Лемма 3.1. *Пусть $A=\{0,1,\dots,k\}$, $X\subset A$, $\overline{X}=A\setminus X$. Обозначим*

$$V(X) = \prod_{\substack{x<y}}^{x\in X, y\in X} (y-x).$$

Тогда

$$V(X) = V(\overline{X}) \prod_{x\in\overline{X}} \frac{1}{x!(k-x)!} \cdot \prod_{i=1}^{k} i!.$$

Доказательство. Понятно, что

$$V(X)\prod_{x\in\overline{X}}\left(\prod_{i\neq x}^{i\in A}(x-i)\right) = V(A)\cdot V(\overline{X}).$$

Остается заметить, что

$$V(A) = \prod_{i=1}^{k} i!$$

и

$$\prod_{i\neq x}^{i\in A}(x-i)=x!(k-x)!. \qquad \square$$

Как следствие леммы 3.1 и формулы Вейля для размерности мы получаем следующее утверждение.

Лемма 3.2. *Пусть* $\lambda\in\mathbb{GT}_N$ *и* $X(\lambda)=X=(x_1<x_2<\dots<x_p)$. *Тогда*

$$\mathrm{Dim}(\lambda)=V(X(\lambda))\cdot\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{x_i!(N+p-1-x_i)!}\cdot\prod_{i=1}^{p}(N+i-1)!.$$

Теперь обозначим

$$w_N(x)=\frac{\Gamma(z'+N-x)\Gamma(w'+x+1)}{\Gamma(N+p-x)\Gamma(x+1)}. \tag{1}$$

Для упрощения формул мы будем в дальнейшем пользоваться символом Похгаммера

$$(a)_k=\frac{\Gamma(a+k)}{\Gamma(a)}=a(a+1)\dots(a+k-1).$$

Предложение 3.3. *Для* $X=(x_1<\dots<x_p)$ *имеем*

$$P_N^{p,z',w'}(X)=Z_N^{p,z',w'}\cdot V^2(X)\prod_{i=1}^{p}w_N(x_i),$$

где $Z_N^{p,z',w'}$ *– нормировочная константа*

$$Z_N^{p,z',w'}=\prod_{i=1}^{N}\frac{(i)_p}{(z'+w'+i)_p}\cdot\prod_{i=1}^{p}\frac{1}{\Gamma(w'+i+1)\Gamma(z'-i+1))}.$$

Доказательство. Простое вычисление, использующее леммы 3.1 и 3.2. $\square$

Теперь предположим, что $\lambda\in\mathbb{GT}_N$, $\mu\in\mathbb{GT}_{N+1}$, $X=(x_1<\dots<x_p)=X(\lambda)$, $X'=(x_1'<\dots<x_p')=X(\mu)$. Мы будем писать $X\prec X'$,

если $\lambda \prec \mu$. Заметим, что $X \prec X'$ в том и только в том случае, если для каждого i либо $x_i' = x_i$, либо $x_i' = x_i + 1$.

Замечание. Рассмотрим произвольный путь $\tau = (\tau(0), \tau(1), \dots)$ в графе $\mathbb{GT}$. Положим $X(N) = X(\tau(N)) = (x_1^N < \dots < x_p^N)$. Для каждых $1 \leqslant i \leqslant p$ и $N \geqslant 0$ отметим точку на целочисленной плоскости $\mathbb{Z}^2$ с координатами (N, x_i^N) и нарисуем отрезки, соединяющие (N, x_i^N) с $(N+1, x_i^{N+1})$. Таким образом, каждому пути τ в графе соответствует семейство из p непересекающихся путей на целочисленной плоскости $\mathbb{Z}^2$. Эта интерпретация показывает глубокое сходство между объектами, которые изучаются в настоящей работе, и сюжетом статьи [8], которая была посвящена исследованию семейств непересекающихся путей внутри шестиугольника.

Нашей следующей целью является получение явных формул для переходных вероятностей процесса $X_{p,z',w'}(t)$.

Предложение 3.4. *Пусть* $X = (x_1 < \dots < x_p) \in (X_{N,p})^p$ *и* $X' = (x_1' < \dots < x_p') \in (X_{N+1,p})^p$. *Тогда*

$$\operatorname{Prob}\{X(N+1) = X' \mid X(N) = X\}$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{(z'+w'+N+1)_p} \frac{V(X')}{V(X)} \prod\limits_{i: x_i' = x_i} (z'+N-x_i) \prod\limits_{i: x_i' = x_i+1} (w'+1+x_i), & X \prec X', \\ 0 \quad \textit{иначе}. \end{cases}$$

Доказательство. По определению $\operatorname{Prob}\{X(N+1) = X' \mid X(N) = X\}$ совпадает с переходной функцией $p^{\uparrow}(\mu \mid \lambda)$, где $X' = X(\mu)$ и $X = X(\lambda)$. Лемма 3.2 и предложение 3.3 гарантируют, что

$$\operatorname{Prob}\{X(N+1) = X' \mid X(N) = X\} = p^{\uparrow}(\mu \mid \lambda) = \frac{M_{N+1}(\mu)}{M_N(\lambda)} \cdot \frac{\operatorname{Dim}(\lambda)}{\operatorname{Dim}(\mu)}$$
$$= \frac{Z_{N+1}^{p,z',w'} \cdot V^2(X') \prod\limits_{i=1}^p w_{N+1}(x_i')}{Z_N^{p,z',w'} \cdot V^2(X) \prod\limits_{i=1}^p w_N(x_i)} \frac{V(X) \cdot \prod\limits_{i=1}^p \frac{1}{x_i!(N+p-1-x_i)!} \cdot \prod\limits_{i=1}^p (N+i-1)!}{V(X') \cdot \prod\limits_{i=1}^p \frac{1}{x_i'!(N+p-x_i')!} \cdot \prod\limits_{i=1}^p (N+i)!}.$$

Используя теперь (1), мы получаем искомую формулу. □

4. Детерминантная форма записи переходных вероятностей

В этом разделе мы выводим детерминантные формулы для переходных вероятностей изучаемых нами марковских цепей. Эти формулы очень важны для наших рассуждений.

Положим
$$c_i^N=\sqrt{\left(1-\frac{i}{p+N}\right)\left(1+\frac{i}{w'+z'+N+1}\right)}.$$
Пусть $v_N(x,y)$ – это $(N+p)\times(N+p-1)$ матрица ($0\leqslant x\leqslant N+p-1$, $0\leqslant y\leqslant N+p$), заданная формулами
$$v_N(x,y)=\begin{cases}\sqrt{\frac{(w'+x+1)(x+1)}{(x+N)(w'+z'+N+1)}}, & y=x+1,\\ \sqrt{\frac{(z'+N-x)(p+N-x)}{(p+x)(w'+z'+N+1)}}, & y=x,\\ 0 & \text{иначе.}\end{cases}$$

Предложение 4.1.
$$\begin{aligned}\operatorname{Prob}\{X&(N+1)=X'\mid X(N)=X\}\\&=\frac{\sqrt{P_{N+1}^{p,z',w'}(X')}}{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X)}}\cdot\det[v_N(x_i,x_j')]_{i,j=1,\dots,p}\cdot\frac{1}{\prod_{i=0}^{p-1}c_i^N},\end{aligned}\tag{2}$$
где $[v_N(x_i,x_j')]_{i,j=1,\dots,p}$ *– подматрица матрицы* $v_N(x,y)$.

Доказательство. Заметим, что $v_N(x,y)$ является двухдиагональной матрицей. Любая подматрица подобной матрицы, имеющая ненулевой определитель, обязана быть блочно-диагональной матрицей, в которой каждый блок является либо верхнетреугольной, либо нижнетреугольной матрицей. Следовательно, ненулевые миноры являются произведениями соответствующих матричных элементов. Значит, если $X\prec X'$, то
$$\begin{aligned}&\frac{\sqrt{P_{N+1}^{p,z',w'}(X')}}{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X)}}\cdot\det[v_N(x_i,x_j')]_{i,j=1,\dots,p}\cdot\frac{1}{\prod_{i=0}^{p-1}c_i^N}\\
&\qquad=\sqrt{\frac{Z_{N+1}^{p,z',w'}}{Z_N^{p,z',w'}}}\cdot\frac{1}{\prod_{i=0}^{p-1}c_i^N}\cdot\frac{V(X')}{V(X)}\cdot\prod_{i=1}^{p}\sqrt{\frac{w_{N+1}(x_i')}{w_N(x_i)}}\\
&\times\prod_{i:x_i'=x_i}\sqrt{\frac{(z'+N-x_i)(p+N-x_i)}{(p+x_i)(w'+z'+N+1)}}\prod_{i:x_i'=x_i+1}\sqrt{\frac{(w'+x+1)(x+1)}{(x+N)(w'+z'+N+1)}}\\
&=\frac{\Gamma(z'+w'+N+1)}{\Gamma(z'+w'+p+N+1)}\frac{V(X')}{V(X)}\prod_{i:x_i'=x_i}(z'+N-x_i)\prod_{i:x_i'=x_i+1}(w'+1+x_i)\\
&\qquad\qquad=\operatorname{Prob}\{X(N+1)=X'\mid X(N)=X\},\end{aligned}$$

а в случае, если $X \not\prec X'$, обе части равенства (2) равняются нулю. $\square$

Пусть $Q^k_{w',z'-p,N+p-1}(x)$ – ортогональный полиномом Хана степени k. Эти полиномы ортогональны относительно веса $w_N(x)$ (см. [13]).

Обозначим

$$f^k_N(x) = \frac{Q^k_{w',z'-p,N+p-1}(x)\sqrt{w_N(x)}.}{\sqrt{(Q^k_{w',z'-p,N+p-1}, Q^k_{w',z'-p,N+p-1})}},$$

где $(Q^k_{w',z'-p,N+p-1}, Q^k_{w',z'-p,N+p-1})$ – это квадрат нормы полинома $Q^k_{w',z'-p,N+p-1}$ в пространстве $L_2(\{0,1,\ldots,N+p-1\}, w_N(x))$. Точное значение этой нормы можно найти в приложении.

Функции f^k_N, $k = 0,1,\ldots,N+p-1$, образуют ортонормированный базис пространства $L_2(\{0,1,\ldots,N+p-1\})$ (это пространство L_2 рассматривается по отношению к равномерной мере).

Замечание. Здесь и далее мы используем определения классических ортогональных полиномов, данные в работе [13]. Таким образом,

$$Q^k_{x,\alpha,\beta,M} = {}_3F_2\begin{pmatrix} -k, -x, k+\alpha+\beta+1 \\ -M, \alpha+1 \end{pmatrix}(1).$$

Мы также используем книгу [16], в которой приведено несколько другое определение этих полиномов (два определения отличаются множителем). Все формулы в настоящей работе записаны в соответствии с определениями работы [13].

Предложение 4.2. *Имеет место следующая формула:*

$$v_N(x,y) = \sum_{i=0}^{N+p-1} c^N_i f^i_N(x) f^i_{N+1}(y).$$

Эквивалентным образом, она может быть записана как

$$v_N = (F_N)^T \cdot C_N \cdot (F_{N+1}),$$

где v_N *является* $(N+p)\times(N+p+1)$ *матрицей* $v_N(x,y)$, F_m – *это* $(m+p)\times(m+p)$ *матрица* $f^i_m(j)_{i,j=0,\ldots,m+p-1}$, *а* C_N – *это* $(N+p)\times(N+p+1)$ *матрица вида*

$$(C_N)_{ij} = \begin{cases} c^N_i, & \text{если } i=j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Рассуждения повторяют [8, лемма 8]. Некоторые дополнительные детали содержатся в приложении. □

Нашей следующей целью будет получение детерминантного представления для переходных вероятностей марковской цепи $U^N_{p,z',w'}(t)$.

Лемма 4.3. *Если* $X' \prec X$, *то*

$$\operatorname{Prob}\{X(N) = X' \mid X(N+1) = X\} = \frac{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X')}}{\sqrt{P_{N+1}^{p,z',w'}(X)}} \cdot \det[v_N(x'_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,p} \cdot \frac{1}{\prod_{i=0}^{p-1} c_i^N}.$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Prob}\{X(N) = X' \mid X(N+1) = X\} \\
&\quad = \operatorname{Prob}\{X(N+1) = X \mid X(N+1) = X'\} \frac{\operatorname{Prob}\{X(N) = X'\}}{\operatorname{Prob}\{X(N+1) = X\}} \\
&\quad = \frac{\sqrt{P_{N+1}^{p,z',w'}(X)}}{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X')}} \cdot \det[v_N(x'_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,p} \cdot \frac{1}{\prod_{i=0}^{p-1} c_i^N} \cdot \frac{P_N^{p,z',w'}(X')}{P_{N+1}^{p,z',w'}(X)} \\
&\quad = \frac{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X')}}{\sqrt{P_{N+1}^{p,z',w'}(X)}} \cdot \det[v_N(x'_i, x_j)]_{i,j=1,\dots,p} \cdot \frac{1}{\prod_{i=0}^{p-1} c_i^N}. \qquad \square
\end{aligned}$$

Предложение 4.4. *Переходные вероятности процесса* $U^N_{p,z',w'}(t)$ *можно вычислять по следующей формуле:*

$$\operatorname{Prob}\{U^N_{p,z',w'}(t+1) = X' \mid U^N_{p,z',w'}(t) = X\} = \frac{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X')}}{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X)}} \det[u_N(x_i, x'_j)]_{i,j=1,\dots,p} \cdot \frac{1}{\prod_{i=0}^{p-1} (c_i^N)^2},$$

где $[u_N(x_i, x'_j)]_{i,j=1,\dots,p}$ *является подматрицей* $(N+p) \times (N+p)$ *матрицы*

$$u_N = v_N \cdot (v_N)^T.$$

Доказательство. В соответствии с определением процесса $U^N_{p,z',w'}$

$$\begin{aligned}&\operatorname{Prob}\{U^N_{p,z',w'}(t+1)=X' \mid U^N_{p,z',w'}(t)=X\}\\&\quad=\sum_Y \operatorname{Prob}\{X(N)=X' \mid X(N+1)=Y\}\cdot\operatorname{Prob}\{X(N+1)=Y \mid X(N)=X\}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\operatorname{Prob}\{U^N_{p,z',w'}(t+1)=X' \mid U^N_{p,z',w'}(t)=X\}\\&=\frac{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X')}}{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X)}}\sum_{y_1<y_2<\dots<y_p}\frac{\det[v_N(x_i,y_j)]_{i,j=1,\dots,p}\det[v_N(x'_i,y_j)]_{i,j=1,\dots,p}}{\prod_{i=0}^{p-1}(c_i^N)^2}.\end{aligned}$$

Пусть A – это $p\times(N+p+1)$ матрица, заданная формулой

$$A_{ij}=v_N(x_i,j-1),\quad i=1,\dots,p,\quad j=1,\dots,N+p+1,$$

и пусть B – это $(N+p+1)\times p$ матрица, заданная формулой

$$B_{ij}=v_N(i-1,x'_j),\quad i=1,\dots,N+p+1,\quad j=1,\dots,p.$$

Обозначим через $A^{j_1j_2\dots j_p}$ квадратную подматрицу матрицы A, состоящую из столбцов $j_1,j_2,\dots,j_p$, а через $B^{j_1j_2\dots j_p}$ – квадратную подматрицу матрицы B, состоящую из строк $j_1,j_2,\dots,j_p$. Используя тождество Коши–Бине, мы можем заключить, что

$$\det(AB)=\sum_{1\leqslant j_1<j_2<\dots<j_p\leqslant N+p+1}\det(A^{j_1j_2\dots j_p}\cdot B^{j_1j_2\dots j_p}).$$

Заметим, что $(AB)_{ij}=u_N(x_i,x'_j)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}&\operatorname{Prob}\{U^N_{p,z',w'}(t+1)=X' \mid U^N_{p,z',w'}(t)=X\}\\&=\frac{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X')}}{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X)}}\frac{\det[u_N(x_i,x'_j)]_{i,j=1,\dots,p}}{\prod_{i=0}^{p-1}(c_i^N)^2}.\end{aligned}\qquad\square$$

Предложение 4.5. *Пусть* $k \in \mathbb{Z}^+$. *Тогда*

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Prob}\{&U^N_{p,z',w'}(t+k) = X' \mid U^N_{p,z',w'}(t) = X\} \\
&= \frac{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X')}}{\sqrt{P_N^{p,z',w'}(X)}} \frac{\det[w_{N,k}(x_i, x'_j)]_{i,j=1,\dots,p}}{\prod_{i=0}^{p-1} (c_i^N)^{2k}},
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где

$$
w_{N,k}(x,x') = \sum_{i=0}^{N+p-1} (c_i^N)^{2k} f_N^i(x) f_N^i(x').
$$

Доказательство. Имеем

$$
\begin{aligned}
\operatorname{Prob}\{&U^N_{p,z',w'}(t+k) = X' \mid U^N_{p,z',w'}(t) = X\} \\
&= \sum_Y \operatorname{Prob}\{U^N_{p,z',w'}(t+k) = X' \mid U^N_{p,z',w'}(t+1) = Y\} \\
&\qquad \cdot \operatorname{Prob}\{U^N_{p,z',w'}(t+1) = Y \mid U^N_{p,z',w'}(t) = X\} \\
&= \sum_Y \operatorname{Prob}\{U^N_{p,z',w'}(t+k-1) = X' \mid U^N_{p,z',w'}(t) = Y\} \\
&\qquad\qquad \cdot \operatorname{Prob}\{U^N_{p,z',w'}(t+1) = Y \mid U^N_{p,z',w'}(t) = X\}.
\end{aligned}
$$

Применяя предложение 4.4, тождество Коши–Бине и принцип математической индукции, мы получаем формулу (3), где матрица $[w_{N,k}(x_i, x'_j)]_{i,j=1,\dots,p}$ является подматрицей матрицы $w_{N,k} = (u_N)^k$. Значит,

$$
w_{N,k} = (v_N (v_N)^T)^k = ((F_N)^T \cdot C_N \cdot F_{N+1} \cdot (F_{N+1})^T \cdot (C_N)^T \cdot F_N)^k.
$$

Вспомним, что

$$
(F_m)_{ij} = f_m^i(j), \quad i,j = 0,\dots,m+p-1.
$$

Так как функции f_m^i образуют ортонормированный базис, то $F_m \cdot (F_m)^T = \mathrm{Id}$, где символом Id мы обозначили тождественную матрицу. Таким образом,

$$
w_{N,k} = (F_N)^T \cdot (C_N (C_N)^T)^k \cdot F_N.
$$

Последнее равенство влечет за собой предложение 4.5. □

5. Предельный процесс

Напомним, что предметом нашего изучения является стационарный процесс

$$J_{p,z',w'}(t) = \lim_{N\to\infty} J^N_{p,z',w'}(t),$$

где

$$J^N_{p,z',w'}(t) = \pi_N\left(U^N_{p,z',w'}\left(\lfloor t\cdot N^2\rfloor\right)\right)$$

и

$$\pi_N : (x_1, x_2, \ldots, x_p) \mapsto \left(\frac{x_1}{N+p-1}, \frac{x_2}{N+p-1}, \ldots, \frac{x_p}{N+p-1}\right).$$

Введем некоторые обозначения. Пусть $w_{p,z',w'}(x)$ – плотность B-распределения:

$$w_{p,z',w'}(x) = x^{w'}(1-x)^{z'-p}, \quad 0 < x < 1.$$

Обозначим через $\mathrm{Jac}^k_{z'-p,w'}(x)$ *ортогональный полином Якоби* степени k. Эти полиномы определены для $x \in (0,1)$ и ортогональны относительно весовой функции $w_{p,z',w'}$. В соответствии с [13]

$$\mathrm{Jac}^n_{\alpha,\beta}(x) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!}{}_2F_1\begin{pmatrix}-n, n+\alpha+\beta+1\\ \alpha+1\end{pmatrix}(1-x).$$

Отметим, что зачастую полиномы Якоби определяются для $x \in (-1,1)$, однако в нашей работе мы сжали и сдвинули область определения полиномов, наши полиномы определены на интервале $(0,1)$.

Обозначим

$$j^k_{p,z',w'}(x) = \frac{\mathrm{Jac}^k_{z'-p,w'}(x)\sqrt{w_{p,z',w'}(x)}}{\sqrt{(\mathrm{Jac}^k_{z'-p,w'}, \mathrm{Jac}^k_{z'-p,w'})}},$$

где $(\mathrm{Jac}^k_{z'-p,w'}, \mathrm{Jac}^k_{z'-p,w'})$ – квадрат нормы полинома $\mathrm{Jac}^k_{z'-p,w'}$ в $L_2([0,1], w_{p,z',w'})$. Точная формула для нормы приведена в приложении.

Понятно, что функции $j^k_{p,z',w'}$, $k = 0, 1, \ldots$, образуют ортонормированную систему в пространстве L_2 на отрезке $[0,1]$ с мерой Лебега.

Наконец, положим

$$K_{p,z',w'}(i) = i(i + w' + z' + 1 - p).$$

В этом разделе мы доказываем существование предельного процесса $J_{p,z',w'}(t)$, вычисляем его одномерные распределения и переходные вероятности. Главным результатом является следующая теорема.

Теорема 5.1. *Конечномерные распределения процессов* $J^N_{p,z',w'}(t)$ *слабо сходятся при* $N \to \infty$ *к соответствующим конечномерным распределениям предельного процесса* $J_{p,z',w'}(t)$*. Процесс* $J_{p,z',w'}(t)$ *является стационарным марковским процессом. Его начальное распределение задается плотностью*

$$\rho_{p,z',w'}(X) = B_{p,z',w'} \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 \prod_{i=1}^{p} w_{p,z',w'}(x_i).$$

Плотность переходных вероятностей предельного процесса имеет вид

$$\mathcal{P}^t_{p,z',w'}(Y \mid X) = \frac{\sqrt{\rho_{p,z',w'}(Y)}}{\sqrt{\rho_{p,z',w'}(X)}} \cdot e^{tK_{p,z',w'}} \cdot \det[\mathcal{J}^t_{p,z',w'}(x_i, y_j)]_{i,j=1,2,\dots,p},$$

где

$$\mathcal{J}^t_{p,z',w'}(x,y) = \sum_{i=0}^{\infty} e^{-tK_{p,z',w'}(i)} j^i_{p,z',w'}(x) j^i_{p,z',w'}(y)$$

и

$$K_{p,z',w'} = \sum_{i=0}^{p-1} K_{p,z',w'}(i).$$

Замечание. Детерминантный вид переходных вероятностей гарантирует, что $J_{p,z',w'}(t)$ является пространственно-временным (динамическим) детерминантным процессом. Точное утверждение приведено в предложении 5.5.

Начнем доказательство.

Во-первых, нам бы хотелось заново вычислить плотность одномерного распределения процесса $J_{p,z',w'}(t)$ (изначально она была вычислена в работе [1]).

Предложение 5.2. *Имеет место следующее равенство:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}\{J_{p,z',w'}(t) \in dX\} &= \rho_{p,z',w'}(X) dx_1 \dots dx_p \\ &= B_{p,z',w'} \prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 \prod_{i=1}^{p} x_i^{w'}(1 - x_i)^{z'-p} dx_i,\end{aligned}$$

где $X = (x_1 < x_2 < \dots < x_p)$.

Доказательство. Понятно, что одномерные распределения процесса $J^N_{p,z',w'}(t)$ имеют вид

$$\mathrm{Prob}\{J^N_{p,z',w'}(t) = X\} = P_N^{p,z',w'}((N+p-1)\cdot X),$$

где $X = (x_1 < x_2 < \dots < x_p)$ и $(N+p-1)\cdot X = ((N+p-1)x_1 < (N+p-1)x_2 < \cdot < (N+p-1)x_p) \in \{0,1,\dots,N+p-1\}^p$.

Если предел, приведенный ниже, существует, то имеет место равенство

$$\mathrm{Prob}\{J_{p,z',w'}(t) \in dX\} = \lim_{N\to\infty}(N+p-1)^p \cdot \mathrm{Prob}\{J^N_{p,z',w'}(t) = X\}. \quad (4)$$

Применяя формулу

$$\frac{\Gamma(M+a)}{\Gamma(M+b)} \sim M^{a-b}, \quad M \to \infty$$

(здесь $A \sim B$ означает, что $\lim \frac{A}{B} = 1$), мы получаем

$$\begin{aligned}
\mathrm{Prob}\{J^N_{p,z',w'}(t) = X\} &= Z_N^{p,z',w'} \cdot \prod_{i<j}((N+p-1)x_i - (N+p-1)x_j)^2 \\
&\cdot \prod_{i=1}^{p} \frac{\Gamma(z'+N-(N+p-1)x_i)\Gamma(w'+(N+p-1)x_i+1)}{\Gamma(N+p-(N+p-1)x_i)\Gamma((N+p-1)x_i+1)} \\
&\sim Z_N^{p,z',w'} \cdot \prod_{i<j}(x_i-x_j)^2 \cdot (N+p-1)^{p(p-1)} \\
&\cdot \prod_{i=1}^{p}((N+p-1)-(N+p-1)x_i)^{z'-p}((N+p-1)x_i)^{w'} \\
&= Z_N^{p,z',w'} \cdot (N+p-1)^{p(z'+w')-p)} \cdot \prod_{i<j}(x_i-x_j)^2 \cdot \prod_{i=1}^{p}(1-x_i)^{z'-p}x_i^{w'}.
\end{aligned}$$

Подставляя значение нормировочной константы $Z_N^{p,z',w'}$ из предложения 3.3, имеем

$$\mathrm{Prob}\{J^N_{p,z',w'}(t) = X\} = \frac{B_{p,z',w'}}{(N+p-1)^p}\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2 \cdot \prod_{i=1}^{p}(1-x_i)^{z'-p}x_i^{w'}.$$

□

Замечание. Сходимость в (4) является равномерной на любом компактном подмножестве

$$D \subset \{(x_1, x_2, \dots, x_p) : 0 < x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_p < 1\},$$

что и гарантирует слабую сходимость распределений.

Теперь сосредоточимся на многомерных распределениях процесса $J_{p,z',w'}(t)$.

Предложение 5.3. *Рассмотрим n различных моментов времени*

$$0 \leqslant t_1 < t_2 < \dots < t_n.$$

При N, стремящемся к бесконечности, n-мерное распределение процесса $J^N_{p,z',w'}(t)$, отвечающее моментам $t = t_1, \dots, t_n$, слабо сходится к предельному распределению, которое имеет плотность

$$\begin{aligned} \rho(t_1, 0 < x_1^1 < \dots < x_p^1 < 1; \dots; t_n, 0 < x_1^n < \dots < x_p^n < 1) \\ = \sqrt{\rho_{p,z',w'}(x_1^1, \dots, x_p^1)} \\ \times \frac{\det[\mathcal{J}^{t_2-t_1}_{p,z',w'}(x_i^1, x_j^2)]_{i,j=1,2,\dots,p}}{e^{-(t_2-t_1)K_{p,z',w'}}} \cdots \frac{\det[\mathcal{J}^{t_n-t_{n-1}}_{p,z',w'}(x_i^{n-1}, x_j^n)]_{i,j=1,2,\dots,p}}{e^{-(t_n-t_{n-1})K_{p,z',w'}}} \\ \times \sqrt{\rho_{p,z',w'}(x_1^n, \dots, x_p^n)}, \end{aligned} \tag{5}$$

где $\mathcal{J}^t_{p,z',w'}(x,y)$ и $K_{p,z',w'}$ такие же, как в формулировке теоремы 5.1.

Доказательство. Вспомним, что $J^N_{p,z',w'}(t)$ является марковским процессом. Предложение 3.3 описывает его одномерные распределения, а предложение 4.5 – переходные вероятности.

Мы можем заключить, что совместное распределение величин $J^N_{p,z',w'}(t_1), \dots, J^N_{p,z',w'}(t_n)$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\{J^N_{p,z',w'}(t_1) = X^1, \dots J^N_{p,z',w'}(t_n) = X^n\} \\ = \sqrt{P_N^{p,z',w'}((N+p-1)X^1)} \\ \times \frac{\det[w_{N,\lfloor t_2\cdot N^2\rfloor - \lfloor t_1\cdot N^2\rfloor}((N+p-1)x_i^1, (N+p-1)x_j^2)]_{i,j=1,\dots,p}}{\prod_{i=0}^{p-1}(c_i^N)^{2\lfloor t_2\cdot N^2\rfloor - 2\lfloor t_1\cdot N^2\rfloor}} \times \dots \\ \times \frac{\det[w_{N,\lfloor t_n\cdot N^2\rfloor - \lfloor t_{n-1}\cdot N^2\rfloor}((N+p-1)x_i^{n-1}, (N+p-1)x_j^n)]_{i,j=1,\dots,p}}{\prod_{i=0}^{p-1}(c_i^N)^{2\lfloor t_n\cdot N^2\rfloor - 2\lfloor t_{n-1}\cdot N^2\rfloor}} \\ \times \sqrt{P_N^{p,z',w'}((N+p-1)X^n)}. \end{aligned}$$

В соответствии с предложением 5.2 при $N \to \infty$

$$\sqrt{P_N^{p,z',w'}((N+p-1)X) \cdot (N+p-1)^p} \to \sqrt{\rho_{p,z',w'}(X)}.$$

Далее заметим, что

$$\lim_{N\to\infty}(c_i^N)^{2\lfloor t\cdot N^2\rfloor}=\lim_{N\to\infty}\left(\left(1-\frac{i}{p+N}\right)\left(1+\frac{i}{w'+z'+N+1}\right)\right)^{\lfloor t\cdot N^2\rfloor}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\left(1+\frac{i(p-w'-z'-1)-i^2}{(p+N)(w'+z'+N+1)}\right)^{\lfloor t\cdot N^2\rfloor}=e^{-i(i+w'+z'+1-p)t}.$$

Остается доказать, что для $t>s$ при $N\to\infty$

$$(N+p-1)w_{N,\lfloor t\cdot N^2\rfloor-\lfloor s\cdot N^2\rfloor}((N+p-1)x,(N+p-1)y)\to\mathcal{J}^{t-s}_{p,z',w'}(x,y).$$

В дальнейшей выкладке мы будем опускать параметры и писать Q^i вместо $Q^i_{w',z'-p,N+p-1}$. Кроме того, мы будем писать $\tilde{x}$ вместо $(N+p-1)x$ и $\tilde{y}$ вместо $(N+p-1)y$. Имеем

$$w_{N,\lfloor t\cdot N^2\rfloor-\lfloor s\cdot N^2\rfloor}(\tilde{x},\tilde{y})=\sum_{i=0}^{N+p-1}(c_i^N)^{2\lfloor t\cdot N^2\rfloor-2\lfloor s\cdot N^2\rfloor}f_N^i(\tilde{x})f_N^i(\tilde{y})$$
$$=\sqrt{w_N(\tilde{x})w_N(\tilde{y})}\cdot\sum_{i=0}^{N+p-1}(c_i^N)^{2\lfloor t\cdot N^2\rfloor-2\lfloor s\cdot N^2\rfloor}\frac{Q^i(\tilde{x})Q^i(\tilde{x})}{(Q^i,Q^i)}$$
$$\sim\sqrt{w_{p,z',w'}(x)w_{p,z',w'}(y)}(N+p-1)^{w'+z'-p}\cdot\sum_{i=0}^{N+p-1}(c_i^N)^{2\lfloor t\cdot N^2\rfloor-2\lfloor s\cdot N^2\rfloor}\frac{Q^i(\tilde{x})Q^i(\tilde{x})}{(Q^i,Q^i)}$$
$$=\sqrt{w_{p,z',w'}(x)w_{p,z',w'}(y)}(N+p-1)^{w'+z'-p}(A+B),$$

где

$$A=\sum_{i=0}^{l}(c_i^N)^{2\lfloor t\cdot N^2\rfloor-2\lfloor s\cdot N^2\rfloor}\frac{Q^i(\tilde{x})Q^i(\tilde{x})}{(Q^i,Q^i)}$$

и

$$B=\sum_{i=l+1}^{N+p-1}(c_i^N)^{2\lfloor t\cdot N^2\rfloor-2\lfloor s\cdot N^2\rfloor}\frac{Q^i(\tilde{x})Q^i(\tilde{x})}{(Q^i,Q^i)}.$$

Зафиксируем достаточно большое l и устремим N к бесконечности. Сначала посмотрим на поведение слагаемого A. Верно, что (см. [13, Section 2.5])

$$Q^i_{w',z'-p,N+p-1}((N+p-1)x)\to\frac{\mathrm{Jac}^i_{w',z'-p}(1-x)}{\mathrm{Jac}^i_{w',z'-p}(0)}=\frac{\mathrm{Jac}^i_{z'-p,w'}(x)}{\mathrm{Jac}^i_{z'-p,w'}(1)},$$

и сходимость является равномерной для x, принадлежащих некоторому (произвольному) компактному подмножеству интервала $(0,1)$. Здесь мы использовали соотношение

$$\mathrm{Jac}^i_{\alpha,\beta}(1-x) = (-1)^i \mathrm{Jac}^i_{\beta,\alpha}(x).$$

Непосредственными вычислениями можно показать, что

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(N+p-1)^{w'+z'+1-p}}{(Q^i_{w',z'-p,N+p-1}, Q^i_{w',z'-p,N+p-1})} = \frac{(\mathrm{Jac}^i_{z'-p,w'}(1))^2}{(\mathrm{Jac}^i_{z'-p,w'}(x), \mathrm{Jac}^i_{z'-p,w'}(x))};$$

несколько в другом виде это же утверждение было доказано и в [16].

Мы можем заключить, что

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}&(N+p-1)\cdot\sqrt{w_{p,z',w'}(x)w_{p,z',w'}(y)}(N+p-1)^{w'+z'-p}A\\ &= \sum_{i=0}^{l} e^{-(t-s)K_{p,z',w'}(i)} j^i_{p,z',w'}(x) j^i_{p,z',w'}(y)\\ &= \mathcal{J}^t_{p,z',w'}(x,y) - \sum_{i=l+1}^{\infty} e^{-(t-s)K_{p,z',w'}(i)} j^i_{p,z',w'}(x) j^i_{p,z',w'}(y).\end{aligned}$$

Заметим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\left| \sum_{i=l+1}^{\infty} e^{-(t-s)K_{p,z',w'}(i)} j^i_{p,z',w'}(x) j^i_{p,z',w'}(y) \right| < \varepsilon,$$

если l достаточно велико. В самом деле,

$$e^{-(t-s)K_{p,z',w'}(i)} < e^{-(t-s)i(i-1)}$$

и

$$|j^i_{p,z',w'}(x)| < e^{c(x)i},$$

где $c(x)$ – ограниченная функция для x, принадлежащего некоторому (произвольному) компактному подмножеству интервала $(0,1)$. Эта оценка следует, например, из рекуррентных соотношений на полиномы Якоби.

Таким образом, для завершения доказательства необходимо показать, что

$$\limsup_{N\to\infty} \sqrt{w_{p,z',w'}(x)w_{p,z',w'}(y)}(N+p-1)^{w'+z'+1-p}|B| < \varepsilon(l)$$

и $\varepsilon(l)$ стремится к нулю при l, стремящемся к ∞.

Нам потребуется следующая лемма.

Лемма 5.4. *Для достаточно больших N и любого $i < N + p$ имеет место неравенство*

$$(c_i^N)^{2\lfloor t\cdot N^2\rfloor - 2\lfloor s\cdot N^2\rfloor} < e^{-c\cdot i\ln^2(i)},$$

где константа c не зависит от N.

Доказательство. Имеем

$$(c_i^N)^2 = 1 - \frac{i(i+w'+z'-p+1)}{(p+N)(w'+z'+N+1)} < 1 - c_1\frac{i^2}{N^2}.$$

Если $i < \frac{N}{\ln(N)}$ и N достаточно велико, то

$$\left(1-c_1\frac{i^2}{N^2}\right)^{\lfloor t\cdot N^2\rfloor - \lfloor s\cdot N^2\rfloor} < \left(1-c_1\frac{i^2}{N^2}\right)^{c_2\cdot N^2} = \left(\left(1-c_1\frac{i^2}{N^2}\right)^{\frac{N^2}{c_1 i^2}}\right)^{c_1c_2i^2}$$
$$< (1-\varepsilon)^{c_1c_2i^2} < e^{c_3 i\ln^2 i}.$$

Если же $i \geqslant \frac{N}{\ln(N)}$, то

$$\left(1-c_1\frac{i^2}{N^2}\right)^{\lfloor t\cdot N^2\rfloor - \lfloor s\cdot N^2\rfloor} < \left(1-c_1\frac{i^2}{N^2}\right)^{c_2\cdot N^2} \leqslant \left(1-c_1\frac{(N/\ln(N))^2}{N^2}\right)^{c_2\cdot N^2}$$
$$= \left(\left(1-\frac{c_1}{\ln(N)}\right)^{\frac{\ln(N)}{c_1}}\right)^{c_1c_2\cdot\frac{N^2}{\ln(N)}} < (1-\varepsilon)^{c_1c_2\cdot\frac{N^2}{\ln(N)}} < (1-\varepsilon)^{c_1c_2\frac{i^2}{\ln(i)}} < e^{c_4\cdot i\ln^2 i}.$$

□

Рекуррентные соотношения на полиномы Хана (см., например, [13, (1.5.3)] гарантируют следующую оценку:

$$|Q^i_{w',z'-p,N+p-1}(x)| < e^{c'\cdot i\ln(i)},$$

где константа c' не зависит ни от N, ни от x.

Далее заметим, что выражение

$$\frac{(N+p-1)^{w'+z'+1-p}}{(Q^i_{w',z'-p,N+p-1}, Q^i_{w',z'-p,N+p-1})}$$

ограничено сверху величиной $e^{c''\cdot i\ln(i)}$.

Для достаточно больших N и l мы получаем следующую оценку:

$$(N+p-1)^{w'+z'+1-p}|B| =$$

$$\Bigg|\sum_{i=l+1}^{N+p-1}(c_i^N)^{2\lfloor t\cdot N^2\rfloor-2\lfloor s\cdot N^2\rfloor}Q^i_{w',z'-p,N+p-1}((N+p-1)x)Q^i_{w',z'-p,N+p-1}((N+p-1)x)$$

$$\times\frac{(N+p-1)^{w'+z'+1-p}}{(Q^i_{w',z'-p,N+p-1},Q^i_{w',z'-p,N+p-1})}\Bigg)\Bigg|$$

$$<\sum_{i=l+1}^{N+p-1}e^{-ci\ln^2(i)+2c'i\ln(i)+c''i\ln(i)}<\sum_{i=l+1}^{N+p-1}e^{-\tilde{c}i\ln^2(i)}<\sum_{i=l}^{\infty}e^{-\tilde{c}i}=\frac{e^{-\tilde{c}l}}{1-e^{\tilde{c}l}}.$$

Для завершения доказательства предложения 5.3 остается только заметить, что $\frac{e^{-\tilde{c}l}}{1-e^{-\tilde{c}l}}\to 0$ при $l\to\infty$. □

В силу того, что многомерные распределения процесса $J^N_{p,z',w'}(t)$ сходятся, мы можем определить $J_{p,z',w'}(t)$ как предельный процесс. Из явных формул (5) для конечномерных распределений следует, что $J_{p,z',w'}(t)$ является марковским стационарным процессом в точности с такими начальным распределением и переходными вероятностями, какие и заданы в формулировке теоремы 5.1. Доказательство завершено.

Марковский процесс $J_{p,z',w'}(t)$ обладает одним интересным свойством. Его динамические (пространственно-временные) *корреляционные функции* могут быть выражены как миноры матрицы, задаваемой некоторым *расширенным ядром.*

Пусть $\rho_n(x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots;x_n,t_n)$ – n-я корреляционная функция процесса $J_{p,z',w'}(t)$. Неформально ρ_n может быть определена как

$$\operatorname{Prob}\{x_1\in J_{p,z',w'}(t_1),\ldots,x_n\in J_{p,z',w'}(t_n)\}$$
$$=\rho_n(x_1,t_1;\ldots;x_n,t_n)dx_1\ldots dx_n.$$

Предложение 5.5. *Рассмотрим n различных пар $(x_1,t_1),\ldots,(x_n,t_n)$. Имеет место равенство*

$$\rho_n(x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots;x_n,t_n)=\det[\operatorname{Ker}_{p,z',w'}(x_i,t_i;x_j,t_j)]_{i,j=1,\ldots,n},$$

где

$$\operatorname{Ker}_{p,z',w'}(x,t;y,s)$$
$$=\begin{cases}\sum\limits_{i=0}^{p-1}e^{(t-s)K_{p,z',w'}(i)}j^i_{p,z',w'}(x)j^i_{p,z',w'}(y), & \text{если } t\geqslant s,\\ -\sum\limits_{i=p}^{\infty}e^{(t-s)K_{p,z',w'}(i)}j^i_{p,z',w'}(x)j^i_{p,z',w'}(y), & \text{если } t<s.\end{cases}$$

Мы не будем приводить здесь доказательство этого утверждения. Оно следует из теоремы 5.1 и теоремы Эйнара–Меты (см. [5] и [3, Section 7.4]). Работа [19] является хорошим обзором, посвященным детерминантным процессам. Также некоторая дополнительная информация о расширенных ядрах может быть найдена, например, в статьях [5, 9, 20].

6. Марковская полугруппа предельного процесса

Обозначим через $\mathcal{W}_p$ *камеру Вейля*:

$$\mathcal{W}_p = \{(x_1, \dots, x_p) \in [0,1]^p : x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_p\}.$$

Ясно, что $\mathcal{W}_p$ является пространством состояний процесса $J_{p,z',w'}(t)$. Напомним, что одномерные распределения процесса $J_{p,z',w'}(t)$ задаются мерами $\mu_{p,z',w'}$. В соответствии с теоремой 5.1 $\mu_{p,z',w'}$ является вероятностной мерой на $\mathcal{W}_p$ с плотностью $\rho_{p,z',w'}$.

Обозначим через $M^t_{p,z',w'}$ марковскую полугруппу процесса $J_{p,z',w'}(t)$ в пространстве $L_2(\mathcal{W}_p, \mu_{p,z',w'})$. Элемент $M^t_{p,z',w'}$ действует на функцию $f(X) \in L_2(\mathcal{W}_p, \mu_{p,z',w'})$ по формуле

$$(M^t_{p,z',w'} f)(X) = \int\limits_{\mathcal{W}_p} F(Y) \tilde{P}^t_{p,z',w'}(Y \mid X) dY,$$

где интегрирование производится по мере Лебега в пространстве $\mathcal{W}_p$.

Этот раздел посвящен вычислению собственных функций и инфинитезимального генератора полугруппы $M^t_{p,z',w'}$.

Вспомним, что через $\mathrm{Jac}^k_{z'-p,w'}(x)$ мы обозначали полином Якоби степени k, определенный на интервале $(0,1)$. Теперь мы хотим ввести *многомерные полиномы Якоби*. Пусть $\lambda = (\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \dots \geqslant \lambda_p \geqslant 0)$ – произвольное разбиение числа n. Положим

$$\mathrm{Jac}^\lambda_{z-p',w'}(x_1, \dots, x_p) = \frac{\det[\mathrm{Jac}^{\lambda_i+p-i}_{z'-p,w'}(x_j)]_{i,j=1,\dots,p}}{\prod\limits_{i>j}(x_i - x_j)}.$$

Ясно, что $\mathrm{Jac}^\lambda_{z'-p,w'}(x_1, \dots, x_p)$ является симметрическим полиномом степени $n = \lambda_1 + \dots + \lambda_p$, зависящим от p переменных.

Мы можем рассматривать $\mathrm{Jac}^\lambda_{z'-p,w'}(x_1, \dots, x_p)$ как функцию на пространстве $\mathcal{W}_p$. В дальнейшем мы сохраним для этих функций то же самое обозначение.

Хорошо известно, что полиномы $\mathrm{Jac}^\lambda_{z'-p,w'}(x_1, \dots, x_p)$ образуют ортогональный базис пространства $L_2(\mathcal{W}_p, \mu_{p,z',w'})$.

Теорема 6.1. *Полиномы* $\mathrm{Jac}^{\lambda}_{z'-p,w'}(x_1,\dots,x_p)$ *являются собственными функциями марковской полугруппы* $M^t_{p,z',w'}$:

$$M^t_{p,z',w'}(\mathrm{Jac}^{\lambda}_{z'-p,w'}) = c(\lambda,t)\mathrm{Jac}^{\lambda}_{p,z',w'},$$

где

$$c(\lambda,t) = e^{t\left(\sum\limits_{i=1}^{p} K_{p,z',w'}(p-i)-K_{p,z',w'}(\lambda_i+p-i)\right)}.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
&(M^t_{p,z',w'}\mathrm{Jac}^{\lambda}_{z'-p,w'})(x_1,x_2,\dots,x_p)\\
&\quad= \int\limits_{y_1<\dots<y_p} \mathrm{Jac}^{\lambda}_{z'-p,w'}(y_1,\dots,y_p)\frac{\sqrt{\rho_{p,z',w'}(y_1,\dots,y_p)}}{\sqrt{\rho_{p,z',w'}(x_1,\dots,x_p)}}\\
&\quad\times e^{tK_{p,z',w'}}\cdot\det[\mathcal{J}^t_{p,z',w'}(x_i,y_j)]_{i,j=1,2,\dots,p}dy_1\dots dy_p\\
&\quad= \frac{e^{tK_{p,z',w'}}}{\prod_{i>j}(x_i-x_j)}\int\limits_{y_1<\dots<y_p}\mathrm{Jac}^{\lambda}_{z'-p,w'}(y_1,\dots,y_p)\cdot\prod_{i>j}(y_i-y_j)\\
&\quad\times\frac{\prod_{i=1,p}\sqrt{w}_{p,z',w'}(y_i)}{\prod_{i=1,p}\sqrt{w}_{p,z',w'}(x_i)}\cdot\det[\mathcal{J}^t_{p,z',w'}(x_i,y_j)]_{i,j=1,2,\dots,p}dy_1\dots dy_p.
\end{aligned}$$

Заметим, что подынтегральное выражение является симметрической функцией переменных $y_1,\dots,y_p$. Следовательно, мы можем заменить интегрирование по симплексу $0<y_1<\dots<y_p<1$ интегрированием по всему p-мерному кубу. В результате получается следующее выражение:

$$\begin{aligned}
&\frac{e^{tK_{p,z',w'}}}{p!\prod_{i>j}(x_i-x_j)}\int\limits_{0<y_i<1}\det[\mathrm{Jac}^{\lambda_i+p-i}_{z'-p,w'}(y_j)]_{i,j=1,\dots,p}\\
&\times\det\left[\sum_{n=0}^{\infty}e^{-tK_{p,z',w'}(n)}\frac{w_{p,z',w'}(y_j)\mathrm{Jac}^n_{z'-p,w'}(y_j)\mathrm{Jac}^n_{z'-p,w'}(x_i)}{(\mathrm{Jac}^n_{z'-p,w'},\mathrm{Jac}^n_{z'-p,w'})}\right]_{i,j=1,\dots,p}dy_1\dots dy_p.
\end{aligned}$$

Перемножая две матрицы под знаками определителей и используя соотношения ортогональности для полиномов Якоби, мы получаем искомую формулу. □

Пусть $G_{p,z',w'}$ – это инфинитезимальный генератор марковской полугруппы $M^t_{p,z',w'}$. Следующее предложение вытекает из теоремы 6.1.

Предложение 6.2. *Полиномы* $\mathrm{Jac}^{\lambda}_{z-p',w'}(x_1,\dots,x_p)$ *являются собственными функциями оператора* $G_{p,z',w'}$*:*

$$G_{p,z',w'}(\mathrm{Jac}^{\lambda}_{z'-p,w'}) = \tilde{c}(\lambda)\mathrm{Jac}^{\lambda}_{z'-p,w'},$$

где

$$\tilde{c}(\lambda) = \sum_{i=1}^{p} K_{p,z',w'}(p-i) - K_{p,z',w'}(\lambda_i+p-i).$$

Найдем теперь явные формулы для действия генераторов $G_{p,z',w'}$.

Можно заметить, что числа $-K_{p,z',w'}(i) = -i(i+w'+z'+1-p)$ являются в точности собственными значениями *дифференциального оператора Якоби*, отвечающими собственными функциям $\mathrm{Jac}^{k}_{z'-p,w'}(x)$. А именно, если мы обозначим

$$D^{\mathrm{Jac}}_{z'-p,w'} = x(1-x)\frac{d^2}{dx^2} + (w'+1-(w'+z'-p+2)x)\frac{d}{dx},$$

то будет иметь место следующее предложение (см., например, [13, (1.8.5)]).

Предложение 6.3.

$$D^{\mathrm{Jac}}_{z'-p,w'}(\mathrm{Jac}^{i}_{z'-p,w'}) = -K_{p,z',w'}(i)\mathrm{Jac}^{i}_{z'-p,w'}.$$

Положим теперь

$$\mathcal{D}_{z',w',p} = \sum_{i=1}^{p} x_i(1-x_i)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + (w'+1-(w'+z'-p+2)x_i)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Напомним, что если $X=(x_1,\dots,x_p)$, то $V(X) = \prod_{i>j}(x_i-x_j)$.

Теорема 6.4. *Генератор нашей полугруппы действует на функции по формуле*

$$G_{p,z',w'}(f) = \frac{1}{V(X)}\cdot\mathcal{D}_{z',w',p}(V(X)\cdot f) + K_{p,z',w'}f,$$

а область определения генератора $G_{p,z',w'}$ *состоит из всех таких функций* $f\in L_2(\mathcal{W}_p,\mu_{p,z',w'})$, *что*

$$\frac{1}{V(X)}\cdot\mathcal{D}_{z',w',p}(V(x)\cdot f) + K_{p,z',w'}f \in L_2(\mathcal{W}_p,\mu_{p,z',w'}).$$

Замечание. После упрощений генератор $G_{p,z',w'}$ может быть также записан в форме

$$G_{p,z',w'}(f) = \mathcal{D}_{z',w',p}(f) + \sum_{i=1}^{p} \left(x_i(1-x_i) \sum_{j\neq i} \frac{1}{x_i - x_j} \right) \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$G_{p,z',w'}(\mathrm{Jac}^{\lambda}_{z-p',w'}) = \frac{1}{V(X)} \cdot \mathcal{D}_{z',w',p}\big(V(x) \cdot \mathrm{Jac}^{\lambda}_{z-p',w'}\big) + K_{p,z',w'} \mathrm{Jac}^{\lambda}_{z-p',w'}.$$

В самом деле,

$$\frac{1}{V(X)} \cdot \mathcal{D}_{z',w',p}\big(V(x) \cdot \mathrm{Jac}^{\lambda}_{z-p',w'}\big) + K_{p,z',w'} \mathrm{Jac}^{\lambda}_{z-p',w'} = \frac{\mathcal{D}_{z',w',p} \det[\mathrm{Jac}^{\lambda_i+p-i}_{z'-p,w'}(x_j)]_{i,j=1,\dots,p}}{V(X)} + K_{p,z',w'} \mathrm{Jac}^{\lambda}_{z-p',w'}.$$

Запишем определитель как знакопеременную сумму произведений:

$$A_\sigma = \prod_{j=1}^{p} \mathrm{Jac}^{\lambda_j+p-j}_{z'-p,w'}(x_{\sigma(j)})$$

(здесь $\sigma \in S_p$ – произвольная перестановка).

Пользуясь предложением 6.2, заключаем, что

$$\mathcal{D}_{z',w',p} A_\sigma = \left(-\sum_{j=1}^{p} K_{p,z',w'}(\lambda_j + p - j) \right) A_\sigma.$$

Следовательно,

$$\frac{\mathcal{D}_{z',w',p} \det[\mathrm{Jac}^{\lambda_i+p-i}_{z'-p,w'}(x_j)]_{i,j=1,\dots,p}}{V(X)} + K_{p,z',w'} \mathrm{Jac}^{\lambda}_{z-p',w'} = \left(K_{p,z',w'} - \left(\sum_{j=1}^{p} K_{p,z',w'}(\lambda_j + p - j) \right) \right) \mathrm{Jac}^{\lambda}_{z-p',w'} = G_{p,z',w'}(\mathrm{Jac}^{\lambda}_{z-p',w'}).$$

□

7. Интерпретация построенного процесса как h-преобразования Дуба

В этом разделе мы объясняем, что процесс $J_{p,z',w'}(t)$ можно рассматривать как p независимых одинаково распределенных диффузий, на которые наложено (в смысле Дуба) условие отсутствия столкновений частиц, т. е. процесс совпадает с *h-преобразованием Дуба* p независимых процессов.

Предложение 7.1. *Имеет место следующее равенство:*

$$\mathcal{D}_{z',w',p}V(X) = -K_{p,z',w'}V(X).$$

Доказательство. Это утверждение следует из предложения 6.2 и теоремы 6.4, но мы также представим и независимое доказательство.

Лемма 7.2. *Для произвольных $a, b, c \in \mathbb{R}$ положим*

$$(Gf)(X) = \sum_{i=1}^{p}(x^2+ax+b)\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \left(-\frac{2}{3}(p-2)x_i + c\right)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Тогда $GV(X) = 0$.

Доказательство. См. [10, Lemma 3.1]. Обратим внимание на то, что в текст статьи [10] вкралась опечатка, в формуле был пропущен знак минус. □

Из леммы 7.2 следует, что

$$\mathcal{D}_{z',w',p}V(X) = \left(-\frac{2}{3}(p-2) - (w'+z'-p+2)\right)\sum_{i=1}^{p} x_i\frac{\partial}{\partial x_i}V(X)$$
$$= -\frac{p(p-1)}{2}\left(-\frac{1}{3}(p-2)+w'+z'\right)V(X).$$

Для завершения доказательства подсчитаем явно $K_{p,z',w'}$:

$$K_{p,z',w'} = \sum_{i=0}^{p-1}K_{p,z',w'}(i) = \sum_{i=0}^{p-1}(i^2+i(w'+z'-p+1))$$
$$= \frac{p(p-1)(2p-1)}{6} + \frac{p(p-1)}{2}(w'+z'-p+1)$$
$$= \frac{p(p-1)}{2}\left(\frac{2p-1}{3}-p+1+w'+z'\right) = \frac{p(p-1)}{2}\left(-\frac{1}{3}(p-2)+w'+z'\right). \quad \square$$

Возьмем теперь p независимых диффузионных процессов с одинаковыми генераторами $D^{\mathrm{Jac}}_{z'-p,w'}$. Будем называть такие диффузии процессами Якоби, их можно рассматривать как решения некоторого стохастического дифференциального уравнения.

Совместный инфинитезимальный генератор этих p диффузий – это в точности $\mathcal{D}_{z',w',p}$. Из предложения 7.1 следует, что мы можем сконструировать новый процесс, который является разновидностью h-преобразования Дуба p диффузий. Здесь функция h – это $V(X)$. По определению инфинитезимальный генератор h–преобразования Дуба для $h = V(X)$ в точности совпадает с $G_{p,z',w'}$. h-Преобразование Дуба и его свойства были изучены во множестве работ, см., например, [4, 10].

Итак, наш процесс $J_{p,z',w'}(t)$ может быть отождествлен с h-преобразованием Дуба p независимых диффузий. Во многих примерах h-преобразование Дуба совпадает с условным процессом при условии отсутствия столкновений между компонентами (частицами). Понятно, что в нашем случае столкновения отсутствуют, траектории процесса $J_{p,z',w'}(t)$ являются наборами из p непересекающихся путей. Однако вопрос о том, является ли процесс $J_{p,z',w'}(t)$ в точности условным процессом, полученным из p независимых диффузий наложением условия отсутствия столкновений, остается открытым.

8. Приложение. Некоторые формулы для полиномов Хана и Якоби

Приведенные ниже формулы могут быть найдены, например, в статье [13].

Лемма 8.1. *Для $\alpha > -1$, $\beta > -1$ справедливо соотношение*

$$(Q^k_{\alpha,\beta,M}, Q^l_{\alpha,\beta,M}) = \sum_{x=0}^{M} \frac{\Gamma(\alpha+x+1)\Gamma(\beta+N-x+1)}{\Gamma(x+1)\Gamma(N-x+1)} Q^k_{\alpha,\beta,M}(x) Q^l_{\alpha,\beta,M}(x)$$
$$= \frac{(-1)^k (k+\alpha+\beta+1)_{M+1}(\beta+1)_k k!\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)(\alpha+1)_k(-M)_k M!}\delta_{kl}.$$

Лемма 8.2. *Для* $x, y \in \{0, 1, \ldots, M\}$ *справедливо соотношение*

$$\sum_{k=0}^{M} \frac{(2k+\alpha+\beta+1)(\alpha+1)_k(-M)_k M!}{(-1)^k(k+\alpha+\beta+1)_{M+1}(\beta+1)_k k!} Q_k(x,\alpha,\beta,M) Q_k(y,\alpha,\beta,M) = \\ = \frac{\delta_{xy}}{\dfrac{(\alpha+1)_x(\beta+1)_{M-x}}{x!(M-x)!}}.$$

Следующая лемма была доказана в [8, лемма 8].

Лемма 8.3.

$$xQ_k(x-1;\alpha,\beta,M-1) + (M-x)Q_k(x;\alpha,\beta,M-1) \\ = MQ_k(x;\alpha,\beta,M).$$

Доказательство предложения 4.2. Напомним, что нашей целью является доказательство равенства

$$\sum_{i=0}^{N+p-1} c_i^N f_N^i(x) f_{N+1}^i(y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{(w'+x+1)(x+1)}{(x+N)(w'+z'+N+1)}}, & y = x+1, \\ \sqrt{\frac{(z'+N-x)(p+N-x)}{(p+x)(w'+z'+N+1)}}, & y = x, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{6}$$

Сначала мы выражаем левую часть равенства (6) через полиномы $Q^k_{\alpha,\beta,M}$. По определению

$$f_N^k(x) = \frac{Q^k_{w',z'-p,N+p-1}(x)\sqrt{w_N(x)}}{\sqrt{(Q^k_{w',z'-p,N+p-1}, Q^k_{w',z'-p,N+p-1})}}.$$

Из леммы 8.1 мы находим значение $(Q^k_{w',z'-p,N+p-1}, Q^k_{w',z'-p,N+p-1})$. Далее, полином $Q^k_{w',z'-p,N+p}$ можно выразить через $Q^k_{w',z'-p,N+p-1}$, используя лемму 8.3. Применение леммы 8.2 завершает доказательство. □

Следующая лемма в несколько видоизмененном виде может быть найдена в [13].

Лемма 8.4. *Для* $\alpha > -1$, $\beta > -1$ *имеет место соотношение*

$$\int_0^1 (1-x)^\alpha x^\beta \mathrm{Jac}^k_{\alpha,\beta}(x) \mathrm{Jac}^l_{\alpha,\beta}(x) \\ = \frac{\Gamma(k+\alpha+1)\Gamma(k+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)\Gamma(k+\alpha+\beta+1)k!}\delta_{kl}.$$

Литература

1. A. Borodin, G. Olshanski, *Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes.* — Ann. Math. **161**, No. 3 (2005), 1319–1422; `arXiv:math/0109194`.
2. A. Borodin, G. Olshanski, *Infinite-dimensional diffusions as limits of random walks on partitions.* — To appear in Probab. Theory Related Fields; `arXiv:0706.1034`.
3. A. Borodin, G. Olshanski, *Markov processes on partitions.* — Probab. Theory Related Fields **135**, No. 1 (2006), 84–152; `arXiv: math-ph/0409075`.
4. J. L. Doob, *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 262. Springer-Verlag, New York, 1984.
5. B. Eynard, M. L. Mehta, *Matrices coupled in a chain. I. Eigenvalue correlations.* — J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 4449–4456.
6. J. Fulman, *Stein's method and Plancherel measure of the symmetric group.* — Trans. Amer. Math. Soc. **357** (2005), 555–570; `arXiv: math.RT/0505423`.
7. J. Fulman, *Commutation relations and Markov chains.* — To appear in Probab. Theory Related Fields; `arXiv:0712.1375`.
8. В. Е. Горин, *Непересекающиеся пути и ансамбль ортогональных многочленов Хана.* — Функц. анал. и его прил. **42** (2008), вып. 3, 23–44; `arXiv:0708.2349`.
9. K. Johansson, —it Discrete polynuclear growth and determinantal processes. — Comm. Math. Phys. **242** (2003), 277–329; `arXiv:math/0206208`.
10. W. Kõnig, N. O'Connell, *Eigenvalues of the Laguerre process as non-colliding squared Bessel processes.* — Electron. Commun. Probab. **6** (2001), No. 11, 107–114.
11. W. D. König, *Orthogonal polynomial ensembles in probability theory.* — Probab. Surv. **2** (2005), 385–447.
12. S. Kerov, G. Olshanski, A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group.* — Invent. Math. **158**, No. 3 (2004), 551–642; `arXiv:math/0312270`.
13. R. Koekoek, R. F. Swarttouw, *The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue*,
`http://aw.twi.tudelft.nl/~koekoek/reports.html`.
14. M. L. Metha, *Random Matrices*, 2nd edition, Academic Press, Boston, MA, 1991.
15. И. Макдональд, *Симметрические функции и многочлены Холла*, Мир, Москва, 1985.
16. А. Ф. Никифоров, С. К. Суслов, В. Б. Уваров, *Классические ортогональные полиномы дискретной переменной*, Наука, Москва, 1985.
17. G. Olshanski, *The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group.* — J. Funct. Anal. **205**, No. 2 (2003), 464–524; `arXiv:math/0109193`.
18. L. Petrov, *A two-parameter family of infinite-dimensional diffusions in the Kingman simplex*, `arXiv:0708.1930`.
19. А. Б. Сошников, *Детерминантные случайные точечные поля.* — Успехи мат. наук **55** (2000), вып. 5(335), 107–160.
20. C. A. Tracy, H. Widom, *Differential equations for Dyson processes.* — Comm. Math. Phys. **252** (2004), 7–41; `arXiv:math/0309082`.
21. Д. П. Желобенко, *Компактные группы Ли и их представления*, Наука, Москва, 1970.

Gorin V. E. Non-colliding Jacobi processes as limits of Markov chains on the Gelfand–Tsetlin graph.

We introduce a stochastic dynamics related to the measures that arise in the harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group. Our dynamics is obtained as a limit of a sequence of natural Markov chains on the Gelfand–Tsetlin graph.

We compute the finite-dimensional distributions of the limit Markov process, as well as the generator and eigenfunctions of the semigroup related to this process.

The limit process can be identified with the Doob h-transform of a family of independent diffusions. The space-time correlation functions of the limit process have a determinantal form.

Московский государственный
университет,
Независимый московский университет
E-mail: vadicgor@gmail.com

Поступило 19 декабря 2008 г.