Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 359, 2008 г.

**М. Н. Яковлев**

# ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ МЕТОДА РИТЦА ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Для метода Ритца, использующего функции $\sqrt{2}\sin k\pi t$, $k = 1, 2, \dots$, получена оценка погрешности при отыскании минимума функционала

$$J(u) = \int\limits_0^1 [u'(t)]^2 dt + \int\limits_0^1 q(t)u^2(t)dt - 2\int\limits_0^1 f(t)u(t)dt$$

в пространстве $\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,1)$ в следующих предположениях:

$$\begin{aligned}
&f(t) \in L^2(0,1),\\
&q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) + q_5(t),\\
&0 \leqslant q_1(t)t(1-t) \in L(0,1),\\
&0 \leqslant q_2(t)t^2(1-t)^2 \in C[0,1],\\
&0 \geqslant q_3(t), \quad \int\limits_0^1 q_3(t)t(1-t)\,dt = d_1 > -\infty,\\
&0 \geqslant q_4(t)t^2(1-t)^2 \geqslant d_2 > -\infty,\\
&q_5(t) \in C[0,1], \quad |q_5(t)| \leqslant d_3,\\
&c \equiv 1 + d_1 + 4d_2 - \frac{d_3}{\pi^2} > 0,\\
&q^2(t)t(1-t) \in L(0,1).
\end{aligned}$$

В работе обобщаются и усиливаются результаты, полученные академиками Н. М. Крыловым [1] и Л. В. Канторовичем [2].

**Лемма 1.** *Пусть*

$$u(t) \in W^2_{2,0}(0,1) \equiv \{u(t) \in W^2_2(0,1), \quad u(0) = u(1) = 0\},$$

$$S_N(t) = 2\sum_{k=1}^{N} \int_0^1 u(t)\sin k\pi t\, dt\, \sin k\pi t.$$

*Тогда*

$$\int_0^1 [u'(t) - S_N'(t)]^2 dt \leqslant \frac{1}{\pi^2(N+1)^2} \int_0^1 |u''(t)|^2 dt, \qquad (1)$$

$$\int_0^1 [u(t) - S_N(t)]^2 dt \leqslant \frac{1}{\pi^4(N+1)^4} \int_0^1 |u''(t)|^2 dt. \qquad (2)$$

**Лемма 2** (усиление неравенства (32) §4 гл. IV книги [2])**.** *Пусть* $u(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$. *Тогда*

$$|u(t)|^2 \leqslant \left(\int_0^1 |u(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |u'(t)|^2 dt\right)^{1/2}. \qquad (3)$$

**Доказательство.** Из того, что $u(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ следует, что $u(0) = u(1) = 0$. Поэтому

$$|u(t)|^2 = \left|\int_0^t 2u(t)u'(t)\, dt\right| \leqslant 2\int_0^t |u(t)||u'(t)|\, dt,$$

$$|u(t)|^2 = \left|\int_t^1 2u(t)u'(t)\, dt\right| \leqslant 2\int_t^1 |u(t)||u'(t)|\, dt.$$

Отсюда следует, что

$$|u(t)|^2 \leqslant \int_0^1 |u(t)||u'(t)|\, dt \leqslant \left(\int_0^1 |u(t)|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_0^1 |u'(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

**Теорема 1.** *Пусть выполнены следующие условия:*

$$q(t) = q_1(t) + q_2(t) + q_3(t) + q_4(t) + q_5(t), \tag{4}$$

$$0 \leqslant q_1(t)t(1-t) \in L(0,1), \tag{5}$$

$$0 \leqslant q_2(t)t^2(1-t)^2 \in C[0,1], \tag{6}$$

$$0 \geqslant q_3(t), \quad \int_0^1 q_3(t)t(1-t)\,dt = d_1 > -\infty, \tag{7}$$

$$0 \geqslant q_4(t)t^2(1-t)^2 \geqslant d_2 > -\infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{8}$$

$$q_5(t) \in C[0,1], \quad |q_5(t)| \leqslant d_3 < +\infty, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \tag{9}$$

$$f(t)\sqrt{t(1-t)} \in L(0,1) \tag{10}$$

*и пусть*

$$c \equiv 1 + d_1 + 4d_2 - \frac{d_3}{\pi^2} > 0. \tag{11}$$

*Тогда*

(1) *в пространстве функций* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ *существует одна и только одна функция* $u_0(t)$, *на которой функционал*

$$J(u) \equiv \int_0^1 [u'(t)]^2\,dt + \int_0^1 q(t)u^2(t)\,dt - 2\int_0^1 f(t)u(t)\,dt \tag{12}$$

*достигает минимума в* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$;

(2) *для всех* $v(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ *уравнение*

$$\int_0^1 u'(t)v'(t)\,dt + \int_0^1 q(t)u(t)v(t)\,dt = \int_0^1 f(t)v(t)\,dt \tag{13}$$

*относительно* $u(t) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ *имеет одно и только одно решение, и этим решением является функция* $u_0(t)$, *на которой функционал* $J(u)$ *достигает минимума в пространстве* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$;

(3) *если*

$$f(t) \in L^2(0,1), \quad q^2(t)t(1-t) \in L(0,1), \tag{14}$$

*то* $u_0(t) \in W^2_{2,0}(0,1)$ *и верна оценка*

$$\int\limits_0^1 |u_0''(t)|^2 dt \leqslant D$$

$$\equiv 2\int\limits_0^1 f^2(t)dt + \frac{2}{c^2}\int\limits_0^1 q^2(t)t(1-t)\,dt\left(\int\limits_0^1 |f(t)|\sqrt{t(1-t)}dt\right)^2; \tag{15}$$

(4) *если*

$$q(t) \in C(0,1), \quad f(t) \in C(0,1), \tag{16}$$

*то* $u_0(t)$ *является решением краевой задачи*

$$-u_0''(t) + q(t)u_0(t) = f(t), \quad 0 < t < 1, \tag{17}$$

$$u_0(0) = u_0(1) = 0, \tag{18}$$

*и это решение единственно в* $\overset{\circ}{W}{}^1_2(0,1)$.

Доказательства утверждений теоремы содержатся в работах [3–5].

Пусть теперь

$$u_N(t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{N} c_k^{(N)} \sin k\pi t$$

– функция, полученная методом Ритца при минимизации функционала $J(u)$ на всех функциях вида

$$\sqrt{2}\sum_{k=1}^{N} a_k \sin k\pi t.$$

Тогда $J(u_N) \leqslant J(S_N)$, а поскольку

$$J(u_N) = \int\limits_0^1 [u_0'(t) - u_N'(t)]^2 dt + \int\limits_0^1 q(t)[u_0(t) - u_n(t)]^2 dt$$

$$-\int\limits_0^1 [u_0(t)]^2 dt - \int\limits_0^1 q(t)[u_0(t)]^2 dt,$$

$$J(S_N)=\int\limits_0^1 [u_0'(t)-S_N'(t)]^2dt+\int\limits_0^1 q(t)[u_0(t)-S_N(t)]^2dt$$

$$-\int\limits_0^1 [u_0'(t)]^2dt-\int\limits_0^1 q(t)u_0^2(t)\,dt,$$

то мы имеем

$$\int\limits_0^1 [u_0'(t)-u_N'(t)]^2dt+\int\limits_0^1 q(t)[u_0(t)-u_N(t)]^2dt$$

$$\leqslant \int\limits_0^1 [u_0'(t)-S_N'(t)]^2dt+\int\limits_0^1 q(t)[u_0(t)-S_N(t)]^2dt$$

$$\leqslant \left[1+\int\limits_0^1 |q(t)|t(1-t)dt\right]\int\limits_0^1 [u_0'(t)-S_N'(t)]^2dt$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2(1+N)^2}\left[1+\int\limits_0^1 |q(t)|t(1-t)\,dt\right]\int\limits_0^1 [u_0''(t)]^2dt$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^2(1+N)^2}\left[1+\int\limits_0^1 |q(t)|t(1-t)\,dt\right]D.$$

Пусть $z(t)$ – единственная функция из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ на которой функционал

$$\int\limits_0^1 [z'(t)]^2dt+\int\limits_0^1 q(t)z^2(t)\,dt-2\int\limits_0^1 z(t)[u_0(t)-u_N(t)]\,dt$$

достигает минимума в пространстве $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$. Тогда

$$\int\limits_0^1 [u_0(t)-u_N(t)]^2dt=\int\limits_0^1 [z'(t)-z_N'(t)][u_0'(t)-u_N'(t)]\,dt$$

$$+\int\limits_0^1 q(t)[z(t)-z_N(t)][u_0(t)-u_N(t)]\,dt.$$

При $f(t) \in L^2(0,1)$, $q^2(t)(1-t)t \in L(0,1)$ получим

$$\int_0^1 [u_0(t)-u_N(t)]^2 dt \leqslant \frac{1}{\pi^2(N+1)^2}\left(1+\int_0^1 |q(t)t(1-t)\,dt\right) D^{1/2}$$
$$\times\left(2+\frac{1}{3c^2}\int_0^1 q^2(t)t(1-t)\,dt\right)^{1/2}\left(\int_0^1 [u_0(t)-u_N(t)]^2 dt\right)^{1/2}$$
$$\equiv \frac{1}{(N+1)^2} M\left(\int_0^1 [u_0(t)-u_N(t)]^2 dt\right)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что

$$\int_0^1 [u_0(t)-u_N(t)]^2 dt \leqslant \frac{1}{(N+1)^4} M^2.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 2.** *Пусть выполнены условия* (4)–(9), (11), (14). *Тогда верны следующие оценки погрешности метода Ритца:*

$$|u_0(t)-u_N(t)|^2 \leqslant (1-t)t\int_0^1 [u_0'(t)-u_N'(t)]^2 dt$$
$$\leqslant \frac{t(1-t)}{c}\left(\int_0^1 [u_0'(t)-u_N'(t)]^2 dt + \int_0^1 q(t)[u_0(t)-u_N(t)]^2 dt\right)$$
$$\leqslant \frac{t(1-t)}{c\pi^2(N+1)^2}\left(1+\int_0^1 |q(t)|t(1-t)\,dt\right)$$
$$\times\left[2\int_0^1 f^2(t)\,dt + \frac{2}{c^2}\int_0^1 q^2(t)t(1-t)\,dt\left(\int_0^1 |f(t)|\sqrt{t(1-t)}\,dt\right)^2\right]$$
$$\equiv \frac{R^2}{(1+N)^2}(1-t)t, \qquad (19)$$

$$\int_0^1 [u_0(t) - u_N(t)]^2\,dt \leqslant \frac{1}{\pi^4(N+1)^4}\left(1 + \int_0^1 |q(t)|t(1-t)\,dt\right)$$
$$\times\left[2\int_0^1 f^2(t)\,dt + \frac{2}{c^2}\int_0^1 q^2(t)t(1-t)\,dt\left(\int_0^1 |f(t)|\sqrt{t(1-t)}\,dt\right)^2\right]^{1/2}$$
$$\times\left(2 + \frac{1}{3c^2}\int_0^1 q^2(t)t(1-t)\,dt\right)^{1/2} \equiv \frac{1}{(N+1)^4}M^2. \qquad (20)$$

**Следствие.** *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда*

$$|u_0(t) - u_N(t)|^2 \leqslant \frac{1}{(N+1)^3}MR. \qquad (21)$$

Неравенство (21) следует из леммы 2 и неравенств (19) и (20).

## Литература

1. Н. М. Крылов, *Избранные труды.* Т. 2. Киев, 1980.
2. Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа.* М., 1962.
3. М. Н. Яковлев, *Разрешимость сингулярных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $2m$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **309** (2004), 174–188.
4. М. Н. Яковлев, *Первая краевая задача для нелинейного сингулярного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **334** (2006), 233–245.
5. М. Н. Яковлев, *Метод конечных элементов для сингулярных краевых задач.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **346** (2007), 149–159.

Yakovlev M. N. An error bound of the Ritz method for a singular second-order differential equation.

The paper presents an error bound of the Ritz method for the problem of minimizing the functional

$$J(u) = \int_0^1 [u'(t)]^2 dt + \int_0^1 q(t)u^2(t)dt - 2\int_0^1 f(t)u(t)dt$$

in the space $\overset{\circ}{W}{}_2^1(0,1)$ in the case where the standard assumption on the continuity of $q(t)$ is replaced by the condition $q^2(t)t(1-t) \in L(0,1)$. In the case where $q(t)$ is continuous, the new bound is sharper than the known one.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 20 октября 2008 г.