УДК 511.3

Граница представимости больших чисел тернарными квадратичными формами и неоднородные уравнения Варинга. Голубева Е. П. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 5–21.

Доказано, что при больших простых p уравнение $n = x^2 + y^2 + 6pz^2$ имеет решения, если, во-первых, $(n, 6p) = 1$, во-вторых, сравнение $n \equiv x^2+y^2+6pz^2 \pmod{16}$ имеет решения и, в-третьх, если $nm^{12} > p^{21}$, где $n = tm^2$.

В качестве следствия доказано, что для любого фиксированного k уравнение $n = x^2+y^2+u^3+v^3+z^4+w^{16}+t^{4k+1}$ имеет неотрицательные решения для всех достаточно больших n. Библ. — 13 назв.

УДК 519

О плоской выпуклой кривой с большим числом целых точек. Голубева Е. П. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 22–32.

Пусть γ – замкнутая выпуклая кривая на плоскости и $N_M = N_M(\gamma)$ – число точек на γ вида $(u/M, /M)$, где u и v – целые.

В работе построен пример гладкой кривой, для которой существует бесконечная последовательность M таких, что $N_M > M^{\log 2/\log 3} (\log 2/\log 3 > 0.639)$. Ранее было известно, что N_M существенно зависит от гладкости γ. В частности, Свиннертон–Дайер (1974) показал, что, если функция, определяющая γ, имеет третью непрерывную производную, то $N_M = O(M^{0.6})$. В общем случае известен результат $N_M = o(M^{2/3})$ (Ф. В. Петров, 2006). Библ. – 10 назв.

УДК 517.54

Об одной теореме искажения в классе типично вещественных функций. Голузина Е. Г. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 33–45.

Пусть T – класс функций $f(z)$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, регулярных и типично вещественных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, т.е. удовлетворяющих в U условию

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Исследовано множество D значений системы $\{f(z_0),\ f'(z_0),\ f(r_1), f(r_2), \ldots, f(r_n)\}$, $n \geqslant 2$, при заданных значениях $z_0 \in U$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, и r_j, $0 < r_j < 1$, $j = 1, 2, \ldots, n$, $f \in T$. Дана алгебраическая характеристика множества D с помощью неотрицательных эрмитовых форм, описаны все граничные функции. В качестве приложения найдено множество значений $f'(z_0)$ в классе T при фиксированных значениях $f(z_0)$ и $\{f(r_j)\}_1^n$. Библ. – 10 назв.

УДК 517.54

Об инвариантности компактов, порождающих нормальные кольцевые открытые множества, при квазиизометриях. Дёмшин И. Н., Шлык В. А. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 46–53.

В статье рассмотрена задача дробления и синтеза нормальных кольцевых открытых множеств и инвариантности компактов, порождающих эти множества, при квазиизометриях. Библ. –5 назв.

УДК 517.54

К задачам об экстремальном разбиении. Дубинин В. Н., Кириллова Д. А. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 54–74.

Работа посвящена развитию техники емкостей конденсаторов и симметризации в решении задач об экстремальном разбиении. В отличие от предыдущих исследований рассматриваются также задачи о максимуме произведения радиусов Робена взамен конформных радиусов неналегающих областей в круге либо в кольце. Вводятся и оцениваются сверху новые инварианты относительно группы дробно-линейных автоморфизмов сферы Римана. В частности, для этих инвариантов исследуются задачи об экстремальном разбиении со свободными полюсами на окружности. Библ. – 19 назв.

УДК 517.54

Геометрические критерии устранимых множеств. Дымченко Ю. В., Шлык В. А. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 75–89.

В статье установлены точные геометрические характеристики устранимых множеств. Библ. – 5 назв.

УДК 517.5

О приближении периодических функций интерполяционными суммами типа Джексона. Жук В. В. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 90–114.

Пусть

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$$

– ядро Фейера, C – пространство непрерывных 2π-периодических функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$; $t_k = \frac{2\pi k}{n+1}$,

$$J_n(f,x) = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(t_k)\Phi_n(x-t_k)$$

– полиномы Джексона функции f,

$$\sigma_n(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)\,dt$$

– суммы Фейера функции f.

В работе устанавливаются оценки сверху для величин типа

$$|f(x) - J_n(f,x)|,\ |J_n(f,x) - \sigma_n(f,x),\ \|f - J_n(t)\|,\ \|J_n(t) - \sigma n(f)\|$$

точные по порядку для каждой функции $f \in C$. При этом серьёзное внимание уделяется постоянным, входящим в получаемые неравенства. Библ. – 14 назв.

УДК 517.5

Приближение периодических функций в равномерной метрике полиномами типа Джексона. Жук В. В. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 115–142.

Пусть C – пространство непрерывных 2π- периодических функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}}$, $t_k = \frac{2\pi k}{n+1}$

$$J_n(f,x) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} f(t_k) \left(\frac{\sin \frac{(n+1)}{2}(x-t_k)}{\sin \frac{(x-t_k)}{2}} \right)^2$$

– полиномы Джексона функции f, $\omega_r(f,h)$ – модуль непрерывности порядка r функции f, $E_n(t)$ – наилучшее приближение f в пространстве C тригонометрическими полиномами порядка n, $\widetilde{F}$ – функция тригонометрически сопряженная с первообразной для функции f. В работе устанавливаются результаты следующего типа

$$E_n(f) + \|J_{4n-1}(f) - f\| \asymp \omega_1\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) + (n+1)\omega_2\Big(\widetilde{F}, \frac{1}{n+1}\Big),$$

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \|J_n(f,\cdot+\alpha) - f,\cdot+\alpha))\| \asymp \omega_1\Big(f, \tfrac{1}{n+1}\Big) + (n+1)\omega_2\Big(\widetilde{F}, \tfrac{1}{n+1}\Big).$$

Библ. – 7 назв.

УДК 517.54

Принципы мажорации и некоторые неравенства для полиномов и рациональных функций с предписанными полюсами. Калмыков С. И. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 143–157.

В работе изучены случаи равенства в принципе мажорации для мероморфных функций, доказанном в недавней работе В. Н. Дубинина и С. И. Калмыкова (*Мат. сб.* **198**, No. 12 (2007), с. 37–46). В качестве следствий этого принципа установлены новые неравенства для коэффициентов и производных полиномов, удовлетворяющих заданным условиям на двух отрезках. Приведены простые доказательства некоторых теорем А. Л. Лукашова о производных рациональных функций на нескольких отрезках. Библ. — 13 назв.

УДК 517.54

О симметричных конфигурациях в задачах об экстремальном разбиении.II. Кузьмина Г. В. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 158–179.

Рассматриваются задачи об экстремальном разбиении со свободными параметрами, в которых в качестве функций от областей фигурируют приведенные модули двуугольников относительно их вершин. Исследуется роль симметричных конфигураций в указанных задачах. Библ. – 11 назв.

УДК 517.3

Вычисление нулей L-функции, ассоциированной с кубической тета-функцией. Проскурин Н. В. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 180–194.

В работе изложен метод вычисления значений и нулей L-функции, ассоциированной с кубической тета-функцией Куботы–Паттерсона. Сформулировано несколько гипотез о распределении нулей этой L-функции, основанных на вычислениях. Библ. — 12 назв.

УДК 511.466+517.863

О квадратичных сравнениях. Фоменко О. М. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 195–200.

Рассмотрим сравнение $f^2+2rf-\beta\equiv 0 \pmod n$, где $r\in\mathbb{Z}$; β, $n\in\mathbb{N}$, причем n нечетное, и $r^2+\beta$ и β не являются квадратами. Пусть $\rho_+(n)$ – число решений сравнения $f^2+2rf-\beta\equiv 0 \pmod n$, $0<f\leqslant n$, с условием $(f/n)=1$ (где $(\cdot/\cdot)$ – символ Якоби); $\rho_-(n)$ – аналогичная величина, но с условием $(f/n)=-1$;

$$T_+(x):=\sum_{n\leqslant x}{}'\rho_+(n),$$
$$T_-(x):=\sum_{n\leqslant x}{}'\rho_-(n),$$

где $\sum'$ означает суммирование по нечетным n. Известно, что

$$T_+(x)+T_-(x)=cx+O(x^{1/2}),$$

где $c>0$. Доказано, что

$$T_+(x)=\frac{1}{2}cx+O\bigl(x^{1/2+\varepsilon}\bigr),$$
$$T_-(x)=\frac{1}{2}cx+O\bigl(x^{1/2+\varepsilon}\bigr).$$

Библ. – 5 назв.

УДК 511.466+517.863

Теоремы о средних значениях для одного класса рядов Дирихле. Фоменко О. М. — В кн.: Аналитическая теория чисел и теория функций. 23. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 357), СПб., 2008, с. 201–223.

Пусть K_n – поле алгебраических чисел степени n,

$$\zeta_{K_n}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k, K_n)}{k^s}$$

– дзета-функция Дедекинда поля K_n. Известно, что

$$\sum_{k \leqslant x} d(k, K_n) = C_n \cdot x + \Delta(x, K_n),$$

где $C_n > 0$ и $\Delta(x, K_n) \ll x^{\frac{n-1}{n+1}}$ (Ландау). Чандрасекхаран и Нарасимхан (1964) доказали, что для $n \geqslant 3$

$$\int_1^x \Delta(y, K_2)^2 \, dy \ll x^{3-\frac{4}{n}} \log^n x$$

(Лау (1999) довел степень логарифма до $\log^{n-1} x$). Автор в случае кубического поля K_3 отрицательного дискриминанта с группой Галуа S_3 доказывает асимптотику

$$\int_1^x \Delta(y, K_3)^2 dy = Cx^{\frac{5}{3}} + O\big(x^{\frac{8}{5}+\varepsilon}\big),$$

где $C > 0$.

В качестве следствия получено утверждение:
величина $x^{-1/3}\Delta(x, K_3)$ имеет предельное распределение. Библ. – 21 назв.