Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

О. М. Фоменко

ТЕОРЕМЫ О СРЕДНИХ ЗНАЧЕНИЯХ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА РЯДОВ ДИРИХЛЕ

§1 Введение, результаты

Ряды Дирихле, которые мы рассматриваем в данной работе, принадлежат классу Сельберга S [1]. Пишем, как обычно, $s = \sigma + it$ и $\overline{f}(s) = \overline{f(\overline{s})}$. Класс Сельберга S состоит из функций $F(s)$, удовлетворяющих следующим условиям.

(i) (Ряд Дирихле) Для $\sigma > 1$ $F(s)$ является абсолютно сходящимся рядом Дирихле

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n) n^{-s}.$$

(ii) (Аналитическое продолжение) Для некоторого целого $m \geqslant 0$, $(s-1)^m F(s)$ является целой функцией конечного порядка.

(iii) (Функциональное уравнение) $F(s)$ удовлетворяет функциональному уравнению вида

$$\Phi(s) = \omega \overline{\Phi}(1-s),$$

где

$$\Phi(s) = Q^s \prod_{j=1}^{r} \Gamma(\lambda_j s + \mu_j) F(s),$$

с $Q > 0$, $\lambda_j > 0$, $\operatorname{Re} \mu_j \geqslant 0$ и $|\omega| = 1$.

(iv) (Гипотеза Рамануджана) Для каждого $\varepsilon > 0$, $a(n) \ll n^{\varepsilon}$.

(v) (Эйлеровское произведение) Для достаточно большого σ,

$$\log F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s},$$

где $b(n) = 0$, если n не является положительной степенью простого числа, и $b(n) \ll n^{\theta}$ для некоторого $\theta < \frac{1}{2}$.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 08-01-00233).

Степень d функции $F \in S$ определяется как $d = 2\sum_{j=1}^{r} \lambda_j$; m_F означает порядок полюса функции F в точке $s = 1$.

Определим $S(x)$ как сумму вычетов функции $F(s)x^s/s$ и остаточный член $E(x)$ как

$$E(x) = {\sum_{n \leqslant x}}' a(n) - S(x);$$

$\sum'$ означает, что последний член должен умножаться на $1/2$, если $x = n$. В случае $m_F \neq 0$, $E(x)$ является остаточным членом для сумматорной функции коэффициентов ряда Дирихле $F(s)$. Очевидно,

$$S(x) = F(0) + xP_F(\log x),$$

где P_F – полином степени $m_F - 1$.

Поведение остаточного члена $E(x)$ описывается следующими известными результатами.

Теорема A. *Пусть $F \in S$ имеет степень d и $\varepsilon > 0$ любое, но фиксированное. Тогда для $x \geqslant 1$*

$$E(x) \ll x^{\frac{d-1}{d+1}+\varepsilon}.$$

Эта теорема принадлежит Ландау [2] и первоначально была получена с вещественными μ_j (последнее ограничение снято в [3]).

Теорема B. *Пусть $F \in S$ имеет степень d и $\varepsilon > 0$ любое, но фиксированное. Тогда для $x \geqslant 1$,*

$$\int_1^x |E(y)|^2 dy = \begin{cases} O(x^{2-1/d}), & \text{если } 0 < d < 3, \\ O(x^{3-4/d+\varepsilon}), & \text{если } d \geqslant 3. \end{cases}$$

Это результат Чандрасекхарана и Нарасимхана [4] (см. также [3]).

Впервые теорему A для случая $F(s) = \zeta^2(s)$ доказал Вороной (1904), а теорему B также для случая $F(s) = \zeta^2(s)$ – Крамéр (1922) (причем Крамéр получил даже асимптотику).

Усилить общие теоремы A и B – трудная задача. Пусть здесь и ниже k – целое число. Теоремы A и B были несколько улучшены для семейства функций $F(s) = \zeta^k(s)$ ($k \geqslant 2$) (см. главы, посвященные проблемам делителей, в книгах [5, 6]).

В настоящей работе рассматриваются уточнения теорем A и B для представителей двух семейств $F \in S$:

i) $F(s)$ – дзета-функция Дедекинда;

ii) $F(s) = L^k(s, f)$ $(k \geqslant 1)$, где $L(s, f)$ – L-функция Гекке голоморфной примитивной параболической формы f четного веса относительно $SL(2, \mathbb{Z})$.

Пусть K_n – поле алгебраических чисел степени n; дзета-функция Дедекинда задается посредством

$$\zeta_{K_n}(s) = \sum_{\mathfrak{a}} (N\mathfrak{a})^{-s} \quad (\sigma > 1),$$

где суммирование идет по всем ненулевым целым идеалам $\mathfrak{a}$ в K_n. Можно записать

$$\zeta_{K_n}(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k, K_n)}{k^s},$$

где $d(k, K_n)$ – число целых идеалов в K_n нормы k. Известно, что $\zeta_{K_n}(s)$ – мероморфная функция с простым полюсом в точке $s = 1$ с вычетом, скажем, Λ_n; она удовлетворяет функциональному уравнению

$$\xi(s) = \xi(1 - s),$$

где

$$\xi(s) = \Gamma^{r_1}\Big(\frac{1}{2}s\Big)\Gamma^{r_2}(s) B^{-s} \zeta_{K_n}(s),$$

$B = 2^{r_2}\pi^{n/2}(|\Delta|)^{-1/2}$, r_1 – число вещественных сопряженных поля K_n, $2r_2$ – число мнимых сопряженных, Δ – дискриминант.

Сформулируем результат Чандрасекхарана и Нарасимхана в оригинальной форме работы [4]. Представим

$$D(x, K_n) := \sum_{k \leqslant x} d(k, K_n)$$

в виде суммы главного и остаточного членов

$$D(x, K_n) =: M(x, K_n) + \Delta(x, K_n) = \Lambda_n x + \Delta(x, K_n).$$

Чандрасекхаран и Нарасимхан доказали, что

$$\int_1^x \Delta(y, K_2)^2 \, dy = C x^{3/2} + O(x \log^3 x), \tag{1.1}$$

где $C > 0$; для $n \geqslant 3$

$$\int_1^x \Delta(y, K_n)^2 dy \ll x^{3-4/n} \log^n x. \tag{1.2}$$

К настоящему времени в (1.1), (1.2) были сделаны лишь небольшие уточнения: Лау [7] снизил в (1.1) степень логарифма до $\log^2 x$, а в (1.2) – до $\log^{n-1} x$ $(n \geqslant 3)$.

Теорема A для $F(s) = \zeta_{K_n}(s)$ в оригинальной форме самого Ландау формулируется так:

$$\Delta(x, K_n) \ll x^{\frac{n-1}{n+1}}. \tag{1.3}$$

Ее уточнением для $K_2 = \mathbb{Q}(i)$ занимались многие математики (проблема круга !). В случае любого квадратичного поля K_2 теперь существует результат Хаксли и Ватта [8]:

$$\Delta(x, K_2) \ll x^{\frac{23}{73}} (\log x)^{\frac{461}{146}}.$$

Других уточнений (1.3) не было.

Основным результатом настоящей работы является замена оценки (1.2) асимптотикой в случае K_3. Пусть $\sigma(K_n)$ – нижняя грань таких σ, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\int_1^T \left|\zeta_{K_n}(\sigma + it)\right|^2 dt \ll T^{1+\varepsilon}.$$

Известно [9], что $\sigma(K_n) \leqslant 1 - \frac{1}{n}$.

Теорема 1. *Пусть K_3 – кубическое поле над $\mathbb{Q}$, задаваемое присоединением корня кубического полинома $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ отрицательного дискриминанта с группой Галуа S_3. При $\sigma(K_3) \leqslant \frac{2}{3}$ и любом фиксированном $\varepsilon > 0$ имеем*

$$\int_1^x \Delta^2(y, K_3) dy = \frac{|\Delta|^{1/3}}{10\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2(n, K_3)}{n^{4/3}} x^{5/3} + R(x, K_3)$$

с

$$R(x, K_3) \ll x^{c+\varepsilon},$$

где

$$c = 2 - \frac{3 - 4\sigma(K_3)}{6(1-\sigma(K_3)) - 1};$$

беря

$$\sigma(K_3) \leqslant \frac{5}{8} \ \ (\text{см. [10]}),$$

имеем

$$c \leqslant \frac{8}{5}.$$

Замечание 1. Аналогично трактуется случай кубического поля K_3 с циклической группой Галуа C_3.

Доказательство теоремы 1 дается в §2. Оно опирается на метод Тонга [11, III], рассмотревшего случай $F(s) = \zeta^k(s)$ $(k \geqslant 2)$, и излагается в сжатом виде.

Следствием теоремы 1 и метода Хис-Брауна [12] является следующее

Предложение 1. *Величина $x^{-1/3}\Delta(x, K_3)$ имеет предельное распределение с плотностью $p(\alpha)$; иначе говоря, для любого интервала I справедливо соотношение*

$$X^{-1}\text{mes}\left\{x \in [1, X] : x^{-1/3}\Delta(x, K_3) \in I\right\} \to \int\limits_I p(\alpha)d\alpha$$

при $X \to \infty$. Плотность $p(\alpha)$ и ее производные удовлетворяют условию убывания

$$\frac{d^k}{d\alpha^k}p(\alpha) \ll (1 + |\alpha|)^{-A}$$

для $k = 0, 1, 2, \ldots$ и любой константы A, причем $\ll$-константа зависит от A и k. Кроме того, $p(\alpha)$ продолжается на всю плоскость $\mathbb{C}$ как целая функция.

Переходим к семейству функций $F(s) = L^k(s, f)$, $k \geqslant 1$, где

$$L(s, f) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n, f)n^{-s}$$

– L-функция Гекке голоморфной примитивной параболической формы

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d(n, f)n^{(\varkappa-1)/2}e^{2\pi i n z}$$

четного веса $\varkappa \geqslant 12$ относительно $SL(2,\mathbb{Z})$. $L(s,f) \in S$ и является целой функцией; ее функциональное уравнение приводится в §3. Введем обозначения

$$\begin{aligned}
&L^k(s,f) =: \sum_{n\geqslant x} d_k(n,f)n^{-s}, \quad k \geqslant 1,\\
&d_1(n,f) = d(n,f);\\
&\sum_{n\leqslant x} d_k(n,f) =: \Delta_k(x,f).
\end{aligned}$$

Определим порядок $\alpha(L^k)$ величины $\Delta_k(x,f)$ как наименьшее число такое, что

$$\Delta_k(x,f) \ll x^{\alpha(L^k)+\varepsilon}$$

для каждого положительного ε. Определим $\beta(L^k)$, средний порядок величины $\Delta_k(x,f)$, как наименьшее число такое, что

$$\frac{1}{x}\int_1^x \Delta_k^2(y,f)dy \ll x^{2\beta(L^k)+\varepsilon}$$

для каждого положительного ε. Очевидно,

$$\beta(L^k) \leqslant \alpha(L^k), \quad k \geqslant 1.$$

Теорема 2.

$$\begin{array}{lll}
\text{(i)} & \beta(L) = \dfrac{1}{4}, & \alpha(L) \leqslant \dfrac{1}{3};\\
\text{(ii)} & \beta(L^2) = \dfrac{3}{8}, & \alpha(L^2) \leqslant \dfrac{1}{2};\\
\text{(iii)} & \dfrac{5}{12} \leqslant \beta(L^3) \leqslant \dfrac{1}{2}, & \alpha(L^3) \leqslant \dfrac{5}{8};\\
\text{(iv)} & \beta(L^k) \geqslant \dfrac{2k-1}{4k}, & \alpha(L^k) \leqslant \dfrac{2k-1}{2k+2} \ \text{ для } \ k \geqslant 4.
\end{array}$$

Замечание 2. Результат (i) принадлежит Вальфишу [13] и приведен здесь для полноты.

Очевидно, утверждения теоремы 2 усиливают (кроме $\alpha(L) \leqslant \frac{1}{3}$) теоремы A и B для $F(s) = L^k(s,f)$.

Доказательство теоремы 2 использует приемы, известные в проблемах делителей (см. [5]), и современные результаты о средних значениях $L(s,f)$. Оно приведено в §3.

Обобщенной гипотезой Линделёфа для $L(s,f)$ называется утверждение:

$$L\Big(\frac{1}{2}+it,f\Big) \ll |t|^{\varepsilon}$$

для каждого положительного ε.

Предложение 2. *Альтернативными необходимыми и достаточными условиями справедливости обобщенной гипотезы Линделёфа для $L(s,f)$ являются*

$$\alpha(L^k) \leqslant \frac{1}{2} \qquad (k=1,2,3,\dots);$$
$$\beta(L^k) \leqslant \frac{1}{2} \qquad (k=1,2,3,\dots);$$
$$\beta(L^k) = \frac{2k-1}{4k} \qquad (k=1,2,3,\dots).$$

Доказательство повторяет соответствующие рассуждения из [5].

Гипотеза.

$$\alpha(L^k)=\beta(L^k)=\frac{2k-1}{4k} \quad (k=1,2,3,\dots).$$

Обозначения. К обозначениям, введенным выше, добавим еще несколько.

δ, ε, ε', ε_0, ε_1, $\varepsilon_2,\dots$ означают сколь угодно малые положительные фиксированные числа;

α, β, C', C'', C_σ, $C_{\sigma,k}$ – некоторые положительные постоянные.

§2. Доказательство теоремы 1

Представим функциональное уравнение для $\zeta_{K_3}(s)$ в следующем виде

$$\frac{1}{2\pi i}\zeta_{K_3}(1-s) = f(3,s)\cdot\zeta_{K_3}(s),$$

где

$$f(3,s) = \frac{1}{2\pi i}\pi^{-3/2}2^{2-s}B^{1-2s}\cos^2\frac{\pi s}{2}\sin\frac{\pi s}{2}\Gamma^3(s).$$

Пусть Γ_j $(j = 0, 1, 2, \dots)$ – ориентированная ломаная с вершинами в точках $-j-i\infty$, $-j-i(j+2)$, $j+\frac{3}{2}-i(j+2)$, $j+\frac{3}{2}+i(j+2)$, $-j+i(j+2)$, $-j+i\infty$;

$$J_{3,h}(u,x) := \int\limits_{\Gamma_0} u^{-s}x^{1-s}\frac{f(3,s)}{(1-s)^{h+1}}\,ds = \int\limits_{\Gamma_j} u^{-s}x^{1-s}\frac{f(3,s)}{(1-s)^{h+1}}\,ds,$$

где $x > 1$, $u > 1$, $h = 0, 1, 2$.

Для $y > 1$

$$\widetilde{y} := y + \frac{1}{x}(y_1 + y_2 + y_3),$$

$$\int\limits_{E_3} g(\widetilde{y})dY := \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 g(\widetilde{y})dy_1dy_2dy_3.$$

Из общих результатов Хафнера [14] (или опираясь на метод Тонга [11, I]) можно вывести следующее соотношение

$$J_{3.0}(n,x) = \frac{|\Delta|^{1/6}}{\sqrt{3}\,\pi}\,\frac{x^{1/3}}{n^{2/3}}\cos\left(6\pi\Big(\frac{nx}{|\Delta|}\Big)^{1/3} - \frac{\pi}{2}\right) + O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$
$$n = 1, 2, 3, \dots. \qquad (2.1)$$

Аналоги соотношений (10.1)–(10.4) работы [11, III] имеют место и в нашем случае:

$$J_{3.h}(u,x) \ll x^{\frac{1}{3}-\frac{h}{3}}\,u^{-\frac{2}{3}-\frac{h}{3}}; \qquad (2.2)$$

$$\int\limits_{E_3} J_{3,h}(u,\widetilde{y})dY \ll x^3\,y^{\frac{7}{3}-\frac{h}{3}}\,u^{-\frac{5}{3}-\frac{h}{3}}; \qquad (2.3)$$

$$\frac{d^j}{dx^j}\,\frac{d}{du}J_{3.0}(u,x) \sim \sum_{m=0}^{\infty}\operatorname{Re}\left\{c_{jm}\frac{(ux)^{\frac{2}{3}-\frac{j+m}{3}}}{u^2x^j}\cdot e^{-6\pi i(\frac{ux}{|\Delta|})^{1/3}+\frac{\pi}{2}i}\right\}$$
$$(j = 0, 1, 2, \dots); \qquad (2.4)$$

$$\int\limits_{E_3}\frac{d}{du}J_{3,0}(u,\widetilde{y})dY$$
$$\sim\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{3}\operatorname{Re}\Big\{c'_{lm}\frac{x^3(y+lx^{-1})^{8/3-m/3}}{u^{7/3+m/3}}\,e^{-6\pi i(\frac{u(y+lx^{-1})}{|\Delta|})^{1/3}+\frac{\pi}{2}i}\Big\}. \qquad (2.5)$$

Пусть
$$1 < x \leqslant y \leqslant (1+\delta)x. \tag{2.6}$$
В процессе доказательства рассматриваемые числа M удовлетворяют условиям
$$\Delta(M, K_3) = 0; \tag{2.7}$$
$$\frac{1}{2} \leqslant M = M(x) \leqslant \sqrt{N}, \tag{2.8}$$
где
$$N = x^{5-\varepsilon}. \tag{2.9}$$
Используя схему доказательства теоремы 1[11, I] или леммы 1 [15], имеем
$$\begin{aligned}\int\limits_{E_3} \Delta(\widetilde{y}, K_3)dY - \zeta_{K_3}(0) &= \sum_{n=1}^{\infty} d(n, K_3) \int\limits_{E_3} J_{3,0}(n, \widetilde{y})dY \\ &= \sum_{n\leqslant M} \cdots + \sum_{n>M} \cdots =: \sum + \sum{}'.\end{aligned} \tag{2.10}$$
Используя (2.1), (2.6) и
$$d(n, K_3) \ll n^{\varepsilon}, \tag{2.11}$$
легко получаем
$$\begin{aligned}&\sum - \frac{|\Delta|^{1/6}}{\sqrt{3}\,\pi} \sum_{n\leqslant M} \frac{d(n, K_3)y^{1/3}}{n^{2/3}} \cos\left(6\pi\Big(\frac{ny}{|\Delta|}\Big) - \frac{\pi}{2}\right) \\ &\ll x^{-4/3}M^{2/3+\varepsilon} + M^{1/6+\varepsilon}.\end{aligned} \tag{2.12}$$
Напомним, что
$$\sum_{n\leqslant x} d(n, K_3) = M(x, K_3) + \Delta(x, K_3) = \Lambda_3 x + O(x^{1/2}). \tag{2.13}$$
Сумму $\sum'$ трактуем с помощью абелева суммирования. Имеем
$$\sum{}' = \int\limits_{M}^{\infty} M'(u, K_3)\Big(\int\limits_{E_3} J_{3.0}(u, \widetilde{y})dY\Big)du -$$

$$-\left(\int\limits_M^N+\int\limits_N^\infty\right)\Delta(u,K_3)\left(\int\limits_{E_3}\frac{d}{du}J_{3,0}(u,\widetilde{y})dY\right)du=:I_1-(I_2+I_3),\quad(2.14)$$

причем мы использовали (2.3) и (2.7). Сумма I_1 легко оценивается с помощью (2.2), (2.3), (2.6) и формулы

$$J_{3,h}(u,y)=\frac{1}{u}\int\limits_0^u J_{3,h-1}(v,y)dv\quad(0<h<3).$$

Справедлива оценка

$$I_1=\int\limits_M^\infty\Lambda_3\left(\int\limits_{E_3}J_{3,0}(u,\widetilde{y})dY\right)du\ll 1.\qquad(2.15)$$

Обратимся к сумме

$$I_2=\int\limits_M^N\Delta(u,K_3)\left(\int\limits_{E_3}\frac{d}{du}J_{3,0}(u,\widetilde{y})dY\right)du.$$

По формуле Тейлора, (2.4) и (2.6),

$$\frac{d}{du}J_{3,0}(u,\widetilde{y})=\sum_{0\leqslant j\leqslant 18\varepsilon^{-1}}\frac{d^j}{dy^j}\,\frac{d}{du}J_{3,0}(u,y)\cdot\frac{(\widetilde{y}-y)^j}{j!}$$

$$+\frac{d^{[18\varepsilon^{-1}]+1}}{dv^{[18\varepsilon^{-1}]+1}}\,\frac{d}{du}J_{3,0}(u,v)\Big|_{\substack{v=y\theta+\widetilde{y}(1-\theta)\\(0<\theta<1)}}\cdot\frac{(\widetilde{y}-y)^{[18\varepsilon^{-1}]+1}}{([18\varepsilon^{-1}]+1)!};$$

$$I_2=\sum_{0\leqslant j\leqslant 18\varepsilon^{-1}}c_j\int\limits_M^N x^{-j}\Delta(u,K_3)\frac{d^j}{dy^j}\,\frac{d}{du}J_{3,0}(u,y)$$

$$+O\left(\max_{y\leqslant v\leqslant y+3x^{-1}}\int\limits_M^N x^{-[18\varepsilon^{-1}]-1}\left|\Delta(u,K_3)\frac{d^{[18\varepsilon^{-1}]+1}}{dv^{[18\varepsilon^{-1}]+1}}\,\frac{d}{du}J_{3,0}(u,v)\right|du\right)$$

$$= \sum_{\substack{0\leqslant j,\\ m\leqslant 18\varepsilon^{-1}}} \mathrm{Re}\left\{c_j c_{jm}\int\limits_M^N \Delta(u,K_3)\frac{(uy)^{\frac{2}{3}+\frac{j-m}{3}}}{u^2(xy)^j}e^{-6\pi i(\frac{uy}{|\Delta|})^{\frac{1}{3}}+\frac{\pi}{2}i}du\right\}+x^{-1/6}O(L),$$

где

$$L=\max_{0\leqslant j\leqslant 18\varepsilon^{-1}}\int\limits_M^N \big|\Delta(u,K_3)\big|\frac{(ux)^{\frac{5}{6}-\frac{[18\varepsilon^{-1}]+1}{3}}}{u^{\frac{13}{6}}}\left(\frac{(ux)^{1/3}}{x^2}\right)^j du$$

$$+\int\limits_M^N \big|\Delta(u,K_3)\big|\,\frac{(ux)^{\frac{5}{6}}}{u^{\frac{13}{6}}}\left(\frac{(ux)^{1/3}}{x^2}\right)^{[18\varepsilon^{-1}]+1}du.$$

Пользуясь (2.8), (2.9), (2.13), доказываем оценку

$$L\ll 1.$$

Вводим следующий экспоненциальный интеграл: если $y>1$, $\frac{1}{2}\leqslant M<N\leqslant\infty$, то

$$I(\lambda,M,N,y):=2\pi i\int\limits_M^N\frac{u^\lambda\Delta(u,K_3)e^{-6\pi i(\frac{uy}{|\Delta|})^{1/3}+\frac{\pi}{2}i}}{u^{4/3}}du. \tag{2.16}$$

Обозначим $c_0c_{00}=:b$; тогда, в силу (2.6), (2.16) и сказанного выше,

$$I_2-\mathrm{Re}\left(\frac{b}{2\pi i}y^{2/3}I(0,M,N,y)\right)$$

$$=\sum_{\substack{0\leqslant j,m\leqslant 18\varepsilon^{-1}\\ j+m>0}}\mathrm{Re}\left\{\frac{c_jc_{jm}}{2\pi i}x^{-j}y^{\frac{2}{3}+\frac{j-m}{3}-j}I\Big(\frac{j-m}{3},M,N,y\Big)\right\}$$

$$+O\big(x^{-\frac{1}{6}}\big)\ll\sum_{\substack{0\leqslant j,m\leqslant 18\varepsilon^{-1}\\ j+m>0}}x^{\frac{2}{3}-\frac{m}{3}-j\frac{5}{3}}\Big|I\Big(\frac{j-m}{3},M,N,y\Big)\Big|+x^{-\frac{1}{6}}. \tag{2.17}$$

Аналогично, из (2.5), (2.16), (2.9), (2.13), (2.6) следует

$$I_3\ll\sum_{l,m=0}^{3}x^{\frac{17}{3}-\frac{m}{3}}\Big|I\Big(-1-\frac{m}{3},N,\infty,y+lx^{-1}\Big)\Big|+x^{-\frac{1}{6}}. \tag{2.18}$$

На основании (2.12), (2.14), (2.15), (2.17), (2.18) и (2.10) имеет место соотношение

$$\int\limits_{E_3} \Delta(\widetilde{y}, K_3)\,dY = f_3(y) + g_3(y), \tag{2.19}$$

где

$$f_3(y) = \frac{|\Delta|^{1/6}}{\sqrt{3}\,\pi} \sum_{n \leqslant M} \frac{d(n, K_3) y^{1/3}}{n^{2/3}} \cos\left(6\pi\Big(\frac{ny}{|\Delta|}\Big)^{1/3} - \frac{\pi}{2}\right)$$
$$- \operatorname{Re}\left(\frac{b}{2\pi i} y^{2/3} I(0, M, N, y)\right), \tag{2.20}$$

$$g_3(y) \ll \sum_{\substack{0 \leqslant j, m \leqslant 18\varepsilon^{-1} \\ j+m>0}} x^{\frac{2}{3} - \frac{m}{3} - j\frac{5}{3}} \left| I\Big(\frac{j-m}{3}, M, N, y\Big)\right|$$
$$+ \sum_{l,m=0}^{3} x^{17/3 - m/3} \left| I\Big(-1 - \frac{m}{3}, N, \infty, y + lx^{-1}\Big)\right|$$
$$+ x^{-\frac{1}{6}} + x^{-\frac{4}{3}} M^{\frac{2}{3}+\varepsilon} + M^{\frac{1}{6}+\varepsilon} + 1 + \zeta_{K_3}(0)$$
$$\ll \left\{A + B + x^{-\frac{8}{3}} M^{\frac{4}{3}+2\varepsilon} + M^{\frac{1}{3}+2\varepsilon}\right\}^{1/2}, \tag{2.21}$$

$$A := \sum_{\substack{0 \leqslant j, m \leqslant 18\varepsilon^{-1} \\ j+m>0}} x^{\frac{4}{3} - \frac{2m}{3} - 2j\frac{5}{3}} \left| I\Big(\frac{j-m}{3}, M, N, y\Big)\right|^2,$$

$$B := \sum_{l,m=0}^{3} x^{\frac{34}{3} - \frac{2m}{3}} \left| I\Big(-1 - \frac{m}{3}, N, \infty, y + lx^{-1}\Big)\right|^2.$$

Напомним, что

$$\frac{1}{2} \leqslant \sigma(K_3) \leqslant \frac{2}{3}. \tag{2.22}$$

В дальнейшем нам необходимы леммы 1–3, посвященные оценкам экспоненциальных интегралов. Эти леммы вполне аналогичны теоремам 1–3 работы [11, III].

Лемма 1. *Пусть* $M < N \leqslant x^6$ *и* n *– натуральное число с условием* $n \leqslant M/2$. *Тогда*

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x} I(0,M,N,y)y\cos\left(6\pi\Big(\frac{ny}{|\Delta|}\Big)^{1/3}-\frac{\pi}{2}\right)dy \ll x^{3/2+\varepsilon'}\cdot M^{\sigma(K_3)-5/6}.$$

Лемма 2. *Пусть* $M < N \leqslant x^6$. *Тогда*

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x} |I(\lambda,M,N,y)|^2dy \ll x^{1/3+\varepsilon'}\cdot \max_{M\leqslant R\leqslant N} R^{2\lambda+2(\sigma(K_3)-2/3)}.$$

Лемма 3. *Пусть* $N \leqslant x^6$, $\lambda+\sigma(K_3) < \frac{2}{3}$. *Тогда*

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x} |I(\lambda,N,\infty,y)|^2dy \ll x^{1/3+\varepsilon'}\cdot N^{2\lambda+2(\sigma(K_3)-2/3)}.$$

С учетом леммы 2, (2.8), (2.9) и (2.22), имеем

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x} Ady \ll x^{1+\varepsilon'}M^{4(\sigma(K_3)-2/3).}$$

С учетом леммы 3, (2.8), (2.9) и (2.22), имеем

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x} Bdy \ll x^{5/3+\varepsilon_1}M^{4(\sigma(K_3)-2/3)}.$$

Пользуясь (2.21), теперь получаем

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x} g_3^2(y)dy \ll x^{1+\varepsilon'}M^{1/3+2\varepsilon}+x^{5/3+\varepsilon_2}M^{4(\sigma(K_3)-2/3)}+x^{-5/3}M^{4/3+2\varepsilon}. \tag{2.23}$$

Пользуясь (2.20), имеем

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x} f_3^2(y)dy = \sum_{n\leqslant M} \frac{|\Delta|^{\frac13}}{3\pi^2} \int\limits_x^{(1+\delta)x} \frac{d^2(n,K_3)y^{\frac23}}{n^{\frac43}} \cos^2\left(6\pi\left(\frac{ny}{|\Delta|}\right)^{\frac13} - \frac{\pi}{2}\right)dy$$

$$+ \sum_{m<n\leqslant M} \frac{2|\Delta|^{1/3}}{3\pi^2} \frac{d(m,K_3)d(n,K_3)}{(mn)^{2/3}} \int\limits_x^{(1+\delta)x} y^{2/3}$$

$$\times \cos\left(6\pi\left(\frac{my}{|\Delta|}\right)^{1/3} - \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(6\pi\left(\frac{ny}{|\Delta|}\right)^{1/3} - \frac{\pi}{2}\right)dy$$

$$+ \int\limits_x^{(1+\delta)x} \left[\operatorname{Re}\left(\frac{b}{2\pi i} y^{2/3} I(0,M,N,y)\right)\right]^2 dy + \left(\sum_{n\leqslant \frac{M}{2}} + \sum_{\frac{M}{2}<n\leqslant M}\right) \frac{d(n,K_3)}{n^{\frac23}}$$

$$\times \operatorname{Re} \frac{-b|\Delta|^{\frac16}}{\sqrt{3}\,\pi^2 i} \int\limits_x^{(1+\delta)x} I(0,M,N,y) y \cos\left(6\pi\left(\frac{ny}{|\Delta|}\right)^{1/3} - \frac{\pi}{2}\right)dy$$

$$=: \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 + \sum\nolimits_3 + \left(\sum\nolimits_4 + \sum\nolimits_5\right). \tag{2.24}$$

Используя (2.11), легко доказываем

$$\sum\nolimits_1 - \frac{|\Delta|^{\frac13}}{6\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2(n,K_3)}{n^{\frac43}} \int\limits_x^{(1+\delta)x} y^{\frac23} dy \ll x^{\frac43} + x^{\frac53} M^{-\frac13+2\varepsilon}. \tag{2.25}$$

Сходным образом,

$$\sum\nolimits_2 \ll x^{\frac43} M^{\frac13+3\varepsilon}. \tag{2.26}$$

По лемме 2 и (2.22),

$$\sum\nolimits_3 \ll x^{\frac43} \int\limits_x^{(1+\delta)x} \left|I(0,M,N,y)\right|^2 dy \ll x^{\frac53+\varepsilon'} M^{2(\sigma(K_3)-2/3)}. \tag{2.27}$$

В силу леммы 1, (2.11) и (2.22),

$$\sum\nolimits_4 \ll x^{3/2+\varepsilon'} M^{\sigma(K_3)-\frac12+\varepsilon}. \tag{2.28}$$

По неравенству Коши,

$$\sum\nolimits_5^2 \ll x^{\frac{8}{3}} \int\limits_x^{(1+\delta)x} \left|I(0,M,N,y)\right|^2 dy$$

$$\times \int\limits_x^{(1+\delta)x} \Bigg[\sum_{\frac{M}{2}<n\leqslant M} \frac{d(n,K_3)}{n^{\frac{2}{3}}} \cos\Big(6\pi\Big(\frac{ny}{|\Delta|}\Big)^{1/3} - \frac{\pi}{2}\Big)dy\Bigg]^2 dy^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{8}{3}} \sum\nolimits_6 \cdot \sum\nolimits_7 .$$

По лемме 2 и (2.22),

$$\sum\nolimits_6 \ll x^{1/3+\varepsilon'} M^{2(\sigma(K_3)-2/3)}.$$

Используя (2.11), имеем

$$\sum\nolimits_7 \ll x^{1/3} M^{-1/3+2\varepsilon} + M^{1/3+3\varepsilon}.$$

Поэтому

$$\sum\nolimits_5 \ll \sqrt{x^{8/3} \sum\nolimits_6 \cdot \sum\nolimits_7} \ll x^{\frac{5}{3}+\varepsilon'} M^{\sigma(K_3)-\frac{5}{6}+\varepsilon} + x^{\frac{3}{2}+\varepsilon'} M^{\sigma(K_3)-\frac{1}{2}+2\varepsilon}. \quad (2.29)$$

Собирая (2.24)–(2.29) и (2.22), имеем

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x} f_3^2(y)dy - \frac{|\Delta|^{\frac{1}{3}}}{6\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n,K_3)^2}{n^{\frac{4}{3}}} \int\limits_x^{(1+\delta)x} y^{2/3} dy$$

$$\ll x^{\frac{4}{3}} M^{\frac{1}{3}+3\varepsilon} + x^{\frac{5}{3}+\varepsilon'} \cdot M^{2(\sigma(K_3)-\frac{2}{3})+3\varepsilon} + x^{\frac{3}{2}+\varepsilon'} M^{\sigma(K_3)-\frac{1}{2}+2\varepsilon}. \quad (2.30)$$

Лемма 4. *Найдутся положительные константы C и D такие, что для любого $T > T_0$ каждый интервал $[T, T+CT^{2/3}]$ содержит две точки t_1, t_2, для которых*

$$\Delta(t_1, K_3) > Dt_1^{1/3}, \quad \Delta(t_2, K_3) < -Dt_2^{1/3}.$$

Для доказательства применим аналогичный общий результат Ивича [16]. Все требования для справедливости этого результата в случае $\zeta_{K_3}(s)$ выполняются, кроме условия (i), которое еще нужно проверить.

Условие (i): $d(n,K_3) \ll n^{K+\varepsilon}$ для некоторой константы $K \geqslant 0$ и $d(n,K_3) \gg n^K$ для бесконечного множества чисел n.

Оценка сверху $d(n,K_3) \ll n^{\varepsilon}$ (см. (2.11)) общеизвестна. Равенство $d(p,K_3)=1$ для бесконечного множества простых чисел p следует из результата, приведенного в [10].

Из леммы 4 и свойства $d(n,K_3) \geqslant 0$ следует, что для любого $x > x_0$ всегда найдется M,

$$x^{\frac{1}{6(1-\sigma(K_3))-1}} \ll M \ll x^{\frac{1}{6(1-\sigma(K_3))-1}}, \tag{2.31}$$

для которого $\Delta(M,K_3)=0$. С учетом (2.22), это означает выполнение условий (2.7)–(2.9).

Продолжим доказательство теоремы 1. В силу (2.30), (2.31) и (2.22),

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x} f_3^2(y)dy = \frac{|\Delta|^{\frac{1}{3}}}{6\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{d^2(n,K_3)}{n^{\frac{4}{3}}}\int\limits_x^{(1+\delta)x} y^{2/3}dy$$
$$+O\left(x^{2-\frac{3-4\sigma(K_3)}{6(1-\sigma(K_3))-1}+\varepsilon_3}\right) \ll x^{\frac{5}{3}+\varepsilon_3}. \tag{2.32}$$

В силу (2.31) и (2.23),

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x} g_3^2(y)dy \ll x^{2-\frac{3-4\sigma(K_3)}{6(1-\sigma(K_3))-1}+\frac{2(\sigma(K_3)-\frac{2}{3})}{6(1-\sigma(K_3))-1}+\varepsilon_4}. \tag{2.33}$$

По неравенству Коши, теперь имеем

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x} f_3(y)\, g_3(y)dy \ll x^{2-\frac{3-4\sigma(K_3)}{6(1-\sigma(K_3))-1}+\varepsilon_5}. \tag{2.34}$$

Используя (2.19), (2.32)–(2.34) и (2.22), получаем

$$\int\limits_x^{(1+\delta)x}\left(\int\limits_{E_3}(\widetilde{y},K_3)dY\right)^2 dy = \int\limits_x^{(1+\delta)x}(f_3(y)+g_3(y))^2 dy$$

$$= \frac{|\Delta|^{\frac{1}{3}}}{6\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2(n, K_3)}{n^{\frac{4}{3}}} \int\limits_{x}^{(1+\delta)x} y^{\frac{2}{3}} dy + O\left(x^{2-\frac{3-4\sigma(K_3)}{6(1-\sigma(K_3))-1}+\varepsilon_6}\right). \qquad (2.35)$$

Если $[y] < y < [y] + 1 - 3x^{-1}$, то

$$\int\limits_{E_3} \Big(\Delta_3(\widetilde{y}, K_3) - \Delta_3(y, K_3)\Big) dY \ll x^{-1};$$

если же $[y] + 1 - 3x^{-1} \leqslant y \leqslant [y] + 1$, то по (2.11),

$$\int\limits_{E_3} \Big(\Delta_3(\widetilde{y}, K_3) - \Delta_3(y, K_3)\Big) dY \ll y^{\varepsilon}.$$

Поэтому, с учетом (2.13), имеем

$$\int\limits_{x}^{(1+\delta)x} \left(\int\limits_{E_3} \Big(\Delta(\widetilde{y}, K_3) dY\right)^2 - \int\limits_{x}^{(1+\delta)x} \Delta^2(y, K_3) dy \ll x^{1+2\varepsilon}.$$

Последняя оценка вместе с (2.35) влечет

$$\int\limits_{x}^{(1+\delta)x} \Delta^2(y, K_3) dy - \frac{|\Delta|^{\frac{1}{3}}}{6\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d^2(n, K_3)}{n^{\frac{4}{3}}} \int\limits_{x}^{(1+\delta)x} y^{\frac{2}{3}} dy \ll x^{2-\frac{3-4\sigma(K_3)}{6(1-\sigma(K_3))-1}+\varepsilon_7}.$$

Используя этот результат и (2.13), имеем

$$\int\limits_1^x \Delta^2(y,K_3)dy$$

$$= \sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{1}{\delta}\log x} \int\limits_{x/(1+\delta)^{j+1}}^{x/(1+\delta)^j} \Delta^2(y,K_3)dy + O\biggl(\int\limits_1^{x^\delta} \Delta^2(y,K_3)dy\biggr)$$

$$= \sum_{0\leqslant j\leqslant \frac{1}{\delta}\log x} \biggl\{ \frac{|\Delta|^{\frac13}}{6\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{d^2(n,K_3)}{n^{\frac43}} \int\limits_{x/(1+\delta)^{j+1}}^{x/(1+\delta)^j} y^{\frac23}dy$$

$$+ O\biggl[\Bigl(\bigl(1+\delta\bigr)^{-j}x\Bigr)^{2-\frac{3-4\sigma(K_3)}{6(1-\sigma(K_3))-1}+\varepsilon_7}\biggr]\biggr\} + O(x^{\varepsilon_8})$$

$$= \frac{|\Delta|^{\frac13}}{10\pi^2} \sum_{n=1}^\infty \frac{d^2(n,K_3)}{n^{\frac43}} x^{\frac53} + O\Bigl(x^{2-\frac{3-4\sigma(K_3)}{6(1-\sigma(K_3))-1}+\varepsilon_0}\Bigr),$$

и теорема доказана.

§3. Доказательство теоремы 2

Сначала введем необходимые определения. Пусть $\sigma(L^k)$ – нижняя грань чисел σ таких, что

$$\frac{1}{T}\int\limits_1^T \bigl|L^k(\sigma+it,f)\bigr|^2\,dt = O(1).$$

Определим $\gamma(L^k)$ как нижнюю грань положительных чисел σ, для которых

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\bigl|L^k(\sigma+it,f)\bigr|^2}{|\sigma+it|^2}dt < \infty.$$

Легко видеть [5, 17], что

$$\gamma(L^k) = \beta(L^k). \tag{3.1}$$

Приведем также функциональное уравнение для $L(s,f)$, где f – голоморфная примитивная параболическая форма четного веса $\varkappa \geqslant 12$ относительно $SL(2,\mathbb{Z})$:

$$L(s,f) = (-1)^{\frac{\varkappa}{2}} \frac{1}{(2\pi)^{1-2s}} \frac{\Gamma(\frac{\varkappa+1}{2}-s)}{\Gamma(\frac{\varkappa-1}{2}+s)} L(1-s,f). \tag{3.2}$$

Лемма 5.

$$\beta(L^k) \geqslant \frac{2k-1}{4k} \quad (k \geqslant 1).$$

Доказательство использует результат Гуда [18]. Имеем для $\frac{1}{2} < \sigma < 1$:

$$C_\sigma T \leqslant \int\limits_{\frac{1}{2}T}^{T} \left|L(\sigma+it,f)\right|^2 dt \leqslant \left\{ \int\limits_{\frac{1}{2}T}^{T} \left|L^k(\sigma+it,f)\right|^2 dt \right\}^{1/k} \left(\int\limits_{\frac{1}{2}T}^{T} dt \right)^{1-\frac{1}{k}}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\frac{1}{2}T}^{T} \left|L^k(\sigma+it,f)\right|^2 dt \geqslant 2^{k-1} C_\sigma^k T.$$

Следовательно, если $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $T > 1$, то

$$\begin{aligned}
\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\left|L^k(\sigma+it,f)\right|^2}{|\sigma+it|^2} dt &> \frac{C'}{T^2} \int\limits_{\frac{1}{2}T}^{T} \left|L^k(\sigma+it,f)\right|^2 dt \\
&> C'' T^{2k(1-2\sigma)-2} \int\limits_{\frac{1}{2}T}^{T} \left|L^k(1-\sigma-it,f)\right|^2 dt \text{ (по (3.2))} \\
&\geqslant C'' 2^{k-1} C_{1-\sigma}^k T^{2k(1-2\sigma)-1}.
\end{aligned}$$

Пусть $\sigma = (2k-1)/4k - \sigma_0$, тогда последняя величина равна

$$C_{\sigma,k} T^{4k\sigma_0}. \tag{3.3}$$

Если $\sigma_0 > 0$, то величина (3.3) может быть сделана сколь угодно большой вместе с T, откуда следует, что

$$\gamma(L^k) \geqslant \frac{2k-1}{4k},$$

и, по (3.1), лемма 5 доказана.

Лемма 6.
$$\alpha(L^k) \leqslant \frac{2k-1}{2k+2} \quad (k \geqslant 2).$$

Пусть $c = 1+\varepsilon > 1$, x – половина нечетного числа. По формуле Перрона,

$$\Delta_k(x,f) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c-iT}^{c+iT} L^k(s,f)\frac{x^s}{s}\,ds + O\Big(\frac{x^{1+\varepsilon}}{T}\Big),$$

где $O(\cdots) = O_{\varepsilon,k}(\cdots)$.

Берем теперь интеграл по границе прямоугольника с вершинами

$$\frac{1}{2} - iT, \quad c - iT, \quad c + iT, \quad \frac{1}{2} + iT.$$

Пусть $L(\frac{1}{2}+it) \ll t^{\lambda}$, $t \geqslant 1$. По принципу Фрагмена–Линделёфа, в прямоугольнике

$$\frac{1}{2} + i, \quad c + i, \quad c + iT, \quad \frac{1}{2} + iT$$

$$L(s) \ll t^{\lambda(c-\sigma)/(c-\frac{1}{2})}.$$

Вклад горизонтальных сторон составляет

$$O\bigg(\int\limits_{\frac{1}{2}}^{c} T^{k\lambda(c-\sigma)/(c-\frac{1}{2})-1} x^{\sigma}\,d\sigma\bigg) = O\big(T^{k\lambda-1}x^{1/2}\big) + O(T^{-1}x^{c}).$$

Далее,

$$\int\limits_{\frac{1}{2}-iT}^{\frac{1}{2}+iT} L^k(s,f)\frac{x^s}{s}\,ds = O(x^{1/2}) + O\bigg(x^{1/2}\int\limits_{1}^{T}\Big|L^k\Big(\frac{1}{2}+it,f\Big)\Big|\bigg)\frac{dt}{t}.$$

Имеем

$$\int\limits_{1}^{T}\Big|L^k\Big(\frac{1}{2}+it,f\Big)\Big|\frac{dt}{t} \leqslant \max_{1\leqslant t\leqslant T}\Big|L\Big(\frac{1}{2}+it,f\Big)\Big|^{k-2}\int\limits_{1}^{T}\Big|L^2\Big(\frac{1}{2}+it,f\Big)\Big|\frac{dt}{t}.$$

В силу результата Гуда [18],

$$\int_1^T \left|L^2\Big(\frac{1}{2}+it,f\Big)\right| dt \ll T^{1+\varepsilon},$$

поэтому

$$\int_1^T \left|L^2\Big(\frac{1}{2}+it,f\Big)\right| \frac{dt}{t} \ll T^{\varepsilon}.$$

Имеем теперь

$$\Delta_k(s,f) = O\Big(\frac{x^c}{T}\Big) + O\Big(x^{\frac{1}{2}}T^{k\lambda-1}\Big) + O\Big(x^{\frac{1}{2}}T^{(k-2)\lambda+\varepsilon}\Big).$$

Средний член меньшего порядка, чем последний, поскольку, как доказал Гуд [19],

$$\lambda = \frac{1}{3}+\varepsilon.$$

Беря

$$T = x^{1/\{2(k-2)\lambda+2\}},$$

имеем

$$\Delta_k(x,f) \ll x^{\frac{2k-1}{2k+2}+\varepsilon},$$

и лемма 6 доказана.

Лемма 7.

$$\beta(L^2) = \frac{3}{8}$$

Известно [20], что $\sigma(L^2) \leqslant \frac{5}{8}$. При $\sigma < \frac{3}{8}$, используя (3.2), имеем

$$\int_1^T \left|L^2(\sigma+it,f)\right|^2 dt = O\left(T^{4(1-2\sigma)}\right) \cdot \int_1^T \left|L^2(1-\sigma-it,f)\right|^2 dt$$
$$= O\left(T^{4(1-2\sigma)+1}\right).$$

Если $\sigma > \frac{3}{8}+\varepsilon$, то, по выпуклости средних значений [5, с. 149],

$$\int_1^T \left|L^2(\sigma+it,f)\right|^2 dt \ll T^{\alpha}, \quad \alpha < 2,$$

откуда

$$\int_{\frac{1}{2}T}^{T} \frac{\left|L^2(\sigma+it,f)\right|^2}{|\sigma+it|^2} dt \ll T^{-\beta}, \quad \beta > 0.$$

Поэтому $\gamma(L^2) \leqslant \frac{3}{8}$, откуда, по (3.1), $\beta(L^2) \leqslant \frac{3}{8}$, и в сочетании с леммой 5, получаем доказательство леммы 7.

Лемма 8.

$$\beta(L^3) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Для доказательства используем известный результат Ютилы [21]

$$\int_1^T \left|L^3\Big(\frac{1}{2}+it,f\Big)\right|^2 dt \ll T^{2+\varepsilon}$$

и очевидное неравенство

$$\sigma(L^3) \leqslant 1.$$

В силу выпуклости средних значений, получаем при $\sigma > \frac{1}{2}$

$$\int_{\frac{1}{2}T}^{T} \frac{\left|L^3(\sigma+it,f)\right|^2}{|\sigma+it|^2} dt \ll T^{-\beta}, \quad \beta > 0,$$

откуда следует $\gamma(L^3) \leqslant \frac{1}{2}$, и, по (3.1), лемма 8 доказана.

Из лемм 5–8 следует доказательство теоремы 2.

Литература

1. J. Kaczorowski, A. Perelli, *The Selberg class: a survey,* in: Number Theory in Progress, Vol. 2 (Zakopane–Kościelisko, 1997), de Gruyter, Berlin, 1999, 953–992.
2. E. Landau, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen.* — Gött. Nachr. (1912), 687–771.
3. A. de Roton, *On the mean square of the error term for an extended Selberg class.* — Acta Arithm. **126** (2007), 27–55.
4. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *On the mean value of the error term of a class of arithmetical functions.* — Acta Math. **112** (1964), 41–67.
5. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
6. A. Ivić, *The Riemann zeta-function.* Wiley, New York etc. (1985).

7. Y.-K. Lau, *On the mean square formula of the error term for a class of arithmetical functions.* — Monatsh. Math. **128** (1999), 111–129.
8. M. N. Huxley, N. Watt, *The number of ideals in a quadratic field.* — Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci) **104** (1994), 157–165.
9. K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *The approximate functional equation for a class of zeta-functions.* — Math. Ann. **152** (1963), 30–64.
10. О. М. Фоменко, *Средние значения, связанные с дзета-функцией Дедекинда.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **350** (2007), 187–198.
11. K.-C. Tong, *On divisor problems.* I, III. — Acta Math. Sinica **5** (1955), 313–324; **6** (1956), 515–541.
12. D. R. Heath-Brown, *The distribution and moments of the error term in the Dirichlet divisor problem.* — Acta Arithm. **60** (1992), 389–415.
13. A. Walficz, *Über die Koeffizientensummen einiger Modulformen.* — Math. Ann. **108** (1933), 75–90.
14. J. L. Hafner, *On the representation of the summatory functions of a class of arithmetical functions*, Analytic Number Theory, Lecture Notes in Math. Vol. 899, Springer, Berlin, 1981, 148–165.
15. О. М. Фоменко, *Теоремы о средних значениях для автоморфных L-функций.* — Алгебра и Анализ **19** (2007), No. 5, 243–261.
16. A. Ivić, *Large values of certain number-theoretic error terms.* — Acta Arithm. **56** (1990), 135–159.
17. K. Matsumoto, *Liftings and mean value theorems for automorphic L-functions.* — Proc. London Math. Soc. (3) **90** (2005), 297–320.
18. A. Good, *Approximative Funktionalgleichungen und Mittelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind.* — Comment. Math. Helvetici **50** (1975), 327–361.
19. A. Good, *The square mean of Dirichlet series associated with cusp forms.* — Mathematika **29** (1982), 278–295.
20. A. Ivić, *On zeta-functions associated with Fourier coefficients of cusp forms*, Proc. of the Amalfi Conf. on Analytic Number Theory (Maiori, 1989), Salerno, 1992, 231–246.
21. M. Jutila, *Lectures on a method in the theory of exponential sums.* Bombay, 1987.

Fomenko O. M. Mean value theorems for a class of Dirichlet series.

We obtain an asymptotic formula instead of the upper bounds of Chandrasekharan and Narasimhan (1964) and Lau (1999) for the mean square value of the error term associated with the Dedekind zeta-function of a cubic field K_3. We study also modular analogs of the classical divisor problems.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 28 июля 2008 г.