Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

О. М. Фоменко

О КВАДРАТИЧНЫХ СРАВНЕНИЯХ

§1

Ниже $\mathbb{Z}$ означает множество целых чисел, множество натуральных чисел обозначается через $\mathbb{N}$.

Рассмотрим сравнение

$$f^2 + 2rf - \beta \equiv 0 \pmod n,$$

где $r \in \mathbb{Z}$; $\beta, n \in \mathbb{N}$, причем здесь и ниже n нечетное, и $r^2 + \beta$ и β не являются квадратами. Рассмотрим сумму

$$\sigma(n) := \sum_{\substack{0<f\leqslant n \\ f^2+2rf-\beta\equiv 0 \pmod n}} \left(\frac{f}{n}\right),$$

где $\left(\frac{f}{n}\right)$ – символ Якоби.

В работе [1] была получена оценка

$$\sum_{n\leqslant x}{}' \sigma(n) \ll x^{\frac{5}{8}+\varepsilon},$$

где $\sum'$ означает суммирование по нечетным n, ε – сколь угодно малое постоянное положительное число.

Целью настоящей работы является улучшение указанного результата. Нами доказана следующая

Теорема.

$$\sum_{n\leqslant x}{}' \sigma(n) \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{1}$$

Следствием данного результата является новый факт о распределении решений квадратичных сравнений: решения f сравнений

$$f^2 + 2rf - \beta \equiv 0 \pmod n, \quad n \leqslant x,$$

с $(f/n) = \pm 1$ распределены на отрезке $1 \leqslant n \leqslant x$ асимптотически поровну. Подробнее, пусть $\rho_+(n)$ – число решений f сравнения

$$f^2 + 2rf - \beta \equiv 0 \pmod n, \quad 0 < f \leqslant n,$$

с условием $(f/n) = 1$;

$\rho_-(n)$ – число решений f сравнения

$$f^2 + 2rf - \beta \equiv 0 \pmod n, \quad 0 < f \leqslant n,$$

с условием $(f/n) = -1$;

$$T_+(x) := \sum_{n \leqslant x}{}' \rho_+(n),$$

$$T_-(x) := \sum_{n \leqslant x}{}' \rho_-(n).$$

В силу (1),

$$T_+(x) - T_-(x) \ll x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}. \tag{2}$$

С другой стороны,

$$T_+(x) + T_-(x) =: T(x),$$

где $T(x)$ – общее количество решений f сравнений

$$f^2 + 2rf - \beta \equiv 0 \pmod n, \quad 0 < f \leqslant n, \quad (f,n) = 1, \quad n \leqslant x.$$

Холи [2] показал, что

$$T(x) = cx + O\big(x^{\frac{3}{4}}\big).$$

Исмоилов [3] довел этот результат до

$$T(x) = cx + O\big(x^{\frac{1}{2}}\delta(x)\big), \tag{3}$$

где

$$\delta(x) = \exp\left(-c_0 \frac{(\log x)^{3/5}}{(\log\log x)^{1/5}}\right);$$

здесь c и c_0 – некоторые положительные константы. Поэтому, в силу (2) и (3), имеет место

Следствие.

$$T_+(x) = \frac{1}{2}cx + O\big(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big),$$

$$T_-(x) = \frac{1}{2}cx + O\big(x^{\frac{1}{2}+\varepsilon}\big).$$

§2

В настоящем параграфе дается доказательство теоремы.

Пусть, как обычно, $s = \sigma + it$;

$$Z(s) := \sum_{n=1}^{\infty}{}' \sigma(n) n^{-s}.$$

Из результатов работы [1] следует, что

$$Z(s) = L(s, F) U(s), \tag{4}$$

где $L(s, F)$ – L-функция Гекке некоторой голоморфной примитивной параболической формы Гекке веса 1 и характера χ относительно конгруэнц-подгруппы $\Gamma_0(N)$, $U(s)$ – некоторый ряд Дирихле, который абсолютно сходится в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$.

В [4] вводится вспомогательная C^∞ функция φ_u на $(0, \infty)$ для $u \geqslant 2$:

$$\varphi_u(y) = \begin{cases} 1 & \text{для} \ \ 0 < y \leqslant 1, \\ 0 & \text{для} \ \ y \geqslant 1 + 1/u; \end{cases}$$

ее производные удовлетворяют условию

$$\varphi_u^{(r)}(y) \ll u^r, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\ll$-константа зависит только от r. Если $M_u(s)$ – преобразование Меллина

$$M_u(s) = \int_0^\infty \varphi_u(y)\, y^{s-1}\, dy, \quad \sigma > 0,$$

то, как доказано в [4], для $r = 1, 2, \dots$

$$M_u(s) \ll \frac{1}{|s|} \left(\frac{u}{|s|} \right)^r \tag{5}$$

равномерно для $\frac{1}{2} \leqslant \sigma \leqslant 2$ и $u \geqslant 2$. Используя формулу обращения Меллина и (4), имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \sigma(n) \varphi_u(n/x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(2)} L(s, F) U(s) M_u(s) x^s\, ds, \tag{6}$$

где $\int\limits_{(\sigma_0)}$ означает интегрирование по прямой $\sigma = \sigma_0$ в направлении возрастания мнимой части s. Используя определение φ_u и оценку $\sigma(n) \ll n^{\varepsilon}$, имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \sigma(n)\varphi_u(n/x) = \sum_{n\leqslant x}{}' \sigma(n) + O\big(x^{1+\varepsilon}/u\big). \tag{7}$$

Подынтегральное выражение в (6) регулярно в полуплоскости $\sigma > \frac{1}{2}$. По свойству выпуклости, имеем в полосе $0 \leqslant \sigma \leqslant 1$

$$\big|L(\sigma + it, F)\big| \ll \big|t\big|^{1-\sigma+\varepsilon}.$$

Используя (6), (5) и последнюю оценку, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \sigma(n)\varphi_u(n/x) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(\sigma_0)} L(s,F)U(s)M_u(s)x^s\,ds, \tag{8}$$

где $\sigma_0 = \frac{1}{2} + \varepsilon_0$, ε_0 – сколь угодно малое постоянное положительное число. Для $\sigma = \sigma_0$ имеем

$$U(s) = O(1),$$

а также

$$\begin{aligned}
&|M_u(s)| \ll |s|^{-1}, \quad \text{если} \quad |t| \leqslant u;\\
&|M_u(s)| \ll |s|^{-1}(u\,|s|^{-1}), \quad \text{если} \quad |t| \geqslant u
\end{aligned}$$

(см. (5)).

Следовательно,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{(\sigma_0)} \big|L(\sigma_0 + it, F)U(s)M_u(s)x^s\big|ds\\
&\qquad \ll x^{\sigma_0}\Bigg(\int\limits_{|t|\leqslant u} \big|L(\sigma_0 + it, F)\big|\frac{dt}{1+|t|}\\
&\qquad\qquad + \int\limits_{|t|\geqslant u} \big|L(\sigma_0 + it, F)\big|\frac{u}{t^2}\,dt\Bigg) =: S.
\end{aligned} \tag{9}$$

Интегралы в сумме S оценим с помощью интегрирования по частям. Рассмотрим сначала интеграл

$$\int\limits_{|t|\leqslant u} \bigl|L(\sigma_0+it,F)\bigr|\frac{dt}{1+|t|}.$$

Достаточно оценить

$$\int\limits_1^u \bigl|L(\sigma_0+it,F)\bigr|\frac{dt}{t}.$$

Имеем

$$\psi(u):=\int\limits_1^u \bigl|L(\sigma_0+it,F)\bigr|dt\ll u.$$

Последнее следует из результата Гуда [5]: при $\frac{1}{2}<\sigma\leqslant 1$

$$\int\limits_0^T \bigl|L(\sigma+it,F)\bigr|^2dt\ll T.$$

Имеем

$$\int\limits_1^u \bigl|L(\sigma_0+it,F)\bigr|\frac{dt}{t}=\int\limits_1^u \psi'(t)\frac{dt}{t}$$

$$=\biggl[\frac{\psi(t)}{t}\biggr]_1^u+\int\limits_1^u\frac{\psi(t)}{t^2}\,dt=O(1)+O\biggl(\int\limits_1^u\frac{1}{t}\,dt\biggr)=O(\log u).$$

Аналогично,

$$u\int\limits_u^\infty \bigl|L(\sigma_0+it,F)\bigr|\frac{dt}{t^2}=u\biggl\{\biggl[\frac{\psi(t)}{t^2}\biggr]_u^\infty+2\int\limits_u^\infty\frac{\psi(t)}{t^3}dt\biggr\}=O(1).$$

Следовательно,

$$S\ll x^{\sigma_0}\log u. \tag{10}$$

Соединяя (8), (9) и (10), имеем

$$\sum_{n\leqslant x}{}'\sigma(n)\varphi_u(n/x)\ll x^{\sigma_0}\log u. \tag{11}$$

Соединяя (7) и (11) и выбирая $u=x^{1/2}$, доказываем теорему.

Литература

1. О. М. Фоменко, *О распределении корней квадратичного сравнения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **183** (1990), 155–164.
2. C. Hooley, *On the number of divisors of quadratic polynomials.* — Acta Math. **110** (1963), 97–114.
3. Д. Исмоилов, *Суммирование числа решений квадратичного сравнения.* — Докл. АН Тадж. ССР **21**, No. 9 (1978), 10–13.
4. K. Chandrasekharan, A. Good, *On the number of integral ideals in Galois extensions.* — Monatsh. Math. **95** (1983), 99–109.
5. A. Good, *Approximative Funktionalgleichungen und Mittelwertsätze für Dirichletreihen, die Spitzenformen assoziiert sind.* — Comment. Math. Helvetici **50** (1975), 327–361.

Fomenko O. M. On quadratic congruences.

We prove that under suitable assumptions, the solutions f of quadratic congruences $Q(f) \equiv 0 \pmod{n}$, $n \leqslant x$, with $(f/n) = \pm 1$ distribute asymptotically equally as $x \to \infty$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail:fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 28 июля 2008 г.