Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

Н. В. Проскурин

ВЫЧИСЛЕНИЕ НУЛЕЙ L-ФУНКЦИИ, АССОЦИИРОВАННОЙ С КУБИЧЕСКОЙ ТЕТА-ФУНКЦИЕЙ

Цель настоящей публикации – сообщить результаты вычислений нулей функции $L(\tau;\,\cdot\,)$, ассоциированной с кубической тета-функцией Куботы–Паттерсона, и изложить наш метод вычислений. О кубической тета-функции см. [1–3]. Функция $L(\tau;\,\cdot\,)$ определяется посредством ряда Дирихле

$$L(\tau;s)=\sum_{\nu}\frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^{s}},\tag{1}$$

сходящегося абсолютно в области $\operatorname{Re}s>1$, $s\in\mathbb{C}$, и продолжается мероморфно на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$. При этом функция

$$s\mapsto(2\pi)^{-2s}\,\Gamma(s-1/6)\,\Gamma(s+1/6)\,L(\tau;s)\tag{2}$$

оказывается инвариантной относительно замены s на $1-s$. Коэффициенты $\tau(\nu)$ в (1) суть коэффициенты Фурье кубической тета-функции. Суммирование в (1) распространяется на все ν вида

$$\nu=(\sqrt{-3}\,)^{-3}(x+\omega y)\quad\text{с}\quad x,y\in\mathbb{Z},\quad\omega=(-1+\sqrt{-3}\,)/2,\tag{3}$$

исключая точку 0. Под $\|\cdot\|$ понимается норменное отображение $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)\to\mathbb{Q}$, $\|z\|=z\overline{z}$ для $z\in\mathbb{Q}(\sqrt{-3}\,)$. В (2) и всюду далее Γ – гамма-функция Эйлера. Поясним также, что мы используем стандартные обозначения $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{C}$ для кольца целых рациональных, поля рациональных и поля комплексных чисел. Под i всегда понимается мнимая единица, т.е. $i=\sqrt{-1}$.

Функция $L(\tau;\,\cdot\,)$ была исследована автором в [4]. В частности, в [4] было показано, что все её нетривиальные нули лежат в полосе, определяемой неравенствами $|\operatorname{Re}s-1/2|<0.8533$. Список нетривиальных

Работа частично финансировалась грантом РФФИ 08-01-00233.

нулей функции $L(\tau;\,\cdot\,)$, лежащих в полосе $|\operatorname{Im} s| < 444$, приведён автором в [5]. Здесь мы изложим, в общих чертах, метод существенно более эффективный нежели тот, что был применён для составления списка из [5]. Этим методом вычислены все нетривиальные нули в пределах

$$|\operatorname{Im} s| < 1404. \tag{4}$$

Фактически, поскольку нетривиальные нули расположены на комплексной плоскости симметрично относительно вещественной оси и относительно критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$, достаточно было вычислить нули, лежащие на полупрямой

$$\operatorname{Re} s = 1/2, \quad \operatorname{Im} s \geq 0, \tag{5}$$

и нули, лежащие в квадранте

$$\operatorname{Re} s > 1/2, \quad \operatorname{Im} s \geq 0. \tag{6}$$

В пределах (4) обнаружено 1015 нулей $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{1015}$ в квадранте (6) и 3385 нулей на полупрямой (5). Списки нулей размещены на сайте `http://www.pdmi.ras.ru/~np`. Наши вычисления дают основание высказать следующую гипотезу.

Все нетривиальные нули функции $L(\tau;\,\cdot\,)$ простые и находятся внутри критической полосы, т.е. в полосе $\{s \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} s < 1\}$.

Ниже, на рис. 1, изображены точки $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_{1015}$, а на рис. 2 изображена гистограмма распределения их вещественных частей $\sigma_n = \operatorname{Re} \rho_n$, $n = 1, \dots 1015$.

Для вещественного положительного T пусть $N(T)$ – число нетривиальных нулей $L(\tau;\,\cdot\,)$ с мнимой частью от 0 до T (с учётом кратности). Сколько-то из них, скажем $E(T)$, расположены на критической прямой. Для функции N имеется асимптотика (аналог формулы Римана–Мангольдта для ζ-функции Римана)

$$N(T) = \frac{2}{\pi}\, T \log T - \frac{1}{\pi}\bigl(2 + 2\log(2\pi) - \log(27)\bigr)\, T + O(\log T),$$

$T \to \infty$, которая легко получается применением метода Беклунда, см. [6] или [7]. Для $E(T)$ нет никаких оценок. Представляется интересным вопрос о поведении отношения $E(T)/N(T)$. Наши вычисления показывают, что с ростом T отношение $E(T)/N(T)$ сначала сильно варьируется и постепенно уменьшается, но затем почти стабилизируется.

Можно предположить, что с некоторыми вещественными γ *и* δ, *с* $0 < \gamma < \delta < 1$, *имеем* $\gamma < E(T)/N(T) < \delta$ *для всех достаточно больших* T. *Или, более оптимистично, что существует предел* $E(T)/N(T)$ *при* $T \to \infty$, *и что этот предел больше* 0 *и меньше* 1.

Пусть $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ – нули функции $L(\tau;\,\cdot\,)$, лежащие в квадранте (6), занумерованные в порядке увеличения мнимой части. Рассмотрим распределение их вещественных частей $\sigma_n = \operatorname{Re}\rho_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Наши вычисления, см. рис. 2, приводят к следующей формулировке.

Плотность последовательности $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots$ *увеличивается почти от* 0, *вблизи точки* 0.5, *до максимума, вблизи точки* 0.6, *и далее уменьшается почти до* 0 *вблизи точки* 0.91. *В среднем, только один нуль* ρ_n *из двухсот пятидесяти имеет вещественную часть* σ_n *в пределах от* 0.91 *до* 1. *И нет ни одного нуля* ρ_n *с вещественной частью* $\sigma_n \geq 1$.

Остаётся, конечно, открытым вопрос, в какой степени эта формулировка правильна за пределами (4) наших вычислений.

Перейдём теперь к рассмотрению наших методов. Вычисление значений функции $L(\tau;\,\cdot\,)$ осуществляется по формуле

$$L(\tau;s) = \frac{1}{\Omega(s)}\Big(\frac{\eta^{2s-5/3}}{s-5/6} - \frac{\eta^{2s-1/3}}{s-1/6}\Big) + X_\eta(s) + \frac{\Omega(1-s)}{\Omega(s)}\,X_{\eta^{-1}}(1-s), \quad (7)$$

в которой $s \in \mathbb{C}$, $\eta \in \mathbb{C}$ – свободный параметр, ограниченный единственно условием $\operatorname{Re}\eta > 0$, и

$$X_\eta(s) = \sum_\nu \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}\,\frac{\Omega(s, 6\pi|\nu|\eta)}{\Omega(s)}, \quad (8)$$

$$\Omega(s,z) = 2\,(6\pi)^{1-2s}\int_z^\infty Ai(x^{2/3})\,x^{2s-4/3}dx, \quad (9)$$

$$\Omega(s) = \Omega(s,0) = \sqrt{3}\,(2\pi)^{-2s}\,\Gamma(s-1/6)\,\Gamma(s+1/6). \quad (10)$$

Формула (7) есть укороченное функциональное уравнение в смысле Лаврика [8]; её вывод см. в [4]. Суммирование в (8) распространяется на те же ν, что и в (1). Интегрирование в (9) осуществляется от точки z до ∞ вдоль луча, исходящего из точки 0. Под Ai понимается классическая функция Эйри, см. [9]. Согласно (7), вычисление $L(\tau; s)$ сводится, по существу, к вычислению суммы $X_\eta(s)$ и к вычислению ещё одной суммы того же вида, соответствующей η^{-1} и $1-s$ вместо η и s. Мы будем использовать (7) с параметром η, лежащим на единичной окружности, т.е. с $|\eta| = 1$. С таким η, как не сложно показать, имеем

$$X_{\eta^{-1}}(1-s) = \overline{X_\eta(1-\overline{s})}. \tag{11}$$

В частности, имеем $X_{\eta^{-1}}(1-s) = \overline{X_\eta(s)}$ и

$$\Omega(s)L(\tau; s) = 2\,\mathrm{Re}\left(\eta^{2s-5/3}/(s-5/6) + \Omega(s)\,X_\eta(s)\right) \tag{12}$$

для всех s на критической прямой (т.е. для s с $\mathrm{Re}\, s = 1/2$). Последняя формула следует, конечно, из (7).

Нас интересуют нули функции $L(\tau;\,\cdot\,)$ внутри полосы, определяемой неравенствами

$$|\,\mathrm{Re}\, s - 1/2| \le 0.8533, \quad \mathrm{Im}\, s \ge 0. \tag{13}$$

Выбрав произвольно вещественное положительное число h, покроем эту полосу семейством прямоугольников, определяемых неравенствами

$$|\,\mathrm{Re}\, s - 1/2| \le 0.8533, \quad lh \le \mathrm{Im}\, s \le (l+1)h, \tag{14}$$

$l = 0, 1, 2, 3\ldots.$ Пусть $\mathcal{D}$ – один из этих прямоугольников, именно l-ый, и пусть c – его центр, т.е. $c = 1/2 + (l+1/2)hi$. Для вычисления $L(\tau; s)$ с $s \in \mathcal{D}$ воспользуемся формулой (7) с

$$\eta = \exp\left(\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\phi}{\mathrm{Im}\, c}\right) i\right), \tag{15}$$

где ϕ – некоторая вещественная положительная константа. Можно взять, например, $\phi = 1$. И, если мы хотим провести все промежуточные вычисления с наименьшим, по возможности, числом значащих цифр, то именно так и следует сделать. Однако, несколько увеличив ϕ, мы уменьшим определённую ниже константу $C(\mathcal{D}, \eta)$, что также существенно.

Для вычисления $L(\tau; s)$ с $s \in \mathcal{D}$ введём в рассмотрение сумму

$$\widehat{X}_\eta(s) = \sum_\nu \frac{\tau(\nu)}{\|\nu\|^s}\,\frac{\Omega(s, 6\pi|\nu|\eta)}{\Omega(s)}, \tag{16}$$

которая отличается от определённой выше суммы $X_\eta(s)$ только тем, что к условиям суммирования (3) добавляется ограничение

$$\|\nu\| \le C(\mathcal{D}, \eta) \tag{17}$$

с некоторой константой $C(\mathcal{D}, \eta)$, зависящей только от $\mathcal{D}$ и η. Эту константу надлежит выбрать таким образом, чтобы после подстановки $\widehat{X}_\eta(s)$ вместо $X_\eta(s)$ и подстановки $\widehat{X}_{\eta^{-1}}(1-s)$ вместо $X_{\eta^{-1}}(1-s)$ в (7) получить $L(\tau; s)$ с желаемой точностью.

О коэффициентах $\tau(\nu)$ см. [2–4]. Удобно ввести в рассмотрение $\widetilde{\tau}(\nu) = \tau(\nu)\|\nu\|^{-1/6}$. Коэффициенты $\widetilde{\tau}(\nu)$ вычисляются и сохраняются в списке в порядке возрастания нормы $\|\nu\|$. Заметим, что число всех ν с $\|\nu\| \le r$ есть[1] $54\pi r/\sqrt{3} + O(r^{1/3})$ при $r \to \infty$. Отсюда следует, что число всех ν, удовлетворяющих неравенствам $p - 1 < 6\pi|\nu| \le p$, оценивается как $\sqrt{3}\,p/\pi$ с погрешностью порядка $O(p^{2/3})$ при $p \to \infty$.

Обратимся теперь к вычислению суммы $\widehat{X}_\eta(s)$. Заметим прежде всего, что нет необходимости рассматривать отдельно ещё и вычисление суммы $\widehat{X}_{\eta^{-1}}(1-s)$, поскольку $\widehat{X}_{\eta^{-1}}(1-s) = \overline{\widehat{X}_\eta(1-\overline{s})}$ и $1-\overline{s} \in \mathcal{D}$ для всех $s \in \mathcal{D}$. Введём в рассмотрение функцию

$$R(z, s) = 2\int_0^z Ai\big(x^{2/3}\big)\,(x/z)^{2s-1/3}\,dx/x. \tag{18}$$

Здесь интегрирование осуществляется по отрезку прямой от 0 до точки z с $\operatorname{Re} z > 0$. Для обеспечения сходимости интеграла мы должны считать, что $\operatorname{Re} s > 1/6$. При этом, очевидно,

$$\Omega(s, z) = \Omega(s, 0) - (6\pi)^{1-2s}\,z^{2s-1/3}\,R(z, s) \tag{19}$$

и, значит, $R(z,\cdot\,)$ – функция, мероморфная на всей комплексной плоскости. Из разложения (19) получаем, для каждого ν,

$$\frac{\Omega(s, 6\pi|\nu|\eta)}{\|\nu\|^{s-1/6}\,\Omega(s)} = \frac{1}{\|\nu\|^{s-1/6}} - (6\pi)^{2/3}\,\frac{\eta^{2s-1/3}}{\Omega(s)}\,R(6\pi|\nu|\eta, s). \tag{20}$$

Отсюда получаем представление

$$\widehat{X}_\eta(s) = \widehat{Y}_\eta(s) - (6\pi)^{2/3}\,\frac{\eta^{2s-1/3}}{\Omega(s)}\,\widehat{Z}_\eta(s), \tag{21}$$

[1] Поясним, что это есть число решений неравенства $\|x + \omega y\| \le 3^3 r$ с $\omega = (-1+\sqrt{-3})/2$ в целых рациональных x и y, и что $\|x + \omega y\| = x^2 - xy + y^2$.

в котором

$$\widehat{Y}_\eta(s) = \sum_\nu \frac{\widetilde{\tau}(\nu)}{\|\nu\|^{s-1/6}} \quad \text{и} \quad \widehat{Z}_\eta(s) = \sum_\nu \widetilde{\tau}(\nu)\, R(6\pi|\nu|\eta, s) \tag{22}$$

с суммированием, распространённым на те же ν, что и в (16). Таким образом, вычисление суммы $\widehat{X}_\eta(s)$ сводится к вычислению сумм $\widehat{Y}_\eta(s)$ и $\widehat{Z}_\eta(s)$.

Для вычисления первой из этих сумм разложим её в ряд Тэйлора по степеням $(s-c)$. Имеем

$$\widehat{Y}_\eta(s) = \omega_0(c) - \omega_1(c)(s-c) + \omega_2(c)(s-c)^2 - \cdots, \tag{23}$$

где коэффициенты определяются равенствами

$$\omega_n(c) = \frac{1}{n!} \sum_\nu \frac{\widetilde{\tau}(\nu)}{\|\nu\|^{c-1/6}} \log^n \|\nu\| \tag{24}$$

с суммированием по тем же ν, что и в (22). Вычислив достаточно много коэффициентов $\omega_n(c)$, скажем, все коэффициенты с $n \le \kappa_1(\mathcal{D}, \eta)$, мы получаем полином, аппроксимирующий $\widehat{Y}_\eta(s)$ для всех $s \in \mathcal{D}$. Напомним, что $\operatorname{Re} c = 1/2$ и $|\widetilde{\tau}(\nu)| \le 1$ для всех ν (см. [4]). Поэтому для $\omega_n(c)$ имеет место простая оценка

$$|\omega_n(c)| \le \frac{\log^n C(\mathcal{D}, \eta)}{n!} \sum_\nu \frac{1}{\|\nu\|^{1/3}},$$

в которой сумма по ν не превосходит $200\, C(\mathcal{D}, \eta)^{2/3}$. С помощью этой оценки легко подобрать надлежащим образом параметр $\kappa_1(\mathcal{D}, \eta)$, регулирующий точность аппроксимации.

Для вычисления второй суммы в (22) поступим аналогичным образом. Мы имеем разложение Тейлора

$$R(z, s) = \rho_0(z, c) - \rho_1(z, c)(s-c) + \rho_2(z, c)(s-c)^2 - \cdots \tag{25}$$

с коэффициентами

$$\rho_n(z, c) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n R(z, s)}{\partial s^n} \Big|_{s=c}. \tag{26}$$

Просуммировав по ν, удовлетворяющим условиям (3) и (17), находим

$$\widehat{Z}_\eta(s) = \lambda_0(c) - \lambda_1(c)(s-c) + \lambda_2(c)(s-c)^2 - \cdots, \tag{27}$$

где коэффициенты определяются равенствами

$$\lambda_n(c) = \sum_\nu \widetilde{\tau}(\nu)\rho_n(6\pi|\nu|\eta, c). \tag{28}$$

Мы получим полином, аппроксимирующий $\widehat{Z}_\eta(s)$ для всех $s \in \mathcal{D}$, если вычислим коэффициенты $\lambda_n(c)$ для всех $n \le \kappa_2(\mathcal{D},\eta)$, где $\kappa_2(\mathcal{D},\eta)$ – некоторая константа, регулирующая точность аппроксимации. Далее мы опишем методы вычисления коэффициентов $\rho_n(z,c)$ из (26). Это наиболее сложная часть вычислений.

Подставив в определение (18) разложение функции Эйри в ряд Тэйлора в точке 0 (см. [9] или [4]) и проинтегрировав почленно, находим

$$R(z,s) = \sum_{k\ge 0} \frac{P_k z^{2k}}{s-1/6+k} + \sum_{k\ge 0} \frac{Q_k z^{2k+2/3}}{s+1/6+k}, \tag{29}$$

где коэффициенты определяются реккурентно:

$$P_0 = Ai(0), \quad Q_0 = Ai'(0), \quad P_k = \frac{P_{k-1}}{3k(3k-1)}, \quad Q_k = \frac{Q_{k-1}}{3k(3k+1)}.$$

Отсюда, продифференцировав n раз, получаем

$$\rho_n(z,c) = \sum_{k\ge 0} \frac{P_k z^{2k}}{(c-1/6+k)^{1+n}} + \sum_{k\ge 0} \frac{Q_k z^{2k+2/3}}{(c+1/6+k)^{1+n}}. \tag{30}$$

Эта последняя формула может быть использована для вычисления коэффициентов $\rho_n(z,c)$. Если $|z|$ не велик, эта формула весьма эффективна. Однако, с увеличением $|z|$ приходится удерживать больше слагаемых в (30) и приходится вычислять слагаемые с большей точностью. Эффективность вычислений постепенно снижается. Для того чтобы уменьшить объём вычислений, можно применить интерполяцию. Поясним это. Фактически нам нужны коэффициенты $\rho_n(z,c)$ для всех z вида $6\pi|\nu|\eta$ с $|\nu| \le \sqrt{C(\mathcal{D})}$. Разобьём отрезок вещественной оси от 0 до $\sqrt{C(\mathcal{D})}$ на небольшие отрезки, скажем, длиной ~ 1. В каждом из этих отрезков выберем несколько точек, скажем, $p_1, \dots, p_m$, и вычислим $\rho_n(6\pi p_1\eta, c), \dots, \rho_n(6\pi p_m\eta, c)$ по формуле (30). По этим данным для каждого отрезка построим полином Лагранжа, аппроксимирующий на нём функцию $x \mapsto \rho_n(6\pi x\eta, c)$. После этого коэффициенты $\rho_n(z, c)$ для всех z вычисляются как значения полиномов Лагранжа. Такой подход позволяет многократно сократить объём вычислений, однако и он оставляет желать лучшего.

Метод, к изложению которого мы теперь переходим, позволяет свести к разумному минимуму использование (30) и оказывается значительно более эффективным (сравнительно с изложенным выше) при вычислении коэффициентов $\rho_n(z, c)$, причём тем более эффективным, чем больше $|z|$. Напомним, что нам нужно вычислить коэффициенты $\rho_n(z, c)$ в точках z вида $6\pi|\nu|\eta$ с $|\nu| \le \sqrt{C(\mathcal{D})}$. Все эти точки расположены на отрезке длины $6\pi\sqrt{C(\mathcal{D})}$, соединяющем 0 с $6\pi\sqrt{C(\mathcal{D})}\,\eta$. Разобьём этот отрезок на несколько отрезков небольшой длины. Пусть $\widetilde{z}$ и $\widetilde{z}'$ – концы одного из этих небольших отрезков и пусть, для определённости, $\|\widetilde{z}\| < \|\widetilde{z}'\|$. Предположим, что коэффициенты $\rho_n(\widetilde{z}, c)$ уже вычислены. Покажем, как вычислить коэффициенты $\rho_n(z, c)$ в точке z, лежащей между $\widetilde{z}$ и $\widetilde{z}'$. Непосредственно из определения (18) находим соотношение, связывающее $R(z, s)$ с $R(\widetilde{z}, s)$. Именно,

$$R(z, s) = (\widetilde{z}/z)^{2s-1/3} R(\widetilde{z}, s) + 2\int_{\widetilde{z}}^{z} Ai\big(x^{2/3}\big)\,(x/z)^{2s-1/3}\,dx/x. \tag{31}$$

Рассмотрим это соотношение. Для функции $R(\widetilde{z}, \cdot\,)$ мы имеем разложение Тейлора вида (25) с коэффициентами $\rho_n(\widetilde{z}, c)$, которые, по предположению, уже вычислены. Для функции $s \mapsto v^{2s-1/3}$ с $v = \widetilde{z}/z$ также имеем разложение в ряд Тейлора –

$$v^{2s-1/3} = \sum_{m\ge 0} \iota_m(v, c)(s - c)^m \tag{32}$$

с коэффициентами $\iota_m(v, c) = v^{2c-1/3}\log^m(v^2)/m!$. Теперь рассмотрим интеграл в (31). Наш метод вычисления этого интеграла аналогичен известному методу Филона [10] вычисления интералов Фурье. Прежде всего, поскольку расстояние между точками $\widetilde{z}$ и $\widetilde{z}'$ не велико, можно достаточно точно аппроксимировать $Ai(x)$ для всех x на отрезке, соединяющем точки $\widetilde{z}^{2/3}$ и $\widetilde{z}'^{2/3}$, значениями $T(x)$ некоторого полинома T невысокой степени $\deg T$. Можно, например, построить T как интерполяционный полином Лагранжа или Эрмита. Иначе, для построения полинома T разложим функцию Эйри в ряд Тейлора по степеням $x-p$, где p – середина отрезка, соединяющего точки $\widetilde{z}^{2/3}$ и $\widetilde{z}'^{2/3}$. Отбросив хвост ряда и переразложив начальные члены по степеням x, получаем аппроксимирующий полином

$$T(x)=\sum_k c_k x^k. \tag{33}$$

Все необходимые процедуры реализованы в Maple. Пусть теперь Δ – погрешность аппроксимации, так что $|Ai\big(x^{2/3}\big)-T\big(x^{2/3}\big)|\le\Delta$ для всех x на на отрезке, соединяющем точки $\widetilde{z}$ и $\widetilde{z}'$. Напомним, мы считаем, что расстояние от $\widetilde{z}$ до $\widetilde{z}'$ не велико. Предположим, более определённо, что $\widetilde{z}'/\widetilde{z}\le 1.74$. Покажем, что при этом предположении погрешность, происходящая от замены в интеграле (31) функции Эйри на полином T, не превосходит того же Δ. Мы, очевидно, имеем

$$\Big|\int_{\widetilde{z}}^{z}\big\{Ai\big(x^{2/3}\big)-T\big(x^{2/3}\big)\big\}\,(x/z)^{2s-1/3}\,dx/x\Big|\le AB\Delta, \tag{34}$$

где A есть максимум $|(x/z)^{2s-1/3}|$ по всем x из отрезка интегрирования и всем $s\in\mathcal{D}$ и

$$B=\int_{\widetilde{z}}^{z}dx/x\le\log(\widetilde{z}'/\widetilde{z}).$$

Очевидно, $A\le(\widetilde{z}'/\widetilde{z})^{1.04}$. Остаётся заметить, что $x^{1.04}\log x<1$ для всех вещественных x от 1 до 1.74.

Заменив в интеграле (31) функцию Эйри на полином T, мы получим интеграл, который легко вычислить. Именно, проинтегрировав почленно, находим

$$2\int_{\widetilde{z}}^{z}T\big(x^{2/3}\big)\,(x/z)^{2s-1/3}\,dx/x=G(z,s)-(\widetilde{z}/z)^{2s-1/3}G(\widetilde{z},s), \tag{35}$$

где

$$G(z,s)=\sum_k\frac{c_k z^{2k/3}}{s-1/6+k/3} \tag{36}$$

с суммированием, распространённым на все целые k от 0 до $\deg T$. Далее, $G(z,s)$ легко разложить в ряд Тейлора по степеням $(s-c)$. Именно,

$$G(z,s) = \nu_0(z,c) - \nu_1(z,c)(s-c) + \nu_2(z,c)(s-c)^2 - \cdots, \tag{37}$$

где коэффициенты определяются из равенств

$$\nu_n(z,c) = \sum_k \frac{c_k z^{2k/3}}{(c-1/6+k/3)^{1+n}} \tag{38}$$

с суммированием по тем же k, что и в (36). Подставив разложения (37), (35) и (32) в (31), мы легко находим, что для искомых коэффициентов $\rho_n(z,c)$ имеет место представление

$$\rho_n(z,c) = \nu_n(z,c) + \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l=n}} \iota_k(\widetilde{z}/z,c)\big(\rho_l(\widetilde{z},c) - \nu_l(\widetilde{z},c)\big) + \cdots, \tag{39}$$

в котором точки $(\ldots)$ обозначают погрешность[2], порождённую заменой Ai на T в (31). По формуле (39) легко вычислить коэффициенты $\rho_n(z,c)$, коль скоро все коэффициенты $\rho_l(\widetilde{z},c)$ с $l\leq n$ уже вычислены.

Напомним ещё раз, что нам нужны коэффициенты $\rho_n(z,c)$ в точках z вида $6\pi|\nu|\eta$, лежащих на отрезке, соединяющем 0 с $6\pi\sqrt{C(\mathcal{D})}\,\eta$. Мы разбили этот отрезок на несколько отрезков небольшой длины. Для точек z, лежащих на первом из них (начиная от 0), вычисления можно осуществить по формуле (30). А далее можно применить метод, основанный на (31), и вычислить искомые коэффициенты по формуле (39). Объём вычислений ещё существенно сократится, если примененить интерполяцию, как было объяснено выше.

Все вычисления были проведены в системе Maple на двух компьютерах с процессорами Celeron D.

В пределах $\operatorname{Im} s \leq 480$ мы разбивали полосу (13) на прямоугольники (14) высотой $h=3$, а в разложениях (25), (27) ограничивались вычислением 12 начальных коэффициентов. Далее, т.е. для вычисления в точках s с $\operatorname{Im} s \geq 480$, мы полагали $h=6$, а в разложениях (25), (27) вычисляли 16 начальных коэффициентов. В пределах $\operatorname{Im} s \leq 100$

[2]Эта погрешность оценивается посредством (34) и известной формулы Коши.

для вычисления коэффициентов (26) мы использовали только формулу (30). Далее, в пределах $\operatorname{Im} s \le 480$ мы использовали только формулу (30) и интерполяцию. В дальнейших вычислениях применялась формула (39).

В разложении (23) приходится удерживать довольно много членов, причём тем больше, чем больше $\operatorname{Im} s$ и h. В пределах (4) и с $h = 6$ мы вычисляли до 130 коэффициентов (24). Напомним, что c в (24) обозначает центр прямоугольника (14). Для повышения эффективности удобно вести вычисление по формуле (24) одновременно для всех c.

В вычислениях по формулам (31), (39) мы использовали интерполяционные полиномы T степени 100. Лучше, однако, разбить отрезок от 0 до $6\pi\sqrt{C(\mathcal{D})}\,\eta$ по-мельче и работать с интерполяционными полиномами существенно меньшей степени.

Выбрать правильно $C(\mathcal{D}, \eta)$ не просто. Некоторые ориентиры можно найти в [11] (для η с $\phi = 1$). Фактически, мы подбирали $C(\mathcal{D}, \eta)$ экспериментально. К счастью, в нашем распоряжении есть очень хороший метод контроля точности результата вычислений, основанных на функциональных уравнениях типа (7)[3]. В правой части уравнения (7) имеется свободный параметр η. Сумма в правой части (7) от η не зависит, но каждое слагаемое индивидуально весьма чувствительно к изменению η. Мы можем провести вычисления, используя различные параметры η, и сравнить результаты. Это очень сильный метод проверки, по конечному результату, правильности выбора всех регулирующих параметров и правильности всех вычислений. Фактически мы использовали η вида (15), начиная с $\phi = 1$, и постепенно, по мере роста $\operatorname{Im} s$, увеличили ϕ до 17. А для контрольных вычислений использовали ϕ от 2 до 16. Здесь уместно обратить внимание ещё на одно обстоятельство. Пусть $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ – пара соседних, т.е. имеющих общую сторону, прямоугольников из семейства (14). В соответствии с (15), параметр η для вычислений с $s \in \mathcal{D}'$ отличен от такового для вычислений с $s \in \mathcal{D}$. Мы можем вычислить $L(\tau; s)$ для s на общей стороне прямоугольников $\mathcal{D}$ и $\mathcal{D}'$ по формулам, построенным по $\mathcal{D}$, и по формулам, построенным по $\mathcal{D}'$. Сравнение результатов даёт нам контроль точности, даже если мы не меняем ϕ. Варьируя $C(\mathcal{D}, \eta)$ и другие параметры, мы добивались, чтобы обнаруживаемая в этих тестах погрешность не превышала 10^{-7}. При этом максимальное значение $C(\mathcal{D}, \eta)$ оказывается $\sim 10^5$ (на верхней границе (4) вычислений).

[3]Этот метод применял А. Стромбергсон [12], вычисляя значения L-функций волновых форм Маасса.

В этих пределах имеется ~ 360000 различных $\|\nu\|$, а всего имеется $\sim 10^7$ чисел ν вида (3).

Теперь, когда мы имеем метод вычисления значений функции $L(\tau;\,\cdot\,)$, рассмотрим собственно вычисление её нулей. Пусть $\mathcal{E}$ – прямоугольник, лежащий в одном из прямоугольников из семейства (14). Число нулей (с учётом кратности) функции $L(\tau;\,\cdot\,)$ в $\mathcal{E}$ находится стандартным образом, применением принципа аргумента. Далее мы можем разрезать $\mathcal{E}$ на меньшие прямоугольники и найти число нулей в каждом из них. Продолжая таким образом, мы можем локализовать нули функции $L(\tau;\,\cdot\,)$ в $\mathcal{E}$ сколь угодно точно. Однако, такой подход к вычислению нулей малоэффективен, так как требует вычисления $L(\tau;s)$ в очень многих точках s. Существенно более эффективно срабатывает метод, основанный на интерполяции. Именно, вычислим значения функции $L(\tau;\,\cdot\,)$ в вершинах прямоугольника $\mathcal{E}$. По этим данным построим кубический полином Лагранжа, аппроксимирующий $L(\tau;\,\cdot\,)$, и найдём его корень, скажем ξ, лежащий в $\mathcal{E}$. Выберем теперь прямоугольник $\mathcal{E}'$ со сторонами длиной в $1/10$ длин сторон прямоугольника $\mathcal{E}$ так, чтобы точка ξ была точкой пересечения его диагоналей. Вычислим значения функции $L(\tau;\,\cdot\,)$ в вершинах прямоугольника $\mathcal{E}'$. По этим данным, как и на первом шаге, построим кубический полином Лагранжа, аппроксимирующий $L(\tau;\,\cdot\,)$, и найдём его корень, скажем ξ', лежащий в $\mathcal{E}$. Проделав тоже самое ещё раз с $\mathcal{E}'$ вместо $\mathcal{E}$ получим точку ξ'', которая оказывается очень хорошей аппроксимацией к искомому нулю функции $L(\tau;\,\cdot\,)$ в $\mathcal{E}$. Фактически, в своих вычислениях мы сначала применяли принцип аргумента для выявления в прямоугольниках $\mathcal{D}$ из семейства (14) прямоугольников $\mathcal{E}$ со сторонами длиной $\leq 1/10$, содержащих по одному нулю функции $L(\tau;\,\cdot\,)$. Затем, к каждому из прямоугольников $\mathcal{E}$ применяли описанный выше интерполяционный метод и округляли полученные результаты до пяти знаков после запятой. И, наконец, снова обращались к методу, основанному на принципе аргумента, для проверки окончательных результатов.

Так были вычислены нули, лежащие в квадранте (6). Для вычисления нулей, лежащих на критической прямой, см. (5), удобно вместо формулы (7) использовать формулу (12). Поскольку функция в (12) принимает на критической прямой только вещественные значения, мы можем локализовать нули отслеживания перемены знаков ее значений. Собственно вычисление нулей можно затем провести, используя интерполяцию полиномами Лагранжа.

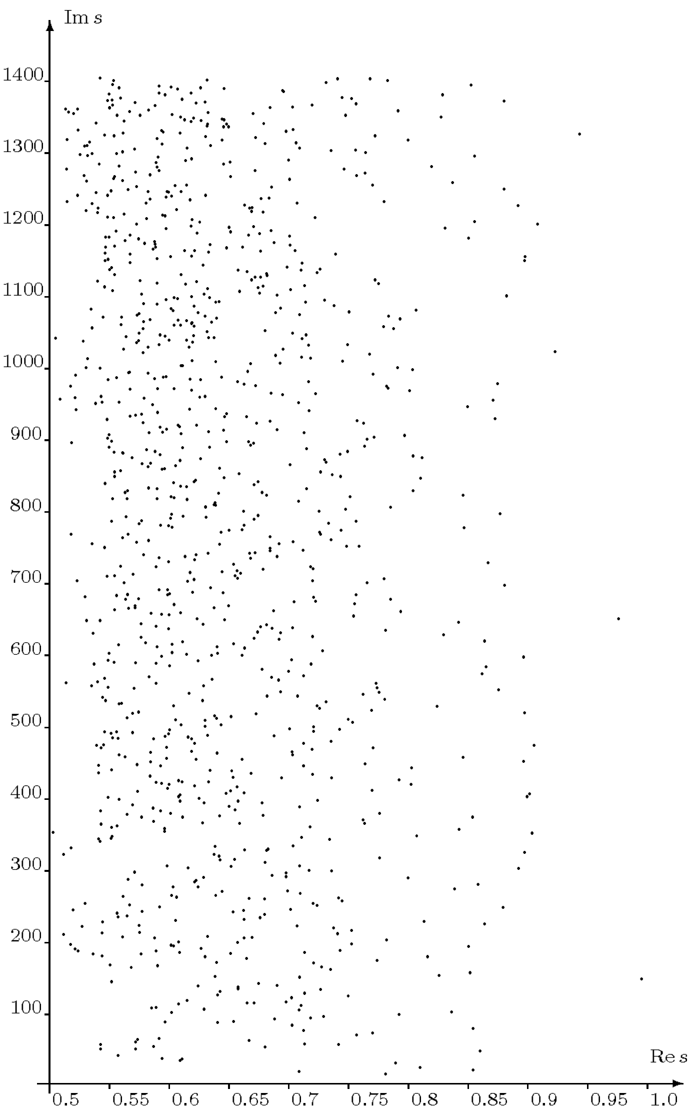

Рис. 1. Точки $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_{1015}$.

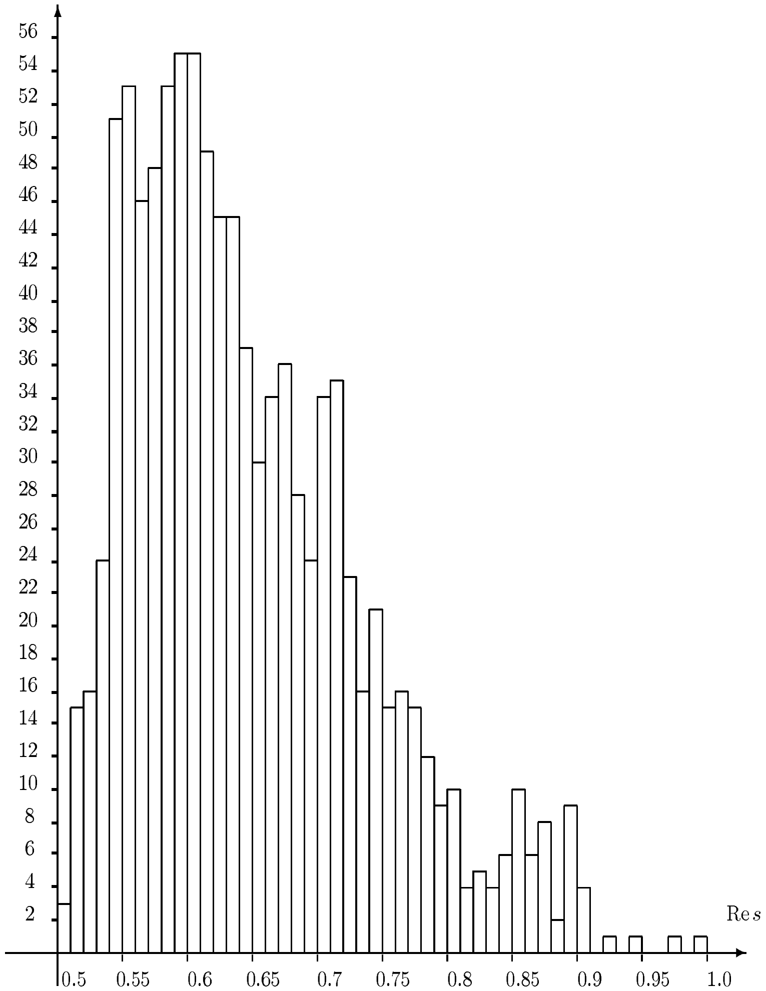

Рис. 2. Гистограмма распределения вещественных частей $\sigma_1, \ldots \sigma_{1015}$ точек $\rho_1, \ldots \rho_{1015}$. Отрезок $[0.5, 1]$ разбит на 50 отрезков длины 0.01. Если $[a, b]$ есть один из них, высота столбика над ним равна числу тех n, для которых $a < \sigma_n \leq b$.

Литература

1. T. Kubota, *On automorphic functions and reciprocity law in a number theory.* — Lect. Math. Kyoto Univ. **2** (1969).
2. S. J. Patterson, *A cubic analogue of the theta series. I, II.* — J. reine und angew. Math. **296** (1977), 125–161, 217–220.
3. N. V. Proskurin, *Cubic metaplectic forms and theta functions.* — Lect. Notes Math. 1677, Springer-Verlag, 1998.
4. Н. В. Проскурин, *О рядах Дирихле, ассоциированных с кубической тета-функцией.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 212–232.
5. Н. В. Проскурин, *О нулях L-функции, ассоциированной с кубической тета-функцией,* — Зап. научн. семин. ПОМИ **350** (2007), 173–186.
6. R. J. Backlund, *Über die Nullstellen der Riemannschen Zeta-funktion.* — Acta Math. **41** (1918), 345-375.
7. К. Чандрасекхаран, *Арифметические функции.* М. 1975.
8. А. Ф. Лаврик, *О функциональных уравнениях функций Дирихле.* — Изв. АН СССР **31**, No. 2 (1967), 431–442.
9. F. W. J. Olver, *Introduction to asymptotics and special functions.* Academic Press, New York and London, 1974.
10. L. N. G. Filon, *On a quadrature formula for trigonometric integrals.* — Proc. Roy. Soc. Edinburgh **49** (1928), 38-47.
11. А. Ф. Лаврик, *Приближённые функциональные уравнения функций Дирихле.* — Изв. АН СССР **32**, No. 1 (1968), 134–185.
12. A. Strömbergsson, *Studies in the analitic and spectral theory of automorphic forms.* Uppsala dissertations in math. 17, Uppsala Univ. (2001).

Proskurin N. V. Computation of zeros of L-function associated with the cubic theta-function.

The paper deals with L-function attached to the Kubota–Patterson cubic theta function. We have developed method for numerical computations of the L-function values. We have stated some conjectures on distribution of the L-function zeros supported by numeric computation.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: np@pdmi.ras.ru

Поступило 20 августа 2008 г.