Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

Г. В. Кузьмина

О СИММЕТРИЧНЫХ КОНФИГУРАЦИЯХ В ЗАДАЧАХ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ. II

§1. Введение

Задачи об экстремальном разбиении с большим числом свободных параметров представляют значительные трудности. Естественно, что большое внимание уделялось исследованию допустимых конфигураций, характеризующихся симметрией в расположении отмеченных точек и значений весовых параметров.

Хорошо известен ряд результатов, устанавливающих роль симметричных конфигураций в тех задачах об экстремальном разбиении, в которых функциями от областей являются приведенные модули односвязных областей относительно их внутренних точек и конформные модули двусвязных областей [1, 2]. С указанным кругом вопросов связана недавняя работа [3].

Данная работа, как и предыдущая работа [4], посвящена исследованию роли симметричных конфигураций в сравнительно мало изученном круге задач об экстремальном разбиении, в которых рассматриваются приведенные модули двуугольников относительно их вершин.

В §1 приводятся вспомогательные результаты и необходимые определения. В §2 рассматриваются системы двуугольников со свободными вершинами на некоторой окружности. Попутно устанавливаются новые результаты в задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей. В §3 решается задача об экстремальном разбиении в семействе систем областей двух типов.

В дальнейшем используются следующие обозначения.

C – окружность $|z| = 1$, U – круг $|z| < 1$.

Пусть $n \geq 2$. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ – различные точки окружности C,

$$0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \dots < \arg a_n < 2\pi;$$

положим

$$\lambda_k = \arg a_k - \arg a_{k+1}, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

Через $a_1^*, \dots, a_n^*$ обозначаем равноотстоящие точки на окружности C:

$$a_k^* = e^{2i\pi(k-1)/n}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Пусть $\mathcal{P}_n$ – семейство систем неналегающих двуугольников $P_k, k = 1, \dots, n, \dots$ на z-сфере, имеющих своими вершинами точки a_k, a_{k+1}. Предполагается, что двуугольник $P_k, \quad k = 1, \dots, n$, ассоциирован с классом дуг, гомотопных на $\overline{\mathbb{C}} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ дуге $\gamma_k = \{z : |z| = 1, \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\}$ и имеет в вершинах a_k, a_{k+1} внутренние углы, равные π. Через P_k^* обозначаем двуугольник $\{z : 0 < |z| < \infty, \arg a_k^* < \arg z < \arg a_{k+1}^*\}$.

Теорема 1. *Пусть $n \geq 2$. В семействе $\mathcal{P}_n$ справедливо неравенство*

$$\max\left\{ -\sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) \right\} \geq -\frac{2n}{\pi} \log \frac{4}{n}. \tag{1}$$

Равенство в (1) достигается только в случае симметричных систем точек: $a_k = a_k^*$ и симметричных систем областей: $P_k = P_k^*, \quad k = 1, \dots, n$. Двуугольники P_k^* являются полосообразными областями квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = \frac{z^{n-2}}{(z^n - 1)^2} dz^2.$$

По существу, доказательство этой теоремы было дано в [4]. Мы приводим его здесь для полноты изложения.

Пусть $P_k, \quad k = 1, \dots, n$, – некоторая система двуугольников из семейства $\mathcal{P}_n$. Пусть P_k^* – определенный выше двуугольник и пусть $\widehat{P}_k$ – прообраз P_k^* при отображении

$$f_k = \left(\frac{z}{a_k} \right)^{1/(n\lambda_k)}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Система областей $\widehat{P}_k, \quad k = 1, \dots, n$, принадлежит семейству $\mathcal{P}$, поэтому

$$\max\left\{ -\sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) \right\} \geq -\sum_{k=1}^{n} M(\widehat{P}_k, a_k, a_{k+1}). \tag{2}$$

По формуле преобразования приведенных модулей двуугольников при конформном отображении [5] имеем

$$M(P_k^*, a_k^*, a_{k+1}^*) = M(\widehat{P}_k, a_k, a_{k+1}) - \frac{2}{\pi}\log(n\lambda_k),$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{n} M(\widehat{P}_k, a_k, a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n}\Big[M(P_k^*, a_k^*, a_{k+1}^*) + \frac{2}{\pi}\log(n\lambda_k)\Big]. \qquad (3)$$

При отображении

$$w_k = \widehat{f}_k(z) = \left(\frac{z}{a_k}\right)^{n/2}$$

области P_k^* соответствует верхняя полуплоскость $H_k = \{w_k : \operatorname{Im} w_k > 0\}$. Имеем

$$M(H_k, -1, 1) = M(P_k^*, a_k^*, a_{k+1}^*) + \frac{2}{\pi}\log\frac{n}{2}.$$

Используя известное равенство для конформного радиуса правой полуплоскости относительно точки 1, получаем

$$M(H_k, -1, 1) = \frac{2}{\pi}\log 2,$$

следовательно,

$$M(P_k^*, a_k^*, a_{k+1}^*) = \frac{2}{\pi}\log\frac{4}{n}.$$

Теперь из (3) находим

$$\sum_{k+1}^{n} M(\widehat{P}_k, a_k, a_{k+1}) = \frac{2n}{\pi}\log\frac{4}{n} + \frac{2}{\pi}\big[n\log n + \log(\lambda_1\ldots\lambda_n)\big] \le \frac{2n}{\pi}\log\frac{4}{n}.$$

Отсюда и из (2) получаем неравенство (1) и утверждение о случае равенства в этом неравенстве.

Теорема 1 показывает, что в семействе $\mathcal{P}_n$ справедливо неравенство

$$\min\sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) \le \sum_{k=1}^{n} M(P_k^*, a_k^*, a_{k+1}^*).$$

Естественно, возникает вопрос о справедливости неравенства $\sum\limits_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} M(P_n^*, a_k^*, a_{k+1}^*)$ для любой системы двуугольников из семейства $\mathcal{P}_n$. Первые результаты в этом вопросе получены в §2.3.

Пусть $a_1, \ldots, a_n$ – та же система точек, что и в теореме 1. Пусть $\mathcal{D}_n$ – семейство систем неналегающих односвязных областей $D_1, \ldots, D_n$, $a_k \in D_k$, $k = 1, \ldots, n$. Через $M(D_k, a_k)$ обозначаем приведенный модуль области D_k относительно точки a_k. Из теоремы 1 и теоремы Е. Г. Емельянова [6], устанавливающей связь между двумя задачами об экстремальном разбиении, вновь вытекает известный результат В. Н. Дубинина [7]: в семействе $\mathcal{D}_n$ имеет место точное неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} M(D_k, a_k) \leq \sum_{k=1}^{n} M(D_k^*, a_k^*),$$

где

$$D_k^* = |z : 0 < |z| < \infty, \quad 2\pi(k - 1/2)/n < \arg z < 2\pi(k + 1/2)/n|,$$

и равенство достигается, с точностью до преобразования поворота вокруг начала координат, только в случае $a_k = a_k^*$, $D_k = D_k^*$, $k = 1, \ldots, n$.

С теоремой в [6] связан также вопрос о максимуме в семействе $\mathcal{D}_n$ конформного инварианта

$$2\pi \sum_{k=1}^{n} M(D_k, a_k) - \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq k < l \leq n} \log |a_k - a_l|.$$

Об этой задаче говорится в §2.

§2. Оценки конформного инварианта

2.1. Оценки конформных инвариантов, связанных с задачей о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей, восходят к исследованиям М. А. Лаврентьева и Г. М. Голузина и относятся к числу классических результатов в задачах об экстремальном разбиении. Здесь мы устанавливаем простые аналоги некоторых из этих результатов.

Пусть по-прежнему $a_1, \dots, a_n$ – система различных точек окружности C. Пусть $D_1, \dots, D_n$ – система областей из семейства $\mathcal{D}_n$.

Как хорошо известно, величина

$$I(a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=1}^{n} M(D_k, a_k) - \frac{2}{n-1} \sum_{1 \le k < l \le n} \log |a_k - a_l| \qquad (4)$$

инвариантна относительно группы Γ дробно-линейных автоморфизмов $\overline{\mathbb{C}}$. Задача о максимуме инварианта (4) в семействе всех систем неналегающих односвязных областей $D_1, \dots, D_n$, удовлетворяющих условию $a_k \in D_k, \quad k = 1, \dots, n$, без каких-либо ограничений на точки $a_1, \dots, a_n$ является достаточно сложной и решена только в случаях $n = 2, 3, 4$ сответственно в 1934, 1950 и 1980 гг., по этому вопросу см. [1].

Естественно, задача о максимуме инварианта (4) в семействе $\mathcal{D}_n$ оказывается более простой. Пусть

$$I_n(\mathcal{D}_n) = \max I(a_1, \dots, a_n)$$

в семействе $\mathcal{D}_n$. Имеет место следующая простая лемма.

Лемма 1. *Пусть $n \ge 2$ и пусть*

$$0 < \lambda_k < 1, \quad k = 1, \dots, n, \quad \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1.$$

Пусть функция

$$F(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \sum_{k=1}^{n} \log(2\lambda_k) - \frac{2}{n-1} \sum_{1 \le k < l \le n} \log \sin \pi(\lambda_1 + \dots + \lambda_{l-1})$$

при условии $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 1$ достигает максимума при $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$. Тогда

$$I_n(\mathcal{D}_n) = F\left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$$

и указанный максимум достигается только в случае симметричной системы точек $a_1^*, \ldots, a_n^*$ *и систем, получающихся из этой системы при преобразованиях из группы* Γ.

Доказательство. В силу теоремы Е. Г. Емельянова [5], справедливо неравенство

$$2\pi \sum_{k=1}^{n} M(D_k, a_k) \leq 2\pi \frac{1}{4} \sum_{k=1}^{n} M(S_k, a_k, a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} \log 4\lambda_k. \qquad (5)$$

где

$$S_k = \{z : 0 < |z| < \infty, \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\},$$
$$M(S_k, a_k, a_{k+1}) = \frac{2}{\pi} \log(4\lambda_k),$$

и равенство в (5) имеет место, с точностью до преобразований из группы Γ, только в случае $a_k = a_k^*$, $k = 1, \ldots, n$.

При $1 \leq k < l \leq n$ имеем

$$a_l = a_k \dot{e}^{2\pi i(\lambda_k + \ldots \lambda_{l-1})}, \quad |a_k - a_l| = 2 \sin \pi(\lambda_k + \cdots + \lambda_{l-1}),$$

и из (5) получаем неравенство

$$I(a_1, \ldots, a_n) \leq F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

где функция $F(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ определена в формулировке леммы.

Очевидно, случаю равных значений λ_k соответствует только система равноотстоящих точек на окружности C, что и доказывает лемму.

Приведем некоторые приложения леммы 1.

Теорема 2. *В семействе* $\mathcal{D}_n$ *справедливы равенства*

$$I_4(\mathcal{D}_4) = -\frac{4}{3} \log 4, \quad I_5(\mathcal{D}_5) = -\frac{5}{2} \log[\frac{25}{4} \sin \pi/5 \sin 2\pi/5],$$
$$I_6(\mathcal{D}_6) = \frac{24}{5} \log \frac{2}{3\sqrt{3}}.$$

В каждом из случаев $n = 4, 5, 6$ *указанный максимум достигается только в случае системы точек* $a_1^*, \ldots, a_n^*$ *и систем точек, получающихся из нее при преобразованиях из группы* Γ.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – точки окружности C, перенумерованные в порядке возрастания $\arg a_k$.

Пусть $n=4$. В этом случае можем считать, что

$$\{a_1,a_2,a_3,a_4\}=\{e^{-\pi i\beta},e^{\pi i\beta},-e^{-\pi i\beta},-e^{\pi i\beta}\},\quad 0<\beta\le 1/4.$$

Действительно, рассмотрим геодезические в круге U , соединяющие соответственно точки a_1,a_3 и точки a_2,a_4 , и пусть z_0 – точка пересечения этих геодезических в U. При отображении

$$f(z)=e^{i\gamma}\frac{z-z_0}{1-\bar z_0},$$

где γ – надлежащая вещественная постоянная, точкам a_1,a_2,a_3,a_4 соответствуют указанные выше точки. Имеем

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4\}=\left\{\beta,\quad \frac12-\beta,\quad \beta,\quad \frac12-\beta\right\},$$

$$F(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4)=2\big[\log\beta+\log(\frac12-\beta)\big]-\frac43\log(\frac12\sin(2\pi\beta).$$

Отсюда

$$\frac{dF}{d\beta}=\frac{1-4\beta}{\beta(\frac12-\beta)}-\frac{8\pi}{3}\operatorname{ctg}(2\pi\beta).$$

Следовательно,$\frac{dF}{d\beta}=0$ при $\beta=1/4$. Отсюда и из леммы 1 получаем утверждение теоремы.

Пусть $n=5$. Включая в число отмеченных точек тройку точек, симметричную относительно вещественной оси, будем рассматривать систему точек

$$\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}=\{1,e^{2i\pi(\frac15+\delta_1)},e^{2i\pi\frac25},e^{2i\pi\frac35},e^{2i\pi(\frac45+\delta_2)}\}.$$

Тогда

$$\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5\}=\left\{\frac15+\delta_1,\quad \frac15-\delta_1,\quad \frac15,\quad \frac15+\delta_2,\quad \frac15-\delta_2\right\}.$$

Имеем

$$F=\log\left[\left(\frac{1}{25}-\delta_1^2\right)\frac15\left(\frac{1}{25}-\delta_2^2\right)\right]$$
$$-\frac12\log\left[\sin\pi\left(\frac15+\delta_1\right)\sin\pi\left(\frac15-\delta_1\right)\sin\pi\left(\frac15+\delta_2\right)\sin\pi\left(\frac15-\delta_2\right)\right.$$
$$\left.\sin\pi\left(\frac25-\delta_1\right)\sin\pi\left(\frac25+\delta_2)\sin\pi\left(\frac25+\delta_1-\delta_2\right)\right]\right.$$
$$-\frac12\log\left[\sin^2\frac{2\pi}{5}\cdot\sin\frac{\pi}{5}\right].$$

Обозначая
$$\phi(u)=\frac{1}{u}-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi u,$$
находим
$$\frac{\partial F}{\partial\delta_1}=\phi\left(\frac{1}{5}+\delta_1\right)-\phi\left(\frac{1}{5}-\delta_1\right)+\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi\left(\frac{2}{5}-\delta_1\right)-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi\left(\frac{2}{5}+\delta_1-\delta_2\right), \tag{6}$$
$$\frac{\partial F}{\partial\delta_2}=\phi\left(\frac{1}{5}+\delta_2\right)-\phi\left(\frac{1}{5}-\delta_2\right)-\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi\left(\frac{2}{5}+\delta_2\right)+\frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\pi\left(\frac{2}{5}+\delta_1-\delta_2\right). \tag{7}$$

Рассматривая равенства, получаемые почленным сложением равенств (6) и (7), из условия $\frac{\partial F}{\partial\delta_1}=\frac{\partial F}{\partial\delta_2}=0$, находим, что $\delta_1+\delta_2=0$. Подставляя затем $\delta_2=-\delta_1$ в (6), находим, что $\delta_1=\delta_2=0$. Следовательно, $\lambda_1=\dots=\lambda_5$. Отсюда и из леммы 1 находим I_5.

Пусть $n=6$. Используя конструкцию доказательства в случае $n=4$, включим в число отмеченных точек вершины прямоугольника, симметричного относительно координатных осей. Пусть
$$\begin{aligned}&\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5,a_6\}\\&=\{e^{i\pi\beta},e^{i\pi(\frac{1}{2}+2\delta_1)},-e^{-i\pi\beta},-e^{i\pi\beta},e^{i\pi(\frac{3}{2}+2\delta_2)},e^{-i\pi\beta}\},0<\beta<1/6,\end{aligned}$$
тогда
$$\begin{aligned}&\{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4,\lambda_5,\lambda_6\}\\&=\left\{\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}+\delta_1,\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}-\delta_1,\ \beta,\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}+\delta_2,\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}-\delta_2,\ \beta\right\}.\end{aligned}$$
После несложных преобразований получаем
$$\begin{aligned}&F(\lambda_1,\dots,\lambda_6)=\log\left\{\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}\right)^2-\delta_1^2\right]\beta^2\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}\right)^2-\delta_2^2\right]\right\}\\&+\frac{2}{5}\big\{\log\big[\cos\pi(\beta+2\delta_1)\cos\pi(\beta-2\delta_1)\cos\pi(\beta+2\delta_2)\cos\pi(\beta-2\delta_2)\big]\\&+2\log(\sin 2\pi\beta)+\log\cos\pi(\delta_1-\delta_2)-3\log 4\big\}.\end{aligned}$$
Теперь находим
$$\frac{\partial F}{\partial\delta_1}=\frac{-2\delta_1}{(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2})^2-\delta_1^2}+\frac{2\pi}{5}\big\{2\operatorname{tg}\pi(\beta+2\delta_1)-2\operatorname{tg}\pi(\beta-2\delta_1)-\operatorname{tg}\pi(\delta_1-\delta_2)\big\},$$

$$\frac{\partial F}{\partial \delta_2}=\frac{-2\delta_2}{(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2})-\delta_2^2}+\frac{2\pi}{5}\{2\operatorname{tg}\pi(\beta+2\delta_2)-2\operatorname{tg}\pi(\beta-2\delta_2)+\operatorname{tg}\pi(\delta_1-\delta_2)\}.$$

Из условия $\frac{\partial F}{\partial \delta_1}=\frac{\partial F}{\partial \delta_2}=0$ вытекают равенства $\delta_1=\delta_2=0$.

При $\delta_1=\delta_2=0$

$$F=2\log\left\{\left(\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}\right)^2\beta\right\}-\frac{2}{5}\left\{4\log\cos\pi\beta+2\log\sin 2\pi\beta-3\log 4\right\},$$

откуда

$$\frac{dF}{d\beta}=\frac{-2}{\frac{1}{4}-\frac{\beta}{2}}+\frac{\beta}{2}-\frac{2\pi}{5}\big\{-4\operatorname{tg}\pi\beta+4\operatorname{ctg}2\pi\beta\big\}.$$

Следовательно, $\frac{dF}{d\beta}=0$ при $\beta=\frac{\pi}{6}$.Таким образом,$\lambda_1=\dots=\lambda_6$. Отсюда и из леммы 1 вытекает утверждение теоремы.

Приведем некоторые замечания к теореме 2.

Замечание 1. Пусть $\mathcal{D}_4(\beta)$ – семейство систем областей из $\mathcal{D}_4$, для которых системе точек a_1,a_2,a_3,a_4 при преобразовании из группы Γ соответствует четверка точек $e^{-i\beta},e^{i\beta},-e^{-i\beta},-e^{i\beta},\quad 0<\beta<\pi/4$, и пусть $I_4(\beta)$ – максимум инварианта (4) в семействе $\mathcal{D}_4(\beta)$. Нетрудно убедиться, что при всех $0<\beta<\pi/2$ имеет место равенство

$$I_4(\beta)=\frac{8}{3}\log\sin 2\beta-\frac{4}{3}\log 4\le-\frac{4}{3}\log 4,$$

и экстремальной системой областей служит четверка углов

$$S_k=\{z:0<|z|<\infty,\quad (k-1)\pi/2<\arg z<k\pi/2\},\quad k=1,2,3,4.$$

Эти углы служат круговыми областями квадратичного дифференциала

$$\frac{z^2dz^2}{(z^2-e^{2i\beta})(z^2-e^{-2i\beta})}.$$

Как показывает лемма 3 (см. §2.3) данной работы, решение аналогичной задачи в семействе систем областей из семейства $\mathcal{P}_4$ является значительно более сложным.

Замечание 2. Утверждение теоремы 2 в случае $n=4$ следует из общего результата в задаче о максимуме инварианта (8) при $n=4$ [8, 1], но приведенное доказательство значительно проще. Выражение для

$I_5(\mathcal{D}_5)$ было указано в [8], но полное доказательство в [8] приведено не было. Результат о $I_6(\mathcal{D}_6)$ по-видимому является новым.

Использованный при доказательстве теоремы 2 прием основывается на конформной инвариантности функционала (8), что позволяет добиться частичной симметрии в расположении точек a_k. Этот прием позволяет получить решение задачи о $I_n(\mathcal{D}_n)$ и при последующих значениях n.

2.2. Пусть теперь $P_1, P_2, \ldots, P_n$ – система областей из семейства $\mathcal{P}_n$. Имеет место следующая простая лемма.

Лемма 2. *Пусть $n \geq 2$. Величина*

$$J(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n} M(P_k, a_k, a_{k+1}) - \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq k < l \leq n} \log |a_k - a_l| \quad (8)$$

является конформным инвариантом относительно группы Γ дробно-линейных автоморфизмов римановой сферы.

Доказательство. Пусть $P_1, \ldots, P_n$ – система двуугольников их семейства $\mathcal{P}_n$: *двуугольник*P_k имеет своими вершинами точки a_k, a_{k+1}, образует в этих вершинах углы, равные π , и ассоциирован с классом дуг, гомотопных дуге $\gamma_k = \{z : |z| = 1, \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\}, \quad k = 1, \ldots, n$. Пусть

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

– некоторое отображение из группы Γ_1 , и пусть

$$b_k = f(a_k), \quad k = 1, \ldots, n.$$

При указанном отображении P_k переходит в двуугольник Π_k, имеющий своими вершинами точки b_k, b_{k+1} и ассоциированный с классом дуг, гомотопных дуге $f(\gamma_k)$. Имеем

$$M(\Pi_k, b_k, b_{k=1}) = M(P_k, a_k, a_{k+1}) + \frac{1}{\pi} \log |f'(a_k) f'(a_{k+1})|.$$

Поэтому

$$\frac{\pi}{2} \sum_{k=1}^{n} M(\Pi_k, b_k, b_{k+1}) - \frac{2}{n-1} \sum_{1 \leq k < l \leq n} \log |b_k - b_l| =$$

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}[M(P_k,a_k,a_{k+1})+\frac{1}{\pi}\log|f'(a_k)f'(a_{k+1})|]$$

$$-\frac{2}{n-1}\sum_{1\le k<l\le n}\log|b_k-b_l|$$

$$=\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{n}M(P_k,a_k,a_{k+1})-\frac{2}{n-1}\sum_{1\le k<l\le n}\log|a_k-a_{k+1}|\quad+\quad X,$$

где

$$X=\sum_{k=1}^{n}\log|f'(a_k)|-\frac{2}{n-1}\sum_{1\le k<l\le n}\log|\frac{b_k-b_l}{a_k-a_l}|.$$

Имеем равенства

$$|f'(a_k)|=\frac{|ad-bc|}{|ca_k+d|^2},\quad |\frac{b_k-b_l}{a_k-a_l}|=\frac{|ad-bc|}{|ca_k+d||ca_l+d|}=|f'(a_k)f'(a_l)|^{1/2},$$

откуда

$$\frac{2}{n-1}\sum_{1\le k<l\le n}\log\left|\frac{b_k-b_l}{a_k-a_l}\right|=\sum_{k=1}^{n}\log|f'(a_k)|.$$

Следовательно, $X=0$, что и доказывает лемму.

Пусть $J_n(\mathcal{P}_n)$ – максимум инварианта (8), $\sigma_n(\mathcal{P}_n)$ – максимум суммы

$$\sum_{k=1}^{n}M(P_k,a_k,a_{k+1})$$

в семействе $\mathcal{P}_n$.

Теорема 3. *Справедливы равенства*

$$J_3(\mathcal{P}_3)=\log\frac{64}{81\sqrt{3}},\quad \sigma_3(\mathcal{P}_3)=\frac{6}{\pi}\log\frac{4}{3};$$

$$J_4(\mathcal{P}_4)=-\frac{4}{3}\log 4,\quad \sigma_4(\mathcal{P}_4)=0. \tag{9}$$

Каждое из указанных в (9) экстремальных значений достигается, с точностью до преобразования поворота вокруг начала координат, только в случаях $\{a_k\}=\{a_k^*\}$, $\{P_k\}=\{P_k^*\}$.

Доказательство. В случае $n=3$ доказательство весьма просто. Действительно, в силу конформной эквивалентности за рассматриваемую тройку точек можем принять $\{a_1^*,a_2^*,a_3^*\}=\{1,\omega,\omega^2\}$, $\omega=e^{2\pi/3}$.

В этом случае экстремальными областями P_k^* являются полосообразные области квадратичного дифференциала

$$\frac{zdz^2}{(z^3-1)^2},$$

т.е. углы раствора $2\pi/3$ с общей вершиной в начале координат. Имеем

$$M(P_k^*, a_k^*, a_{k+1}^*) = \frac{2}{\pi}\log\frac{4}{3},$$

откуда

$$\frac{\pi}{2}\sum_{k=1}^{3} M(P_k^*, a_k^*, a_{k+1}^*) - \sum_{1\le k<l\le 3}\log|a_k^* - a_l^*|$$
$$= 3\log\frac{4}{3} - 3\log\sqrt{3} = \log\frac{64}{81\sqrt{3}}.$$

Так как для произвольной тройки точек окружности C

$$|(a_1-a_2)(a_1-a_3)(a_2-a_3)| \le |(1-\omega)(1-\omega^2)(\omega-\omega^2)| = 3\sqrt{3},$$

то

$$\sigma_3(\mathcal{P}_3) = \frac{6}{\pi}\log\frac{4}{3},$$

и равенство достигается только в указанном в следствии 1 случае.

2.3. При $n = 4$ доказательство теоремы оказывается значительно более сложным и основывается на приводимой ниже лемме 3.

Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 – четверка точек окружности C, перенумерованных в порядке возрастания $\arg z$. Рассматривая надлежащее преобразование из группы Г, можем считать, что

$$\{a_1, a_2, a_3, a_4\} = \{e^{-i\beta}, e^{i\beta}, -e^{-i\beta}, -e^{i\beta}\}, \quad 0 < \beta \le \pi/4.$$

Пусть $\mathcal{P}_4(\beta)$ – семейство систем двуугольников P_k, $k = 1, \dots, 4$, из семейства $\mathcal{P}_4$, имеющих вершины в указанных точках a_k, a_{k+1}. Решение задачи о максимуме $\sigma_4(\beta)$ суммы

$$\sum_{k=1}^{4} M(P_k, a_k, a_{k+1}) \tag{10}$$

в семействе $\mathcal{P}_4(\beta)$ дается следующей леммой и приводит к решению задачи о максимуме $\sigma_4(\mathcal{P}_4)$ суммы (10) во всем семействе $\mathcal{P}_4$.

Лемма 3. *Пусть* $0 < \beta < \pi/4$. *Максимум* $\sigma_4(\beta)$ *суммы (10) в семействе* $\mathcal{P}_4(\beta)$ *реализуется системой полосообразных областей* $P_k(\beta), \quad k = 1, \ldots, 4$, *квадратичного дифференциала*

$$Q(z,\beta)dz^2 = \frac{(z^2-b^2)(z^2-1/b^2)dz^2}{(z^2-e^{2i\beta})^2(z^2-e^{-2i\beta})^2}, \tag{11}$$

нули которого $b, -b, 1/b, -1/b, \quad 0 < b < 1$, *определяется условием*

$$\mathrm{lenght}_Q[b,1] = \mathrm{lenght}_Q[0,i]. \tag{12}$$

При $0 < \beta \leq \pi/4$ *имеет место неравенство*

$$\sigma_4(\beta) \leq \sigma_4(\pi/4), \quad \sigma_4(\pi/4) = \sigma_4(\mathcal{P}_4) = 0,$$

и равенство $\sigma_4(\beta) = 0$ *достигается только при* $\beta = \pi/4$.

Максимум $\sigma_4(\mathcal{P}_4)$ *суммы* (10) *в семействе* $\mathcal{P}_4$ *реализуется только для равноотстоящих точек на* C *и только, с точностью до поворота вокруг начала координат, системой углов*

$$S_k = \{z : 0 < |z| < \infty, \quad (k-1)\pi/2 < \arg z < k\pi/2\}, \quad k = 1, 2, 3, 4.$$

Эти углы являются полосообразными областями квадратичного дифференциала

$$-\frac{z^2dz^2}{(z^4+1)^2}. \tag{13}$$

Доказательство. Пусть $0 < \beta < \pi/4$. В соответствии с общей теорией (см., например, [9]), ассоциированным квадратичным дифференциалом данной задачи является дифференциал (11), нули которого удовлетволяют условию (12), или же дифференциал

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^2dz^2}{(z^2-e^{2i\beta^2})(z^2-e^{-2i\beta})}. \tag{14}$$

Легко видеть, что второй случай в случае $\beta < \pi/4$ невозможен : полосообразные области дифференциала (14) имеют в своих вершинах внутренние углы, не равные π. Следовательно, при $0 < \beta < \pi/4$ ассоциированным квадратичным дифференциалом является дифференциал (11). Полосообразные области $P_1, P_2.P_3, P_4$ дифференциала

(11) имеют своими вершинами соответственно точки $e^{-i\beta}$ и $e^{i\beta}, e^{i\beta}$ и $-e^{-i\beta}, -e^{-i\beta}$ и $-e^{-i\beta}, -e^{-i\beta}$ и $e^{-i\beta}$ и симметричны относительно окружности C.

В случае $\beta = \pi/4$ имеем ассоциированный квадратичный дифференциал (13). Полосообразные области этого дифференциала описаны в формулировке леммы , $\sigma_4(\pi/4) = 0$.

Пусть

$$P_k^* = P_k \cap \{z : |z| > 1\}, M(P_k^+, a_k, a_{k+1}) = 2M(P_k, a_k, a_{k+1}).$$

При отображении

$$w = \frac{1}{2}\left(z^2 + \frac{1}{z^2}\right)$$

четверке областей $P_1^+, P_2^+, P_3^+, P_4^+$ соответствует пара полосообразных областей Π_1, Π_2 квадратичного дифференциала

$$Q_1(w)dw^2 = \frac{(w-B)dw^2}{(w-\cos 2\beta)^2(w^2-1)},$$

а условие (12) влечет равенство

$$[1, B]_{Q_1} = [-\infty, -1]_{Q_1}.$$

Учитывая равенство

$$\frac{dw}{dz} = \frac{1}{z}(z^2 - 1/z^2),$$

и используя формулу преобразования приведенных модулей двуугольников при конформном отображении, находим

$$M(\Pi_k, \cos 2\beta, \cos 2\beta) = M(P_k^+, a_k, a_{k+1}) + \frac{4}{\pi}\log(2\sin 2\beta), k = 1, 2,$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{4} M(P_k, a_k, a_{k=1}) = \sum_{k=1}^{2} M(\Pi_k, \cos 2\beta, \cos 2\beta) - \frac{8}{\pi}\log(2\sin 2\beta).$$

Следовательно,

$$\frac{d}{d\beta}\sum_{k=1}^{4} M(P_k, a_k, a_{k+1}) = \frac{d}{d\beta}\sum_{k=1}^{2} M(\Pi_k, \cos 2\beta, \cos 2\beta) - \frac{16}{\pi}\operatorname{ctg} 2\beta. \quad (15)$$

Найдем

$$\frac{d}{d\beta}\sum_{k=1}^{2} M(\Pi_k, \cos 2\beta, \cos 2\beta).$$

В силу нормирующих условий общей градиентной теоремы [10],

$$\frac{d}{d\beta}\sum_{k=1}^{2} M(\Pi_k, \cos 2\beta, \cos 2\beta) =$$

$$4\pi \sin 2\beta \cdot \frac{1}{4\pi^2}\frac{16\sin^2 2\beta}{B-\cos 2\beta} \cdot \frac{\partial[(w-\cos 2\beta)^2 Q_1(w)]}{\partial w}\bigg|_{w=\cos 2\beta} =$$

$$= \frac{16}{\pi} \quad \frac{-1-\cos^2 2\beta + 2B\cos 2\beta}{(B-\cos 2\beta)\sin 2\beta}.$$

Отсюда и из (15)

$$\frac{d}{d\beta}\sum_{k=1}^{4} M(P_k, a_k, a_{k+1}) = \frac{16}{\pi}\frac{B\cos 2\beta - 1}{(B-\cos 2\beta)\sin 2\beta}. \tag{16}$$

Так как второе слагаемое в выражении для инварианта $J(\beta)$ равно $\frac{4}{3}\log(4\sin 2\beta)$, то из (16) получаем

$$\frac{d}{d\beta}J_4(\beta) = \frac{16}{3}\frac{B\cos 2\beta - \cos^2 2\beta}{(B-\cos 2\beta)\sin 2\beta}.$$

Следовательно, $\frac{dJ_4(\beta)}{d\beta} > 0$ при условии

$$B\cos 2\beta - \cos^2 2\beta > 0. \tag{17}$$

Обратимся теперь к равенству (12). Запишем его в виде

$$\int_1^B \left[\frac{\sqrt{B+t}}{(t+\cos 2\beta)} - \frac{\sqrt{B-t}}{t-\cos 2\beta}\right]\frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} + \int_B^\infty \frac{\sqrt{B+t}dt}{(t+\cos 2\beta)\sqrt{t^2-1}} = 0.$$

Пользуясь равенством $A-B=(A^2-B^2)/(A+B)$, последнее равенство можем записать в виде

$$\int\limits_1^B \frac{2t(t^2+\cos^2 2\beta-2B\cos 2\beta)dt}{[\sqrt{B+t}(t-\cos 2\beta)+\sqrt{B-t}(t+\cos 2\beta)](t^2-\cos^2 2\beta)\sqrt{t^2-1}}$$

$$+\int\limits_B^\infty \frac{\sqrt{B+t}dt}{(t+\cos 2\beta)\sqrt{t^2-1}}=0.$$

Из последнего равенства непосредственно вытекает условие

$$2B\cos 2\beta>1+\cos^2 2\beta.$$

Таким образом, неравенство (16) справедливо при всех $0<\beta<\pi/4$.

Это показывает, что $\frac{dJ_4(\beta)}{d\beta}>0$ при $0<\beta<\pi/4$. Теперь доказательство леммы 3 легко завершается.

Из доказательства леммы 3 непосредственно вытекает

Следствие. *Справедливо равенство*

$$J_4(\mathcal{P}_4)=0. \tag{18}$$

Указанный максимум достигается, с точностью до преобразования поворота вокруг начала координат , только для системы точек a_1,a_2,a_3,a_4 *и для системы углов, указанной в лемме* 3.

§3. К задаче об экстремальном разбиении в семействе систем областей двух типов

3.1. Пусть $\mathcal{P}_n^{(2)}$ – семейство систем неналегающих односвязных областей на z-сфере двух типов: двуугольников $P_k, \quad k=1,\dots,n$, с вершинами a_k и a_{k+1} на окружности C, и односвязных областей D_0,D_∞, где $0\in D_0,\infty\in D_\infty$. Предполагается, что двуугольник $P_k, \quad k=1,\dots,n$, ассоциирован с классом дуг, гомотопных дуге $\{z:|z|=1,\arg a_k<\arg z<\arg a_{k+1}\}$, и имеет в своих вершинах a_k,a_{k+1} внутренние углы, равные π. Пусть h и α – положительные числа. Рассмотрим задачу о максимуме функционала

$$\sum_{k=1}^n h^2M(P_k,a_k,a_{k+1})+\alpha^2\{M(D_0,0)+M(D_\infty,\infty)\} \tag{19}$$

в семействе $\mathcal{P}_n^{(2)}$.

При исследовании этой задачи используется следующая лемма об экстремальном разбиении в семействе четверок областей, характеризующимся наличием симметрии в расположении отмеченных точек.

Через $\tilde{\mathcal{P}}_2^{(2)}$ обозначаем следующее семейство неналегающих областей : двуугольников P_1, P_2 с вершинами в точках -1, 1 и внутренними углами, равными π в этих вершинах и односвязных областей $D_0, D_\infty, 0 \in D_0, \infty \in D_\infty$. Предполагается, что двуугольники P_1, P_2 ассоциированы с классами дуг, гомотопных соответственно дуге $\gamma_1 = \{z : z = e^{i\phi}, 0 < \phi < \pi\}$ и дуге $\gamma_2 = \{z : z = e^{\phi}, \pi < \phi < 2\pi\}$. Пусть h и β – положительные числа. Рассмотрим задачу о максимуме функционала

$$h^2\{M(P_1, -1, 1) + M(P_2, -1, 1)\} + \beta^2\{M(D_0, 0) + M(D_\infty, \infty)\} \quad (20)$$

в семействе $\tilde{\mathcal{P}}_2^{(2)}$.

Лемма 4. *Для максимума $F_2^*(h, \beta)$ задачи о максимуме функционала (9) в семействе $\tilde{\mathcal{P}}_2^{(2)}$ справедливо равенство*

$$F_2^*(h, \beta) = \frac{1}{\pi}\left\{-2h^2 \log\frac{4h^2 + \beta^2}{16h^2} + \frac{\beta^2}{2}\log\frac{4\beta^2}{4h^2 + \beta^2}\right\}. \quad (21)$$

Указанный максимум реализуется только системой полосообразных областей P_1^*, P_2^* и круговых областей D_0^*, D_∞^* квадратичного дифференциала

$$Q_2(z)dz^2 = -\frac{\beta^2}{4\pi^2}\frac{(z^2 - r^2)(z^2 - r^{-2})}{z^2(z^2 - 1)}\,dz^2,$$

где r, $\quad 0 < r < 1$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} - r = \frac{4h}{\beta}.$$

Доказательство. Пусть P_1^*, P_2^*, D_0^*, D_∞^* – экстремальная система областей задачи о максимуме функционала (9) в семействе $\tilde{\mathcal{P}}_2^{(2)}$. Нетрудно убедиться, что эта же система областей реализует экстремум в семействе $\tilde{\mathcal{P}}_2^{(2)}$ функционала, получающегося из (20) заменой множителя h^2 на $-h^2$. Действительно, каждая из указанных систем областей является системой полосообразных и круговых областей квадратичного дифференциала (20), однозначно определяемого условиями каждой из упомянутых экстремальных задач.

При доказательстве теоремы 2 в [4] получены равенства

$$M(P_j^*, -1, 1) = \frac{2}{\pi}\left\{ -\frac{1}{2}\log\frac{l^2+1}{4l^2} + \frac{1}{l}\operatorname{arctg}\frac{1}{i}\right\}, \quad j = 1, 2,$$

$$M(D_0^*) = M(D_\infty^*) = \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\log\frac{4}{l^2+1} - l\operatorname{arctg}\frac{1}{l} + \log 2\right\},$$

где

$$l = \frac{2h}{\beta}.$$

Отсюда получаем равенство (21) для $F_2^*(h, \beta)$.

3.2. Следующая теорема выявляет роль симметрии в расположении точек a_k в задаче об экстремальном разбиении в семействе $\mathcal{P}_n^{(2)}$.

Теорема 4. *При $n \geq 2$, $h/\alpha \geq 1,703/n$ для максимума $F_n(h, \alpha)$ функционала (19) в семействе $\mathcal{P}_n^{(2)}$ справедливо равенство*

$$F_n(h, \alpha) = \frac{n}{\pi}\left\{ -h^2\log\frac{n^2h^2+\alpha^2}{16h_2} + \frac{\alpha^2}{n^2}\log\frac{16\alpha^2}{n^2h^2+\alpha^2}\right\}. \tag{22}$$

Указанный максимум достигается только для симметричной системы точек a_k^* и только для системы полосообразных и круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q_n(z)dz^2 = -\frac{\alpha^2}{4\pi^2}\frac{(z^n - r^n)(z^n - r^{-n})}{z^2(z^n-1)^2}dz^2,$$

где $r, 0 < r < 1$, удовлетворяет уравнению

$$\frac{(1-r^n)^2}{r^n} = \frac{4h^2n^2}{\alpha^2}.$$

Доказательство. Построим допустимую систему областей из семейства $\mathcal{P}_n^{(2)}$, рассматривая разбиение z-сферы на систему углов

$$S_k = \{z : 0 < |z| < \infty, \quad \arg a_k < \arg z < \arg a_{k+1}\}, \quad k = 1, \dots, n.$$

При отображении

$$f_k(z) = \left(\frac{z}{a_k}\right)^{1/(2\lambda_k)} \tag{23}$$

углу S_k соответствует верхняя полуплоскость $H_k = \{w : \operatorname{Im} w > 0\} w_k$-плоскости. Обратимся к задаче леммы 3 о максимуме $\tilde{F}_2(h, \beta_k)$ функционала

$$h^2[M(\Pi_{1,k}, -1, 1) + M(\Pi_{2,k}, -1, 1)] + \beta_k^2[M(\Delta_{0,k}) + M(\Delta_{\infty,k})],\ \beta_k = 2\alpha\lambda_k,$$

в семействе $\tilde{\Pi}_2^{(2)}$ систем областей на w_k-сфере.

Через $\widehat{\Pi}_{1,k}, \widehat{\Pi}_{2,k}, \widehat{\Delta}_{0,k}$ и $\widehat{\Delta}_{\infty,k}$ обозначаем экстремальную систему областей этой задачи, и пусть

$$\widehat{\Delta}_{0,k}^{+} = \widehat{\Delta}_{0,k} \cap H_k, \widehat{\Delta}_{\infty,k}^{+} = \widehat{\Delta}_{\infty,k} \cap H_k.$$

Пусть $P_k, D_{0,k}$ и $D_{\infty,k}$ – прообразы областей $\widehat{\Pi}_{1,k}, \widehat{\Delta}_{0,k}^{+}$ и $\widehat{\Delta}_{\infty,k}^{+}$ при отображении (23). Области $D_{0,k}$ и $D_{\infty,k}$ представляют собой треугольники с вершинами соответственно в точках 0 и ∞ . Пусть D_0 – односвязная область, являющаяся объединением областей $D_{0,k}, k = 1, \ldots, n$, и общих граничных отрезков этих областей, и пусть область D_∞ определяется аналогичным образом. Система областей $P_1, \ldots, P_n, D_0, D_\infty$ принадлежит семейству $\mathcal{D}_n(P, D)$.

В силу формул преобразования приведенных модулей двуугольников при конформном отображении,

$$M(P_k, a_k, a_{k+1}) = M(\widehat{\Pi}_{1,k}, -1, 1) + \frac{2}{\pi}\log(2\lambda_k). \tag{24}$$

Обозначим через $M(D_{0,k}, 0)$ приведенный модуль треугольника $D_{0,k}$ относительно его вершины. (Определение этого понятия аналогично определению приведенного модуля двуугольника относительно его вершин и дается, например, в [10],[11]). Принимая во внимание условие $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k = \alpha$ в силу известного результата метода экстремальной метрики имеем неравенство

$$\begin{aligned} \alpha^2 M(D_0, 0) &\le \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 M(D_{k,0}, 0) \\ &= \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 M(\Delta_{k,0}^{+}, 0) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \beta_k^2 M(\Delta_{k,0}, 0). \end{aligned} \tag{25}$$

Действительно, неравенство в (25) следует из того факта, что экстремальные метрики проблем модуля, определяющих $M(D_{0,k},0)$, $k = 1,\dots,n$, порождают допустимую метрику проблемы модуля, определяющей $M(D_0,0)$ (доказательство этого утверждения см., например, в [10, 11]).

Из (24), (25) и аналогичного неравенства для $M(D_\infty,\infty)$ получаем

$$F_n(h,\alpha) \le \sum_{k=1}^n h^2 M(P_k,a_k,a_{k+1}) + \alpha^2[M(D_{0,k},0)+M(D_{\infty,k},\infty)] =$$

$$h^2\sum_{k=1}^n [M(\widehat{\Pi}_{1,k},-1,1)+2/\pi\log(2\lambda_k)] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \beta_k^2[M(\widehat{\Delta}_{0,k},0)+M(\widehat{\Delta}_{\infty,k},\infty)] =$$

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n [\tilde{F}_2(h,\beta_k)+\frac{4}{\pi}h^2\log(2(\lambda_k)].$$

Выражение для $\tilde{F}_2(h,\beta)$ получено в лемме 4:

$$\tilde{F}_2(h,\beta) = \frac{2h^2}{\pi}F(h,\gamma),$$

где

$$F(h,\gamma) = -\log\frac{1+\gamma^2}{4}+\gamma^2\log\frac{16\gamma^2}{1+\gamma^2}, \qquad \gamma = \frac{\beta}{2h} = \frac{\alpha}{h}. \tag{26}$$

Следовательно,

$$\tilde{F}_2(h,\beta_k)+\frac{4h^2}{\pi}\log(2\lambda_k) = \frac{2h^2}{\pi}\left[F(h,\gamma_k)+2\log(2\lambda_k)+2\log\frac{h}{\alpha}\right].$$

Исследуем функцию

$$\sum_{k=1}^n [F(h,\gamma_k)+2\log(2\gamma_k)$$

при связи

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k = \frac{\alpha}{h}. \tag{27}$$

Образуем функцию

$$X(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) = \sum_{k=1}^{n} [F(h, \gamma_k) + 2\log(2\gamma_k)] + \mu \left[\sum_{k=1}^{n} \gamma_k - \frac{\alpha}{h}\right],$$

μ – постоянная. Исследуем решения системы

$$\frac{\partial X}{\partial \gamma_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{28}$$

Находим

$$\frac{\partial X}{\partial \gamma_k} = 2\{\gamma_k \log \frac{16\gamma_k^2}{1+\gamma^2} + \frac{1}{\gamma_k}\} + \mu.$$

Функция

$$Y(\gamma) = \gamma \log \frac{16\gamma^2}{1+\gamma^2} + \frac{1}{\gamma}$$

строго убывает от $+\infty$ до $Y(\gamma_0)$ при возрастании γ от 0 до γ_0 и строго возрастает от γ_0 до ∞ при возрастании γ от γ_0 до ∞ ; здесь $\gamma_0 = 0,5873$ – решение уравнения

$$Y'(\gamma) = \log \frac{16\gamma^2}{1+\gamma^2} - \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2(1+\gamma^2} = 0.$$

Равенство (26) показывает, что при условии $\alpha/h \le \gamma_0, h/\alpha \ge 1/\gamma_0 = 1,7026$, значениям $\lambda \in (0,1)$ соответствуют значения $\gamma \in (0, \gamma_0)$. При таких значениях γ функция $Y(\gamma)$ строго убывает и потому система (28) имеет единственное решение

$$\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = \frac{\alpha}{nh}.$$

Указанным значениям γ_k соответствуют значения

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = \frac{1}{n}.$$

Этим теорема доказана.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций. I, II.* — Алгебра и анализ **9**, вып. 3 (1997), 41–103; вып. 5 (1997), 1–50.
2. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат.наук **49**, вып. 1 (1994), 3–76.
3. В. Н. Дубинин, Д. А. Кириллова, *К задачам об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008)
4. Г. В. Кузьмина, *Об симметричных конфигурациях в задачах об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **350** (2007), 160–172.
5. Е. Г. Емельянов, *Некоторые свойства модулей семейств кривых.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **144** (1985), 72–82.
6. Е. Г. Емельянов, *О связи двух задач об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **160** (1987), 91–98.
7. В. Н. Дубинин, *Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **168** (1988), 48–66.
8. Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **185** (1990), 72–95.
9. Е. Г. Емельянов, Г. В. Кузьмина, *Теоремы об экстремальном разбиении в семействе систем областей различных типов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **237** (1997), 74–104.
10. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* — Алгебра и анализ **11**, вып. 1 (1999), 3–86.
11. А. Ю. Солынин, *Решение одной изопериметрической задачи Полиа–Сеге .* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **168** (1988), 140–153.

Kuz'mina G. V. On symmetric configurations in some problems on extremal decomposition. II.

Some problems on extremal decomposition in families of systems of nonoverlapping domains containing systems of biangles with free vertices are considered. The role of symmetric configurations in these problems is investigated.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А Стеклова РАН

E-mail: kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 29 сентября 2008 г.