Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

С. И. Калмыков

ПРИНЦИПЫ МАЖОРАЦИИ И НЕКОТОРЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ ПОЛИНОМОВ И РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ С ПРЕДПИСАННЫМИ ПОЛЮСАМИ

Введение

Функцию Грина $g_D(z,\zeta)$ области D называют классической, если она обращается в нуль на границе D. Для данной области D, имеющей классическую функцию Грина, набора точек $\{z_k\}_{k=1}^m$, $z_k \in D \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, $k=1,\dots,m$, и вещественного числа $r>0$ введем обозначение

$$D_r(z_1,\dots,z_m) = \left\{ z : \sum_{k=1}^{m} g_D(z,z_k) > r \right\}.$$

Пусть области D и G имеют классические функции Грина, $D \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, $\infty \in G \subset \overline{\mathbb{C}}_w$. Предположим, что функция f, мероморфная в области D, имеет по крайней мере один полюс в D и удовлетворяет условию $f(\partial D) \subset \partial G$. В недавней работе [1] установлено включение

$$f(D_r(z_1,\dots,z_m)) \backslash f(\partial D_r(z_1,\dots,z_m)) \supset G_r(\infty), \tag{1}$$

где $z_1,\dots,z_m$ – полюсы функции f в области D, каждый из которых учитывается столько раз, каков его порядок.

Если, кроме того, область D имеет на своей границе открытую аналитическую дугу Жордана γ, а область G имеет на своей границе такую же дугу Γ, функция f аналитически продолжима на γ, $f(\gamma) \subset \Gamma$ и положительной ориентации на дуге γ соответствует положительная ориентация на Γ, то из включения (1) вытекает неравенство

$$|f'(z)| \frac{\partial g_G(f(z),\infty)}{\partial n} \le \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_D(z,z_k)}{\partial n} \tag{2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ-2810.2008.1), РФФИ (грант 08-01-00028) и ДВО РАН (грант 06-III-А-01-013).

для любой точки $z \in \gamma$, где $\frac{\partial}{\partial n}$ означает дифференцирование вдоль внутренней нормали к соответствующей граничной дуге (см. [1, следствие 1]). Неравенство (2) содержит как частные случаи многие классические и современные неравенства для полиномов и рациональных функций.

Из включения (1) можно получить также неравенство Митюка [2], которое для рассматриваемой выше функции f имеет следующий вид: пусть точка $z_0 \in D$ является полюсом функции f порядка n, в окрестности которого справедливо разложение

$$f(z) = c(z - z_0)^{-n} + \dots\,, \quad \text{когда } z_0 \text{ конечно},$$

$$f(z) = cz^n + \dots \quad \text{при } z_0 = \infty, \quad c \neq 0.$$

Тогда имеет место неравенство

$$|c| \leq \frac{(r(D, z_0))^n}{r(G, \infty)} \exp\left\{ \sum_{z_k \neq z_0} g_D(z_0, z_k) \right\}, \tag{3}$$

где суммирование производится по всем полюсам z_k функции f, лежащим в области D, отличным от z_0, с учетом их кратностей, а $r(\Omega, a)$ означает внутренний радиус области Ω относительно точки a. Равенство имеет место тогда и только тогда, когда $f(D) = G$ и f осуществляет полное m-кратное накрытие области G областью D (т.е. любая последовательность точек $z_k \in D$, стремящаяся к ∂D, переходит в последовательность точек w_k, стремящаюся к ∂G, каждой точке $w \in G$ соответствует в точности m прообразов в области D).

В данной работе изучены все случаи равенства в соотношениях (1) и (2). Кроме того, мы получаем из (1)–(3) новые неравенства для старших коэффициентов и производных алгебраических полиномов с ограничением на двух отрезках. Далее, мы приводим новое, более простое доказательство теорем 4 и 5 работы А. Л. Лукашова о производных рациональных функций на нескольких отрезках [3]. Во всех упомянутых утверждениях дано описание случаев равенства.

§1. Теоремы единственности

Теорема 1. *Пусть области D и G имеют классические функции Грина, $D \subset \overline{\mathbb{C}}_z$, $\infty \in G \subset \overline{\mathbb{C}}_w$. Предположим, что функция f является мероморфной в области D, имеет по крайней мере один полюс в*

D и удовлетворяет условию $f(\partial D) \subset \partial G$. Через $z_1, \dots, z_m$ обозначим все полюсы функции f в области D, каждый из которых учитывается столько раз, какова его кратность. Пусть r – произвольное фиксированное положительное число. Тогда равенство

$$f(D_r(z_1, \dots, z_m)) \backslash f(\partial D_r(z_1, \dots, z_m)) = G_r(\infty), \tag{4}$$

имеет место в том и только в том случае, когда $f(D) = G$ и f осуществляет полное m-кратное накрытие области G областью D.

Доказательство. Прежде всего заметим, что так как граница области G не содержит бесконечно удаленную точку, то функция f имеет в области D лишь конечное число полюсов $z_1, \dots, z_m$.

Вспомогательная функция

$$h(z) = \sum_{k=1}^{m} g_D(z, z_k) - g_G(f(z), \infty)$$

гармоническая на открытом множестве

$$B = \{z \in D : f(z) \in G\}.$$

Действительно, в окрестности точек, отличных от полюсов z_k, $k = 1, \dots, m$, функции Грина $g_D(z, z_k)$, а также суперпозиция $g_G(f(z), \infty)$ являются гармоническими. Пусть теперь z_k – полюс функции f порядка n_k, отличный от ∞. Тогда в окрестности точки z_k имеем

$$\sum_{k=1}^{m} g_D(z, z_k) = -n_k \log|z - z_k| + h_1,$$

$$g_G(f(z), \infty) = \log|f(z)| + h_2 = -n_k \log|z - z_k| + h_3,$$

где h_i, $i = 1, 2, 3,$ – гармонические функции. Таким образом, особенности сокращаются. Аналогично проверяется гармоничность функции h в окрестности $z = \infty$ в случае, если эта точка является полюсом функции f. Далее, если точка $z_0 \in \partial B$, то $z_0 \in \overline{D}$ и первое слагаемое в определении функции h неотрицательное. Пусть w_0 – произвольное предельное значение функции $f(z)$, когда $z \to z_0 \in \partial B$, $z \in B$. Покажем, что $w_0 \in \partial G$. В случае $z_0 \in \partial D$ этот факт вытекает из условия теоремы. Пусть $z_0 \in D$. Тогда $w_0 = f(z_0)$ и точка w_0 является предельной для множества G. С другой стороны, точка w_0 не является внутренней точкой G. Действительно, в противном случае по аналитичности f существует окрестность точки z_0, принадлежащая множеству $f^{-1}(G)$. Отсюда z_0 является внутренней точкой множества B, что противоречит допущению. Итак, точка $w_0 \in \partial G$ и, следовательно,

$$\varliminf_{\substack{z \to z_0 \\ z \in B}} h(z) \geq 0.$$

По принципу максимума

$$h(z) \geq 0 \text{ на } B.$$

Если $f(D) = G$ и $f(z)$ осуществляет полное m-кратное накрытие области G областью D, то равенство (4) для любого $r > 0$ следует из включения (1) и того факта, что в этом случае $B = D$ и $h(z) \equiv 0$ в B.

Докажем обратное утвердение. Предположим, что для некоторого $r > 0$ выполняется равенство (4). Пусть $w \in \partial G_r(\infty)$, рассмотрим последовательность точек $w_k \in G_r(\infty)$, сходящуюся к w. Ввиду равенства (4), для каждой точки w_k существует точка $\zeta_k \in D_r(z_1, \ldots, z_m)$ такая, что $f(\zeta_k) = w_k$. Из последовательности $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ можно выделить подпоследовательность $\{\zeta'_k\}_{k=1}^{\infty}$, либо сходящуюся к конечной точке, либо к бесконечности, обозначим ее через ζ. Подпоследовательность $\{\zeta'_k\}_{k=1}^{\infty}$ не может сходиться к внутренней точке множества $D_r(z_1, \ldots, z_m)$. Предположим противное, пусть $\zeta \in D_r(z_1, \ldots, z_m)$. Из непрерывности функции $f(z)$ следует, что последовательность $f(\zeta'_k)$ сходится к w, но тогда $w \in G_r(\infty)$, это противоречит тому, что по предположению $w \in \partial G_r(\infty)$, а $G_r(\infty)$ открыто. Таким образом, $\zeta \in \partial D_r(z_1, \ldots, z_m)$. Так как $r > 0$, то $\zeta \notin \partial D$, то есть $\zeta \in D$, также $f(\zeta) = w \in \partial G_r(\infty) \subset G$, следовательно, $\zeta \in B$. С другой стороны, $h(\zeta) = 0$, то есть функция $h(z)$ достигает максимума во внутренней точке множества B. По принципу максимума, $h(z) \equiv 0$ на B.

Покажем, что $f(D) = G$. Так как по условию $f(\partial D) \subset \partial G$, то достаточно доказать, что $B = D$. Предположим, что это не так, тогда найдется точка $\zeta' \in D$ такая, что $\zeta' \in \partial B$. Как только что было доказано, в B имеет место равенство

$$\sum_{k=1}^{m} g_D(z, z_k) = g_G(f(z), \infty).$$

Выбирая последовательность $\zeta_k \in B$, $\zeta_k \to \zeta'$, видим, что правая часть этого равенства сремиться к нулю, а левая при этом строго больше нуля. Таким образом, $B = D$. Снова из влючения (1) и того факта, что $B = D$ и $h(z) \equiv 0$ в B, следует равенство (4) для любого $r > 0$.

Следуя И. П. Митюку [2], докажем, что в этом случае каждой точке области G соответствует ровно m прообразов в области D при отображении f. Обозначим через G^k множество точек из G, имеющих k прообразов в D,

$$G = G^m \cup \Bigg(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{\infty} G^k \Bigg); \quad G^m \cap \Bigg(\bigcup_{\substack{k=1 \\ k\neq m}}^{\infty} G^k \Bigg) = \emptyset. \tag{5}$$

Множество $G^m \neq \emptyset$, так как $\infty \in G^m$. Покажем, что G^k – открытое множество. Пусть $w \in G^k$. Это означает, что найдутся точки $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_\nu \in D$, в которых функция $f(z)$ принимает значение w, причем если кратности этих точек обозначить через $k_1, k_2, \dots, k_\nu$ соответственно, то $\sum k_i = k$. Очевидно, $k \neq \infty$, так как иначе $f(z)$ была бы константой. Далее, так как $f(z)$ – мероморфная функция, то существует окрестность U_w точки w такая, что для каждой точки $\zeta_i, i = 1, \dots, \nu$ найдется окрестность U_{ζ_i}, k_i-кратно накрывающая при отображении $f(z)$ окрестность U_w. Если допустить, что w не является внутренней точкой множества G^k, то найдется последовательность точек $\{w_s\}$, сходящаяся к w, причем $w_s \notin G^k$. Тогда очевидно, что $w_s \in \bigcup\limits_{j>k} G^j$, следовательно, найдется последовательность $\{\zeta_s\}$ такая, что $f(\zeta_s) = w_s$, $\zeta_s \notin \bigcup\limits_{j=1}^{\nu} U_{\zeta_j}$, $s = 1, 2, \dots$. Множество $\{\zeta_s\}$ имеет, по крайней мере, одну предельную точку ζ' (конечную или бесконечную), причем $\zeta' \in \overline{D} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\nu} U_{z_i}$. Если предположить, что некоторая подпоследовательность $\{\zeta_{s_k}\}$ сходится к $\zeta' \in D \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{\nu} U_{z_i}$, то $f(\zeta') = \lim\limits_{s_k\to\infty} f(\zeta_{s_k}) = \lim\limits_{s_k\to\infty} w_{s_k} = w$. Но тогда $w \in \bigcup\limits_{i>k} G^i$, что противоречит условию. Итак, $\zeta' \in \partial D$. Следовательно, сходимость подпоследовательности $\{\zeta_{s_k}\}$ к ζ' влечет сходимость $\{w_{s_k}\}$ к ∂G, что противоречит выбору последовательности $\{w_s\}$. Таким образом, w – внутренняя точка множества G^k, следовательно, G^k – открытое множество. Тогда из (5) и связности множества G следует, что $G = G^m$. Следовательно, $f(z)$ осуществляет полное m-кратное накрытие области G областью D. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть в условиях теоремы* 1 *область* D *имеет на своей границе открытую аналитическую дугу Жордана* γ, *а область* G *имеет на своей границе такую же дугу* Γ, *функция* f *аналитически продолжима на дугу* γ, $f(\gamma) \subset \Gamma$, *и положительной ориентации на дуге* γ *соответствует положительная ориентация на* Γ. *Тогда для любой точки* $z \in \gamma$ *равенство*

$$|f'(z)| \frac{\partial g_G(f(z), \infty)}{\partial n} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_D(z, z_k)}{\partial n}, \tag{6}$$

достигается тогда и только тогда, когда $f(D) = G$ *и* f *осуществляет полное* m*-кратное накрытие области* G *областью* D.

Доказательство. Если функция $f(z)$ осуществляет полное m-кратное накрытие области G областью D, то согласно теореме 1 имеет место равенство (3) для любого $r > 0$. Из геометрического смысла модуля производной получаем равенство (6).

Докажем обратное утверждение. Пусть для некоторой точки $z_0 \in \gamma$ имеет место равенство (6). Без ограничения общности, можно считать, что γ – дуга окружности. Возьмем функцию $h(z)$ и множество B те же, что и в доказательстве теоремы 1. Тогда по лемме Хопфа [4] либо $\frac{\partial h}{\partial n}\Big|_{z_0} < 0$, либо $h(z) \equiv 0$ на B. Первого быть не может, так как иначе

$$|f'(z_0)| \frac{\partial g_G(f(z_0), \infty)}{\partial n} < \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial g_D(z_0, z_k)}{\partial n},$$

что противоречит условию теоремы. Таким образом, $h(z) \equiv 0$ на B. Осталось повторить соответствующую часть доказательства теоремы 1. Теорема доказана.

Замечание. Вообще говоря, функция в теоремах 1 и 2, осуществляющая полное m-кратное накрытие, не единственная.

§2. Неравенства для полиномов на двух отрезках

Полиномы Чебышева первого, третьего и четвертого родов [5] имеют соответственно представления:

$$T_n(z) = \frac{(z + \sqrt{z^2 - 1})^n + (z - \sqrt{z^2 - 1})^n}{2},$$

$$V_n(z) = \frac{(z+\sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}} + (z-\sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}}}{(z+\sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}} + (z-\sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}}}, \tag{7}$$

$$W_n(z) = \frac{(z+\sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}} - (z-\sqrt{z^2-1})^{n+\frac{1}{2}}}{(z+\sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}} - (z-\sqrt{z^2-1})^{\frac{1}{2}}}.$$

Теорема 3. *Пусть полином $P(z) = c_n z^n + \dots + c_0$, $c_n \neq 0$, $c_k \in \mathbb{R}$, $k = 0, \dots, n$, удовлетворяет условию*

$$|P(x)|\sqrt{(1-x^2)} \le 1, \quad x \in [-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1], \quad 0 < \alpha < 1,$$

тогда имеют место неравенства

$$|c_n| \le \frac{2^n}{(1-\alpha^2)^{(n+1)/2}} \tag{8}$$

и

$$\sqrt{x^2-\alpha^2}|(1-x^2)P'(x) - xP(x)| \le (n+1)|x|\sqrt{1-(1-x^2)P^2(x)}, \tag{9}$$

при $x \in [-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1]$.

Равенство в каждом из неравенств при четных n достигается тогда и только тогда, когда

$$P_n(z) = \pm \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} W_{n/2}\Big(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\Big).$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $f(z) = P^2(z)(1-z^2)$ на множестве $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus ([-1,-\alpha] \cup [\alpha, 1])$, и пусть $G = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$. Тогда $f(\partial D) \subset \partial G$.

Внутренний радиус $r(G,\infty) = 4$, а для вычисления $r(D,\infty)$ заметим, что для полинома $T^*(z) = (z^2-\alpha^2)/(1-\alpha^2)$ достигается равенство в (3), следовательно,

$$\frac{1}{1-\alpha^2} = \frac{r^2(D,\infty)}{4},$$

$$r(D,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Таким образом, неравенство (3) для функции f принимает вид

$$|c_n^2| \le \frac{2^{2n}}{(1-\alpha^2)^{n+1}}.$$

Извекая из обеих частей корень, получаем неравенство (8).

Для доказательства неравенства (9) воспользуемся неравенством (2). Функции Грина областей D и G соответственно имеют вид [6, 7]

$$g_D(z,\infty) = \ln\left|\frac{\sqrt{z^2-1}+\sqrt{z^2-\alpha^2}}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right|,$$

$$g_G(w,\infty) = \ln|2w-1+2\sqrt{w^2-w}|, \tag{10}$$

где ветви корней выбраны таким образом, что $g_D(\infty,\infty) = g_G(\infty,\infty) = +\infty$.

Вычисляя производные

$$\frac{\partial g_D(z_0,\infty)}{\partial n} = \frac{|z_0|}{\sqrt{(1-z_0^2)(z_0^2-\alpha^2)}}, \quad z_0 \in (-1,-\alpha)\cup(\alpha,1),$$

$$\frac{\partial g_G(w_0,\infty)}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{w_0^2-w_0}}, \quad w_0 \in (0,1),$$

из (2) приходим к неравенству

$$\frac{|2P(x)P'(x)(1-x^2)-2xP^2(x)|}{\sqrt{P^2(x)(1-x^2)-P^4(x)(1-x^2)^2}} \le \frac{(2n+2)|x|}{\sqrt{(1-x^2)(x^2-\alpha^2)}}$$

при $x \in (-1,-\alpha)\cup(\alpha,1)$, откуда после простых преобразований получаем неравенство (9).

Равенства в (8) и (9) при четных n и

$$P_n(z) = \pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}} W_{n/2}\Big(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\Big),$$

следуют из того факта, что функция $f(z)$ в этом случае осуществляет полное $(2n+2)$-кратное накрытие области $G = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$ областью

$D = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus ([-1, -\alpha] \cup [\alpha, 1])$, убедиться в этом нам помогает представление (7) полинома Чебышева четвертого рода. Действительно, введя обозначение

$$\phi(z) = \frac{2z^2 - 1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2},$$

получаем

$$P_n^2(z)(1 - z^2) = \frac{1 - z^2}{1 - \alpha^2} W_{n/2}^2(\phi(z))$$

$$= \frac{1 - z^2}{1 - \alpha^2} \left(\frac{(\phi(z) + \sqrt{\phi^2(z) - 1})^{\frac{n+1}{2}} - (\phi(z) - \sqrt{\phi^2(z) - 1})^{\frac{n+1}{2}}}{(\phi(z) + \sqrt{\phi^2(z) - 1})^{\frac{1}{2}} - (\phi(z) - \sqrt{\phi^2(z) - 1})^{\frac{1}{2}}} \right)^2$$

$$= \frac{1 - z^2}{1 - \alpha^2} \frac{(\phi(z) + \sqrt{\phi^2(z) - 1})^{n+1} - 2 + (\phi(z) - \sqrt{\phi^2(z) - 1})^{n+1}}{\phi(z) + \sqrt{\phi^2(z) - 1} - 2 + \phi(z) - \sqrt{\phi^2(z) - 1}}$$

$$= \frac{1 - z^2}{1 - \alpha^2} \frac{(\phi(z) + \sqrt{\phi^2(z) - 1})^{n+1} - 2 + (\phi(z) - \sqrt{\phi^2(z) - 1})^{n+1}}{2(\phi(z) - 1)}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{2}\left((\phi(z) + \sqrt{\phi^2(z) - 1})^{n+1} + (\phi(z) - \sqrt{\phi^2(z) - 1})^{n+1} \right)}{2}.$$

Из последнего выражения, а также из того, что фукция ϕ двукратно накрывает плоскость с разрезом по отрезку $[-1, 1]$ областью D, следует, что $f(z)$ осуществляет полное $(2n+2)$-кратное накрытие области G областью D.

Докажем обратное утверждение. Равенство в (8) и (9) достигается одновременно, поэтому достаточно расмотреть случай равенства только в (8). Так как рассматриваемая выше функция f является полиномом степени $2n + 2$, то из равенства

$$|c_n^2| = \frac{2^{2n}}{(1 - \alpha^2)^{n+1}}$$

и единственности решения задачи о наименьшем отклонении от нуля на двух отрезках полинома с вещественными коэффициентами и старшим коэффиценнтом равным 1 [8], следует, что

$$f(z) = \frac{1 - T_{n+1}\left(\dfrac{2z^2 - 1 - \alpha^2}{1 - \alpha^2} \right)}{2},$$

$$P_n^2(z)(1-z^2)=\frac{1-T_{n+1}\left(\dfrac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)}{2},$$

следовательно,

$$P_n(z)=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}W_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right),$$

Теорема доказана.

Устремляя в теореме 3 α к нулю, получаем неравенство, доказанное в работе [9], равенство в котором для любого $x\in[-1,1]$ достигается для полинома Чебышева второго рода.

Рассматривая функцию $f(z)=P^2(z)(z^2-\alpha^2)$ и проводя аналогичные рассуждения, получаем следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть полином* $P(z)=c_nz^n+\cdots+c_0$, $c_n\neq 0$, $c_k\in\mathbb{R}$, $k=0,\dots,n$ *удовлетворяет условию*

$$|P(x)|\sqrt{(x^2-\alpha^2)}\le 1,\quad x\in[-1,-\alpha]\cup[\alpha,1],\quad 0<\alpha<1,$$

тогда имеют место неравенства

$$|c_n|\le\frac{2^n}{(1-\alpha^2)^{(n+1)/2}}$$

и

$$\sqrt{1-x^2}|(x^2-\alpha^2)P'(x)+xP(x)|\le(n+1)|x|\sqrt{1-(x^2-\alpha^2)P^2(x)},$$

при $x\in[-1,-\alpha]\cup[\alpha,1]$.

Равенство в каждом из неравенств при четных n *достигается тогда и только тогда, когда*

$$P_n(z)=\pm\frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}V_{n/2}\left(\frac{2z^2-1-\alpha^2}{1-\alpha^2}\right).$$

Кроме того, подобные результаты можно получить и для полиномов $P(z)=c_nz^n+\cdots+c_0$, $c_n\neq0$, $c_k\in\mathbb{R}$, $k=0,\dots,n$, удовлетворяющих условию

$$|P(x)\sqrt{(1-x^2)(x^2-\alpha^2)}|\le 1,\quad x\in[-1,-\alpha]\cup[\alpha,1].$$

Множитель $\sqrt{(1-x^2)(x^2-\alpha^2)}$ является частным случаем веса, рассмотренного в работе [10].

§3. Неравенства для производных рациональных функций

Обозначим через $\omega(z,\alpha,D)$ гармоническую меру множества $\alpha \in \partial D$ в точке $z \in D$ относительно области D[7].

Теорема 5. *Для любой алгебраической дроби*

$$r(x) = \frac{x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_n}{\sqrt{\rho_\nu(x)}},$$

где $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$, $\rho_\nu(x) = \prod\limits_{j=1}^{\nu^*}(x-x_j)^{\nu_j}$ *– вещественный многочлен степени* ν, *положительный на* $E = [a_1,a_2] \cup \cdots \cup [a_{2l-1},a_{2l}] \subset \mathbb{R}, a_1 < \cdots < a_{2l}$, $x \in \operatorname{int}(E)$, *справедливо неравенство*

$$\left(\frac{r'(x)}{\frac{\pi}{2}((2n-\nu)_+ \varpi_E(\infty,x) + \sum_{j=1}^{\nu'}\nu_j \varpi_E(x'_j,x))}\right)^2 + r^2(x) \le ||r||^2_{C(E)}, \qquad (11)$$

здесь $\varpi_E(z,x) = \frac{d}{dx}(\omega(z,[\inf(E),x] \cap E, \mathbb{C}\setminus E))$, *а* x'_j *– те* x_j, *которые являются полюсами функции* r^2.

Равенство в (11) имеет место тогда и только тогда, когда для функции $f(z) = r^2(z)/||r||^2_{C(E)}$ $f(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus E) = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$ *и* f *осуществляет полное* m*-кратное накрытие области* $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$ *областью* $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus E$, *где* m *– степень рациональной функции* f.

Доказательство. Функция $f(z) = r^2(z)/||r||^2_{C(E)}$, заданная в области $D = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus E$, удовлетворяет условиям, при которых справедливо неравенство (2), где в качестве G взята область $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$.

Функция Грина области G имеет вид (10). Выписывая неравенство (2) для функции $f(z)$, получаем

$$\frac{|2r(x)r'(x)|}{||r||^2\sqrt{\frac{r^2(x)}{||r||^2} - \frac{r^4(x)}{||r||^4}}} \le (2n-\nu)_+ \frac{\partial g_D(x,\infty)}{\partial n^\pm} + \sum_{j=1}^{\nu'} \nu_j \frac{\partial g_D(x,x'_j)}{\partial n^\pm}$$

или

$$\frac{|r'(x)|}{\sqrt{||r||^2_{C(E)} - r^2(x)}} \le \left(n - \frac{\nu}{2}\right)_+ \frac{\partial g_D(x,\infty)}{\partial n^\pm} + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\nu'} \nu_j \frac{\partial g_D(x,x'_j)}{\partial n^\pm},$$

где $\frac{\partial}{\partial n^+}$ означает дифференцирование в направлении мнимой оси, а $\frac{\partial}{\partial n^-}$ – в противоположном направлении. Для завершения доказательства теоремы осталось заметить, что

$$\varpi_E(\zeta, x) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial g_D(x,\zeta)}{\partial n^+} + \frac{\partial g_D(x,\zeta)}{\partial n^-}\right], \quad \zeta \in E.$$

Утверждение о случае равенства следует из теоремы 2. Теорема доказана.

Добавляя недостающие слагаемые в знаменателе левой части неравенства (11), получаем неравенство теоремы 5 работы [3]. Наш подход позволяет также получить неравенство для производной "рационально-тригометрической" функции вида

$$r(\varphi) = \frac{a_0 \cos N\varphi + b_0 \sin N\varphi + a_1 \cos(N-1)\varphi + \cdots + b_{[N]} \sin(N-[N])\varphi}{\sqrt{A_a(\varphi)}}, \quad (12)$$

где $N \in \mathbb{N}/2$, ${a_0}^2 + {b_0}^2 \neq 0$ и $A_a(\varphi)$ – фиксированный вещественный тригонометрический полином порядка $a \in \mathbb{N}$, имеющий представление $A(\varphi) = \prod\limits_{j=1}^{m^*} \sin\frac{\varphi - \xi_j}{2}$.

Пусть $\mathcal{E} = [\varphi_1, \varphi_2] \cup \cdots \cup [\varphi_{2l-1}, \varphi_{2l}]$, $b \leq \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_{2l} < b + 2\pi$. Рассмотрим функцию

$$f_1(z) = \frac{1}{2||r(\varphi)||^2_{C(\mathcal{E})}} \frac{(Q_1(z) + \overline{Q_1(1/\overline{z})})^2}{Q_2(z) + \overline{Q_2(1/\overline{z})}}$$

в области $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$, $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z \in e^{i\varphi}, \varphi \in \mathcal{E}\}$. Здесь

$$Q_1(\zeta) = \sum_{j=0}^{[N]} (a_j - ib_j)\zeta^{N-j},$$

а

$$Q_2(\zeta) = \sum_{j=0}^{a} (a_j^* - ib_j^*)\zeta^j,$$

где a_j^*, b_j^* – коэффициенты из представления тригонометрического полинома $A_a(\varphi)$

$$A_a(\varphi) = \sum_{j=0}^{a} (a_j^* \cos j\varphi + b_j^* \sin j\varphi).$$

Из определения функции f_1 легко видеть, что

$$f_1(e^{i\varphi}) = \frac{r^2(\varphi)}{||r(\varphi)||^2_{C(\mathcal{E})}}, \quad \varphi \in \mathcal{E}.$$

Теорема 6. *Для любой рациональной тригонометрической функции $r(\varphi)$ вида (12), положительной на заданной конечной системе отрезков $\mathcal{E} = [\varphi_1, \varphi_2] \cup \cdots \cup [\varphi_{2l-1}, \varphi_{2l}]$, $b \le \varphi_1 < \varphi_2 < \cdots < \varphi_{2l} < b + 2\pi$, справедливо неравенство*

$$\left(\frac{r'(\varphi)}{\frac{\pi}{2}((2N-a)_+(\varpi(\infty,\varphi) + \varpi(0,\varphi)) + \sum_{j=1}^{m'^*} \nu_j \varpi(z'_j, x))} \right)^2 + r^2(\varphi) \le ||r||^2_{C(\mathcal{E})}, \quad (13)$$

где $x \in \operatorname{int}(\mathcal{E})$, а z'_j – те $z_j = e^{i\xi_j}$, которые являются полюсами функции f_1. Здесь $\varpi(z,x) = \frac{\partial}{\partial x}\omega(z, \Gamma \cap e^{i\varphi} : b \le \varphi \le x, \mathbb{C} \setminus \Gamma)$, $\Gamma = \{z \in \mathbb{C} : z \in e^{i\varphi}, \varphi \in \mathcal{E}\}$.

Равенство в (13) имеет место тогда и только тогда, когда $f_1(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma) = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$ и f_1 осуществляет полное m-кратное накрытие области $\overline{C}_w \setminus [0,1]$ областью $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, где m – степень рациональной функции f_1.

Доказательство. Функция f_1, заданная в области $D = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, удовлетворяет условиям, при которых справедливо неравенство (2), если в качестве G взята область $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$. Следовательно,

$$|f'(z)| \frac{1}{\sqrt{f(z) - f^2(z)}} \le (2N-a)_+ \left(\frac{\partial g_D(z,\infty)}{\partial n^\pm} + \frac{\partial g_D(z,0)}{\partial n^\pm} \right) + \sum_{j=1}^{m'^*} \nu_j \frac{\partial g_D(z, z'_j)}{\partial n^\pm},$$

где $z \in \Gamma$, а $\frac{\partial}{\partial n^+}$ означает дифференцирование вдоль радиуса от центра единичной окружности, а $\frac{\partial}{\partial n^-}$ – в противоположном направлении. Переходя к функции $r(\varphi)$, получаем неравенство

$$\frac{|r'(\varphi)|}{\sqrt{||r||^2_{C(\mathcal{E})} - r^2(\varphi)}} \le \left(N - \frac{a}{2}\right)_+ \left(\frac{\partial g_D(z,\infty)}{\partial n^\pm} + \frac{\partial g_D(z,0)}{\partial n^\pm} \right) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{m'^*} \nu_j \frac{\partial g_D(z, z'_j)}{\partial n^\pm},$$

где $z \in \Gamma$, тогда утверждение теоремы следует из того факта, что

$$\varpi(\zeta, x) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial g_D(e^{ix},\zeta)}{\partial n^+} + \frac{\partial g_D(e^{ix},\zeta)}{\partial n^-}\right], \quad x \in \mathrm{int}\,(\mathcal{E}).$$

Утверждение о случае равенства следует из теоремы 2. Теорема доказана.

Из неравенства (13) после добавления недостающих слагаемых в знаменателе левой части получаем неравенство теоремы 4 работы [3].

В заключение рассмотрим решение четвертой задачи Золотарева $Z_n(z)$ о наилучшем приближении функции $\operatorname{sign} x$ на $E = [-1, -\alpha] \cup [\alpha, 1]$, $0 < \alpha < 1$, действительными рациональными функциями. В параметрической форме решение этой задачи дается следующими формулами

$$\begin{cases} x = \alpha\,\mathrm{sn}\,(u, x), \\ y = (1-\mathcal{L})\mathrm{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right), \\ \lambda = \frac{1-\mathcal{L}}{1+\mathcal{L}}, \end{cases}$$

$$L' = \frac{K'}{nM}, \quad L = \frac{K}{M},$$

где K, L – полные эллиптические интегралы первого рода для для модулей α и λ, K', L' – для дополнительных модулей, а $\mathcal{L}$ – величина уклонения [11]. Учитывая характер отображения $\mathrm{sn}\,(\omega, k)$ [12], видим, что $Z_n(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus E) = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus F$, где $F = Z_n(E) = [-\mathcal{L}-1, \mathcal{L}-1] \cup [-\mathcal{L}+1, \mathcal{L}+1]$. Кроме того, функция $Z_n(z)$ осуществляет полное n-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus F$ областью $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus E$. Таким образом, согласно теоремам 1 и 2 для $Z_n(z)$ выполняются равенства (4) и (6), где в качестве D и G взяты соответственно области $\overline{\mathbb{C}}_z \setminus E$ и $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus F$, а $z_k, k = 1, \ldots, n$, – полюсы функции $Z_n(z)$ (см. [13]).

Автор выражает благодарность В. Н. Дубинину за ценные замечания.

Литература

1. В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, *Принцип мажорации для мероморфных функций.* — Мат. сб. **198**, No. 12 (2007), 37–46.
2. И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы.* Кубанский гос. ун-т, Краснодар, 1980.

3. А. Л. Лукашов, *Неравенства для производных рациональных функций на нескольких отрезках.* — Изв. РАН. Сер. мат., **68**, No. 3 (2004), 115–138.
4. M. H. Protter, H. F. Weinberger, *Maximum principles in differential equations.* Springer-Verlag, New York, Inc., 1984.
5. Я. Л. Геронимус, *Теория ортогональных многочленов.* М., 1950.
6. Г. Сеге, *Ортогональные многочлены.* М., 1962.
7. С. Стоилов, *Теория функций комплексного переменного.* Т. 2, М., 1962.
8. Н. И. Ахиезер, *Элементы теории эллиптических функций.* М., 1970.
9. В. Н. Дубинин, А. В. Олесов, *О применении конформных отображений к неравенствам для полиномов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 85–102.
10. F. Peherstorfer, *Elliptic orthogonal and extremal polynomials.* — Proc. London Math. Soc. **70**, No. 3 (1995), 605–624.
11. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М., 1947.
12. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного.* СПб., 2002.
13. А. Л. Лукашов, *Оценки производных рациональных функций и четвертая задача Золотарева.* — Алгебра и анализ **19**, No. 2 (2007), 122–130.

Kalmykov S. I. Majoration principles and some inequalities for polynomials and rational functions with prescribed poles.

The paper considers the equality cases in the majoration principle for meromorphic functions established earlier by V. N. Dubinin and S. I. Kalmykov [*Mat. Sb.* **198** (2007), No. 12, 37–46; translated in *Mat. Sb.* **198** (2007), No. 11–12, 1737–1745]. As corollaries of this principle, we obtain new inequalities for the coefficients and derivatives of polynomials satisfying certain conditions on two intervals. Simple proofs of some Lukashov's theorems on the derivatives of rational functions on several intervals [MR 2069196 (2006):26010)] are provided.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, Владивосток

E-mail: sergeykalmykov@inbox.ru

Поступило 7 июля 2008 г.