Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

В. В. Жук

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ ПОЛИНОМАМИ ТИПА ДЖЕКСОНА

Пусть C – пространство непрерывных 2π-периодических функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$, $t_k = \frac{2\pi k}{n+1}$,

$$J_n(f,x) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} f(t_k)\left(\frac{\sin\frac{(n+1)}{2}(x-t_k)}{\sin\frac{(x-t_k)}{2}}\right)^2$$

– полиномы Джексона функции f. Полиномы $J_n(f)$ обладают (см. [1, с. 35, 36]) свойствами: $J_n(f)$ – тригонометрический полином порядка не выше n, $J_n(f,t_k) = f(t_k)$, $J_n'(f,t_k) = 0$. Представляет интерес вопрос: как связано поведение величины $\|f - J_n(f)\|$ со структурными свойствами функции f. Он изучался в ряде работ различных авторов (см., например, [2, 3] и указанную там литературу). В частности, в [3] показано, что для любой $f \in C$

$$\frac{1}{n+1}\max_{0\leqslant k\leqslant n}(k+1)\|J_k(f) - f\| \asymp \alpha\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big),$$

где

$$\alpha(f,\delta) = \delta\left\|\int\limits_{\delta}^{\pi}\frac{f(\cdot+t)+f(\cdot-t)-2f(\cdot)}{t^2}dt\right\| + \omega(f,\delta)$$

($\omega(f,\delta)$ – модуль непрерывности функции f). Пусть

$$Q_{n,r}(f,x) = f(x) - R_{n,r}(f,x),$$

где

$$R_{n,r}(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n+1}\right)^r\right)(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

– средние Рисса; $\omega_r(g,h)$ – модуль непрерывности порядка r функции g,

$$\beta_r(f,h) = \omega_{r+1}(f,h) + h^{-1}\omega_{r+2}(\widetilde{F},h),$$

где $\widetilde{F}$ – функция, тригонометрически сопряженная с первообразной для функции $f - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f$.

В настоящей работе получены результаты следующего типа

$$E_n(f) + ||J_{4n-1}(Q_{n,r}(f)) - Q_{n,r}(f)|| \asymp \beta_r\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big),$$

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} ||J_n(Q_{n,r}(f,\cdot+\alpha)) - Q_{n,r}(f,\cdot+\alpha)|| \asymp \beta_r\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big).$$

Здесь r – целое неотрицательное число, $Q_{n,0}(f) = f$, f – любая функция из C. В частности, при $r = 0$ имеем

$$E_n(f) + ||J_{4n-1}(f) - f|| \asymp \omega_1\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) + (n+1)\omega_2\Big(\widetilde{F}, \frac{1}{n+1}\Big),$$

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} ||J_n(f(\cdot+\alpha)) - f(\cdot+\alpha)|| \asymp \omega_1\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) + (n+1)\omega_2\Big(\widetilde{F}, \frac{1}{n+1}\Big).$$

В основе приведенных выше соотношений лежат теоремы общего характера (см. §2), применимые и к другим методам аппроксимации. Отметим, что подходы, используемые в данной работе, в значительной части уже применялись автором ранее и в определенной степени они нашли свое отражение в монографии [4].

§1. Обозначения. Вспомогательные предложения

1. В дальнейшем $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_+, \mathbb{N}$ суть соответственно множества вещественных, неотрицательных вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел; $C_k(\cdot)$ – положительные конечные постоянные, зависящие только от выписанных аргументов, $Q = [-\pi, \pi]$. Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Считаем $0^0 = 1$, $+\infty \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = +\infty$.

Через L_p при $1 \leqslant p < \infty$ обозначаем множество измеримых 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, у которых

$$\|f\|_p = \Big(\int\limits_Q |f|^p\Big)^{1/p} < \infty;$$

C – пространство непрерывных 2π-периодических функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|;$$

H_n – множество вещественных тригонометрических полиномов порядка не выше n. В дальнейшем вместо тригонометрический полином говорим просто полином.

Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_Q f(t)\cos ktdt, \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_Q f(t)\sin ktdt$$

– коэффициенты Фурье функции f, при $k \in \mathbb{N}$

$$A_k(f,x) = a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx; \quad A_0(f,x) = \frac{a_0(f)}{2};$$

$$S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f,x), \quad \sigma_n(f,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x),$$

$$\tau_n(f,x) = \frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1} S_k(f,x), \quad R_{l,r}(f,x) = \sum_{k=0}^{l}\Big(1 - \Big(\frac{k}{l+1}\Big)^r\Big)A_k(f,x)$$

суть соответственно суммы Фурье, Фейера, Валле Пуссена, Рисса функции f; E – тождественный оператор в L_1;

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2,$$

$$V_n(t) = \frac{1}{4\pi n}\ \frac{\cos nt - \cos 2nt}{\sin^2\frac{t}{2}}$$

суть соответственно ядра Фейера, Валле Пуссена. Справедливы соотношения: $\sigma_n(f) = R_{n,1}(f)$,

$$(E - \sigma_n)^r(f) = f - R_{n,r}(f)$$

при $r \in \mathbb{N}$;

$$\sigma_n(f,x) = \int\limits_Q f(x+t)\Phi_n(t)dt,$$

$$\tau_n(f,x) = \int\limits_Q f(x+t)V_n(t)dt.$$

Пусть $f \in C$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Delta_t^r(f,x) = \sum_{m=0}^{r} (-1)^{r-m} C_r^m f(x+mt)$$

– конечная разность r-го порядка функции f в точке x с шагом t;

$$\omega_r(f,h) = \sup_{|t|\leqslant h} \|\Delta_t^r(f)\|$$

– модуль непрерывности порядка r функции f в пространстве C;

$$E_n(f) = \inf_{T\in H_n} \|f-T\|$$

– наилучшее приближение f порядка n в C, $T_n(f) \in H_n$ – полином наилучшего приближения функции f из H_n, т.е.

$$E_n(f) = \|f - T_n(f)\|.$$

Через $\widetilde{f}$ обозначаем функцию, тригонометрически сопряженную с f:

$$\widetilde{f}(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-b_n(f)\cos nx + a_n(f)\sin nx);$$

F – первообразная для функции $f - \frac{a_0(f)}{2}$, $\widetilde{F}$ – функция, тригонометрически сопряженная с F, т.е.

$$\widetilde{F}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{b_n(f)}{n}\sin nx - \frac{a_n(f)}{n}\cos nx \right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(f,x)}{n}.$$

Для оператора $U : C \to C$ полагаем

$$||U|| = \sup_{f\in C}\{||U(f)|| \,/\, ||f||\};$$

$$A(r) = \sup_{l\in\mathbb{Z}_+} \sup_{f\in C}\{||R_{l,r}(f)||/||f||\} = \sup_{l\in\mathbb{Z}_+} ||R_{l,r}||,$$

$$Q_{l,r}(f,x) = f(x) - R_{l,r}(f,x),$$

$$B(r) = \sup_{l\in\mathbb{Z}_+} \sup_{f\in C} \left\{ \frac{||Q_{l,r}(f)||}{\omega_r(f, \frac{\pi}{l+1})} \right\},$$

$$D(r) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+} \sup_{f\in C} \left\{ \frac{E_n(f)}{\omega_r(f, \frac{\pi}{n+1})} \right\};$$

$$Q(r) = \sup_{l\in\mathbb{Z}_+} \sup_{f\in H} \left\{ \frac{(l+1)^r ||Q_{l,r}(f)||}{||f^{(r)}||} \right\},$$

если $r/2 \in \mathbb{Z}_+$,

$$Q(r) = \sup_{l\in\mathbb{Z}_+} \sup_{f\in H} \left\{ \frac{(l+1)^r ||Q_{l,r}(f)||}{||\widetilde{f}^{(r)}||} \right\},$$

если $\frac{r+1}{2} \in \mathbb{N}$, где $H = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} H_n$ – множество всех тригонометрических полиномов.

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Тогда Ω_n – множество операторов $U : C \to C$, удовлетворяющих для любого $T \in H_n$ условиям: $U(T) \in H_n$, $U'(T) = U(T')$, $\widetilde{U}(T) = U(\widetilde{T})$.

Через Λ обозначаем множество функционалов $\Phi : C \to \mathbb{R}_+$ таких, что

$$\Phi(f+g) \leqslant \Phi(f) + \Phi(g)$$

для любых $f, g \in C$. Для $\Phi \in \Lambda$ полагаем

$$||\Phi|| = \sup_{f\in C} \{\Phi(f)/||f||\}.$$

Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C$. Через $J_n(f)$ обозначаем полиномы Джексона функции f:

$$J_n(f,x) = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(t_k)\Phi_n(x-t_k), \quad t_k = \frac{2\pi k}{n+1}.$$

Пусть $n, l, r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C$. Полагаем

$$K_n(f,x) = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \left| f(x+\alpha) - \frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(t_k+\alpha)\Phi_n(x-t_k) \right|,$$

$$L_n(f) = ||f - J_n(f)||, \quad M_n(f) = ||K_n(f)||, \quad L_{n,l,r}(f) = L_n(Q_{l,r}(f)),$$
$$M_{n,l,r}(f) = M_n(Q_{l,r}(f)), \quad X_{n,l,r}(f,x) = K_n(Q_{l,r}(f),x).$$

В дальнейшем $C^{(r)} = \{f \in C : \exists f^{(r)} \in C\}$,

$$\widetilde{K}_1 = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = \frac{4}{\pi}G, \quad \gamma = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi}, \quad \gamma^* = \gamma + 1,$$

где $G = 0,915965\dots$ – постоянная Каталана.

Пусть $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $f \in C$. Тогда

$$\Omega_r(f,h) = \omega_r(f,h) + h^{-1}\omega_{r+1}(\widetilde{F},h).$$

2. Нам понадобятся следующие известные результаты,

Лемма A (см. [5, с. 120])**.** *Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда*

$$||\tau_n|| = \int\limits_Q |V_n(t)|dt = \gamma.$$

Лемма B. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $f \in C$. Тогда*

$$||f - \tau_n(f)|| \leqslant \gamma^* E_n(f).$$

Лемма C (см. [6, с. 331])**.** *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C$. Тогда*

$$E_n(\widetilde{F}) \leqslant \frac{\widetilde{K}_1}{n+1}E_n(f).$$

Лемма D (см. [6, с. 223])**.** *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $T \in H_n$. Тогда*

$$||T'|| \leqslant n||T||, \quad ||\widetilde{T}\,'|| \leqslant n||T||.$$

Лемма E (см. [6, с. 228])**.** *Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $T \in H_{n+1}$. Тогда*

$$||T^{(r)}|| \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^r \left\|\Delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(T)\right\|.$$

Лемма F (см. [7, с. 47]). *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$, $||T|| = T(x_0)$.

Тогда $T(x_0 + t) \geqslant ||T|| \cos nt$ *для* $t \in [-\pi/n, \pi/n]$.

Лемма G (см. [2, с. 401; 3, с. 240]). *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $x \in \mathbb{R}$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$J_m(T, x) = T(x) + (\cos(m+1)x - 1)(T(x) - \sigma_m(T, x)) + (\widetilde{T}(x) - \widetilde{\sigma}_m(T, x)) \sin(m+1)x. \quad (1)$$

Замечание 1. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Так как для любого $T \in H_{n+1}$

$$T(x) - \sigma_n(T, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} k A_k(f, x) = \frac{\widetilde{T}'(x)}{n+1},$$

$$T(x) - \widetilde{\sigma}_n(T, x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} k(-b_k(f) \cos kx + a_k(f) \sin kx) = -\frac{T'(x)}{n+1},$$

то равенство (1) можно переписать в виде

$$J_m(T, x) = T(x) + \frac{1}{m+1} \Big\{ (\cos(m+1)x - 1) \widetilde{T}'(x) - T'(x) \sin(m+1)x \Big\}. \quad (2)$$

Лемма H (см. [6, с. 274]). *Пусть* $r \in \mathbb{N}$. *Тогда* $D(r) < \infty$.

Лемма J. *Если* $r \in \mathbb{Z}_+$, *то* $A(r) < \infty$, $Q(r) < \infty$; $B(r) < \infty$ *при* $r/2 \in \mathbb{N}$.

3. Лемма 1. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $f \in C$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$||\widetilde{\tau}_n^{(r)}(f)|| \leqslant \gamma (2n-1)^r ||f - T|| + ||\widetilde{T}^{(r)}||, \quad (3)$$

$$||\tau_n^{(r)}(f)|| \leqslant \gamma (2n-1)^r ||f - T|| + ||T^{(r)}||. \quad (4)$$

Доказательство. Установим неравенство (3) (неравенство (4) доказывается аналогично). Опираясь на лемму D и равенство $\tau_n(T) = T$, имеем

$$\begin{aligned} ||\widetilde{\tau}_n^{(r)}(f)|| &\leqslant ||\widetilde{\tau}_n^{(r)}(f) - \widetilde{T}^{(r)}|| + ||\widetilde{T}^{(r)}|| \\ &\leqslant (2n-1)^r ||\tau_n(f) - T|| + ||\widetilde{T}^{(r)}|| \\ &= (2n-1)^r ||\tau_n(f - T)|| + ||\widetilde{T}^{(r)}|| \\ &\leqslant (2n-1)^r ||\tau_n|| \, ||f - T|| + ||\widetilde{T}^{(r)}||. \end{aligned}$$

Осталось воспользоваться леммой A.

Следствие 1. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $f \in C$. *Тогда*

$$||\widetilde{\tau}_n^{(r)}(f)|| \leqslant \gamma(2n-1)^r E_n(f) + ||\widetilde{T}^{(r)}(f)||, \tag{5}$$

$$||\tau_n^{(r)}(f)|| \leqslant \gamma(2n-1)^r E_n(f) + ||T^{(r)}(f)||. \tag{6}$$

Для доказательства следствия 1 достаточно положить в неравенствах (3) и (4) $T = T_n(f)$.

Лемма 2. *Пусть* n, $m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $y_k = \frac{\pi(2k+1)}{m+1}$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$\max_{k\in\mathbb{Z}} |J_m(T, y_k) - T(y_k)| \geqslant \frac{2||\widetilde{T}\,'||}{m+1} \cos\frac{n\pi}{m+1}.$$

Доказательство. Из равенства (2) сразу следует, что

$$|J_m(T, y_k) - T(y_k)| = \frac{2}{m+1} |\widetilde{T}\,'(y_k)|. \tag{7}$$

Пусть $||\widetilde{T}\,'|| = \widetilde{T}\,'(x_0)$ (если $||\widetilde{T}\,'|| = -\widetilde{T}\,'(x_0)$, то рассуждение ведется для полинома $-\widetilde{T}\,'$). Так как $y_{k+1} - y_k = \frac{2\pi}{m+1}$, то x_0 попадет в какой-то отрезок $[y_k, y_{k+1}]$ длины $\frac{2\pi}{m+1}$ и потому на основании леммы F и соотношения (7) имеем

$$\max_{k\in\mathbb{Z}} |J_m(T, y_k) - T(y_k)| \geqslant \frac{2||\widetilde{T}\,'||}{m+1} \cos\frac{n\pi}{m+1}.$$

Лемма 3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$||J_m(T) - T|| + \frac{||\widetilde{T}\,'||}{m+1} \geqslant \frac{||T'||}{m+1} \cos\frac{n\pi}{2(m+1)}.$$

Доказательство. Положим

$$x_k = \frac{\pi}{2(m+1)} + \frac{\pi k}{m+1}.$$

Принимая во внимание формулу (2), легко понять, что

$$||J_m(T)-T||+\frac{||\widetilde{T}\,'||}{m+1}\geqslant\frac{1}{m+1}\sup_{k\in\mathbb{Z}}|T'(x_k)|. \tag{8}$$

Пусть $||T'||=T'(x_0)$ (если $||T'||=-T'(x_0)$, то рассуждение ведется для полинома $-T'$). Так как $x_{k+1}-x_k=\frac{\pi}{m+1}$, то x_0 попадет в какой-то отрезок $[x_k,x_{k+1}]$ длины $\frac{\pi}{m+1}$ и потому на основании леммы F и соотношения (8) имеем

$$||J_m(T)-T||+\frac{||\widetilde{T}\,'||}{m+1}\geqslant\frac{1}{m+1}\sup_{k\in\mathbb{Z}}|T'(x_k)|\geqslant\frac{||T'||}{m+1}\cos\frac{n\pi}{2(m+1)}.$$

Следствие 2. *Пусть $n,m\in\mathbb{Z}_+$, $m\geqslant 4n-1$, $T\in H_n$. Тогда*

$$||\widetilde{T}\,'||\leqslant(m+1)\Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big)||J_m(T)-T||=L_m(T)(m+1)\cos\frac{\pi}{4}, \tag{9}$$

$$||T'||\leqslant 2(m+1)\Big(\cos\frac{\pi}{8}\Big)||J_m(T)-T||=L_m(T)(m+1)2\cos\frac{\pi}{8}. \tag{10}$$

Доказательство. Можно считать $n\in\mathbb{N}$. Докажем (9). В силу леммы 2

$$L_m(T)=||J_m(T)-T||\geqslant\frac{2||\widetilde{T}\,'||}{m+1}\cos\frac{\pi}{4}=\frac{||\widetilde{T}\,'||}{(m+1)\cos(\pi/4)}.$$

Теперь установим (10). Применяя лемму 3 и неравенство (9), имеем

$$\Big(1+\cos\frac{\pi}{4}\Big)||J_m(T)-T||\geqslant\frac{||T'||}{m+1}\cos\frac{\pi}{8}.$$

Осталось заметить, что $1+\cos\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{\pi}{8}$.

Лемма 4. *Пусть $n,m\in\mathbb{Z}_+$, $m\geqslant n$, $T\in H_n$. Тогда*

$$||\widetilde{T}\,'||\leqslant\frac{m+1}{2}M_m(T), \tag{11}$$

$$||T'||\leqslant\frac{3}{2}(m+1)M_m(T). \tag{12}$$

Доказательство. Положим $T_\alpha(\cdot) = T(\cdot + \alpha)$. Опираясь на равенство (2), при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$M_m(T) \geqslant \left|T_\alpha\Big(\frac{\pi}{m+1}\Big) - J_m\Big(T_\alpha, \frac{\pi}{m+1}\Big)\right| = \frac{2}{m+1}\left|\widetilde{T}\,'\Big(\frac{\pi}{m+1} + \alpha\Big)\right|$$

и, следовательно,

$$||\widetilde{T}\,'|| = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\left|\widetilde{T}\,'\Big(\frac{\pi}{m+1} + \alpha\Big)\right| \leqslant \frac{m+1}{2}M_m(T).$$

Далее, полагая в формуле (2) $x = \frac{\pi}{2(m+1)}$, при любом $\alpha \in \mathbb{R}$ имеем

$$M_m(T) + \frac{||\widetilde{T}\,'||}{m+1} \geqslant \frac{\left|T'\big(\frac{\pi}{2(m+1)} + \alpha\big)\right|}{m+1}.$$

Отсюда, применяя неравенство (11), находим

$$M_m(T)\Big(1 + \frac{1}{2}\Big) \geqslant \frac{1}{m+1}\sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\left|T'\Big(\frac{\pi}{2(m+1)} + \alpha\Big)\right| = \frac{\|T'\|}{m+1}.$$

Следствие 3. *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant 4n-1$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $U \in \Omega_n$, *для любого полинома* $T \in H_n$ *справедливо неравенство* $||T^{(r)}|| \leqslant \alpha||U(T)||$. *Тогда для любого* $T \in H_n$

$$\begin{aligned}||\widetilde{T}^{\,(r+1)}|| &\leqslant (m+1)\alpha\Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big)||J_m(U(T)) - U(T)|| \\ &= (m+1)\alpha\Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big)L_m(U(T)), \qquad (13)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}||T^{(r+1)}|| &\leqslant 2(m+1)\alpha\Big(\cos\frac{\pi}{8}\Big)||J_m(U(T)) - U(T)|| \\ &= 2(m+1)\alpha\Big(\cos\frac{\pi}{8}\Big)L_m(U(T)). \qquad (14)\end{aligned}$$

Доказательство. Установим (13). Принимая во внимание неравенство (9) и свойства оператора U, имеем

$$||\widetilde{T}^{\,(r+1)}|| \leqslant \alpha||U(\widetilde{T}\,')|| = \alpha||\widetilde{U}\,'(T)|| \leqslant (m+1)\alpha\Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big)L_m(U(T)).$$

Неравенство (14) доказывается аналогично, но здесь вместо неравенства (9) применяется соотношение (10).

Следствие 4. *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant 4n-1$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $U \in \Omega_n$, *для любого полинома* $T \in H_n$ *справедливо неравенство* $||\widetilde{T}^{(r)}|| \leqslant \alpha||U(T)||$. *Тогда для любого* $T \in H_n$

$$||T^{(r+1)}|| \leqslant (m+1)\alpha\Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big)L_m(U(T)),$$
$$||\widetilde{T}^{(r+1)}|| \leqslant 2(m+1)\alpha\Big(\cos\frac{\pi}{8}\Big)L_m(U(T)).$$

Доказательство следствия 4 аналогично доказательству следствия 3.

Следствие 5. *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $U \in \Omega_n$, *для любого полинома* $T \in H_n$ *справедливо неравенство* $||T^{(r)}|| \leqslant \alpha||U(T)||$. *Тогда для любого* $T \in H_n$

$$||\widetilde{T}^{(r+1)}|| \leqslant \frac{\alpha}{2}(m+1)M_m(U(T)), \tag{15}$$
$$||T^{(r+1)}|| \leqslant \frac{3\alpha}{2}(m+1)M_m(U(T)). \tag{16}$$

Доказательство. Установим (15). Принимая во внимание неравенство (11) и свойства оператора U, имеем

$$||\widetilde{T}^{(r+1)}|| \leqslant \alpha||U(\widetilde{T}')|| = \alpha||\widetilde{U}'(T)|| \leqslant \frac{\alpha}{2}(m+1)M_m(U(T)).$$

Неравенство (16) доказывается аналогично, но здесь вместо неравенства (11) применяется соотношение (12).

Следствие 6. *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $U \in \Omega_n$, *для любого полинома* $T \in H_n$ *справедливо неравенство* $\|\widetilde{T}^{(r)}\| \leqslant \alpha\|U(T)\|$. *Тогда для любого* $T \in H_n$

$$||T^{(r+1)}|| \leqslant \frac{\alpha}{2}(m+1)M_m(U(T)), \quad ||\widetilde{T}^{(r+1)}|| \leqslant \frac{3\alpha}{2}(m+1)M_m(U(T)).$$

Лемма 5. *Пусть* $n, m, r \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $U \in \Omega_n$, *для любого полинома* $T \in H_n$ *справедливо неравенство* $||U(T)|| \leqslant \alpha||T^{(r)}||$. *Тогда для любого* $T \in H_n$

$$K_m(U(T), x)$$
$$\leqslant \frac{\alpha}{m+1}\Big\{||\widetilde{T}^{(r+1)}||(1-\cos(m+1)x) + ||T^{(r+1)}||\,|\sin(m+1)x|\Big\}.$$

Доказательство. Опираясь на соотношение (2), имеем

$$K_m(U(T))\leqslant\frac{1}{m+1}\Big\{||\widetilde{U}\,'(T)||(1-\cos(m+1)x)+||U'(T)||\,|\sin(m+1)x|\Big\}$$

$$=\frac{1}{m+1}\Big\{||U(\widetilde{T}\,')||(1-\cos(m+1)x)+||U(T')||\,|\sin(m+1)x|\Big\}$$

$$\leqslant\frac{\alpha}{m+1}\Big\{||\widetilde{T}^{\,(r+1)}||(1-\cos(m+1)x)+||T^{(r+1)}||\,|\sin(m+1)x|\Big\}.$$

Лемма 6. *Пусть $n,m,r\in\mathbb{Z}_+$, $m\geqslant n$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $U\in\Omega_n$, для любого полинома $T\in H_n$ справедливо неравенство $||U(T)||\leqslant\alpha||\widetilde{T}^{\,(r)}||$. Тогда для любого $T\in H_n$*

$$K_m(U(T),x)\leqslant\frac{\alpha}{m+1}\Big\{||T^{(r+1)}||(1-\cos(m+1)x)+||\widetilde{T}^{\,(r+1)}||\,|\sin(m+1)x|\Big\}.$$

Доказательство леммы 6 аналогично доказательству леммы 5.

Следствие 7. *Пусть $n,m,r\in\mathbb{Z}_+$, $m\geqslant n$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $U\in\Omega_n$, для любого полинома $T\in H_n$ справедливо неравенство $||U(T)||\leqslant\alpha||T^{(r)}||$. Тогда для любого $T\in H_n$*

$$M_m(U(T))\leqslant\frac{\alpha}{m+1}\Big\{2||\widetilde{T}^{\,(r+1)}||+||T^{(r+1)}||\Big\}.$$

Следствие 8. *Пусть $n,m,r\in\mathbb{Z}_+$, $m\geqslant n$, $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $U\in\Omega_n$, для любого полинома $T\in H_n$ справедливо неравенство $||U(T)||\leqslant\alpha||\widetilde{T}^{\,(r)}||$. Тогда для любого $T\in H_n$*

$$M_m(T)\leqslant\frac{\alpha}{m+1}\Big\{2||T^{(r+1)}||+||\widetilde{T}^{\,(r+1)}||\Big\}.$$

4. Следствие 9. *Пусть $n,m,l\in\mathbb{Z}_+$, $m\geqslant 4n-1$, $l+1\geqslant n$, $\frac{r}{2}\in\mathbb{Z}_+$. Тогда для любого полинома $T\in H_n$*

$$||\widetilde{T}^{\,(r+1)}||\leqslant(m+1)(l+1)^r\Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big)L_{m,l,r}(T),\tag{17}$$

$$||T^{(r+1)}||\leqslant 2(m+1)(l+1)^r\Big(\cos\frac{\pi}{8}\Big)L_{m,l,r}(T).\tag{18}$$

Следствие 10. *Пусть* $n, m, l \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant 4n-1$, $l+1 \geqslant n$, $\frac{r+1}{2} \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого полинома* $T \in H_n$

$$||T^{(r+1)}|| \leqslant (m+1)(l+1)^r \Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big) L_{m,l,r}(T),$$

$$||\widetilde{T}^{\,(r+1)}|| \leqslant 2(m+1)(l+1)^r \Big(\cos\frac{\pi}{8}\Big) L_{m,l,r}(T).$$

Следствие 11. *Пусть* $n, m, l \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $l+1 \geqslant n$, $\frac{r}{2} \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для любого полинома* $T \in H_n$

$$||\widetilde{T}^{\,(r+1)}|| \leqslant \frac{1}{2}(m+1)(l+1)^r\, M_{m,l,r}(T),$$

$$||T^{(r+1)}|| \leqslant \frac{3}{2}(m+1)(l+1)^r\, M_{m,l,r}(T).$$

Следствие 12. *Пусть* $n, m, l \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $l+1 \geqslant n$, $\frac{r+1}{2} \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого полинома* $T \in H_n$

$$||T^{(r+1)}|| \leqslant \frac{1}{2}(m+1)(l+1)^r\, M_{m,l,r}(T),$$

$$||\widetilde{T}^{\,(r+1)}|| \leqslant \frac{3}{2}(m+1)(l+1)^r\, M_{m,l,r}(T).$$

Следствие 13. *Пусть* $n, m, l \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $\frac{r}{2} \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$. *Тогда для любого полинома* $T \in H_n$

$$X_{m,l,r}(T,x) \leqslant \frac{Q(r)}{(m+1)(l+1)^r}\Big\{||\widetilde{T}^{\,(r+1)}||(1-\cos(m+1)x) + ||T^{(r+1)}||\,|\sin(m+1)x|\Big\}.$$

Следствие 14. *Пусть* $n, m, l \in \mathbb{Z}$, $m \geqslant n$, $\frac{r+1}{2} \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$. *Тогда для любого полинома* $T \in H_n$

$$X_{m,l,r}(T,x) \leqslant \frac{Q(r)}{(m+1)(l+1)^r}\Big\{||T^{(r+1)}||(1-\cos(m+1)x) + ||\widetilde{T}^{\,(r+1)}||\,|\sin(m+1)x|\Big\}.$$

Следствие 15. *Пусть $n, m, l \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $\frac{r}{2} \in \mathbb{Z}_+$. Тогда для любого полинома $T \in H_n$*

$$M_{m,l,r}(T) \leqslant \frac{Q(r)}{(m+1)(l+1)^r}\Big\{2||\widetilde{T}^{(r+1)}|| + ||T^{(r+1)}||\Big\}.$$

Следствие 16. *Пусть $n, m, l \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $\frac{r+1}{2} \in \mathbb{N}$. Тогда для любого полинома $T \in H_n$*

$$M_{m,l,r}(T) \leqslant \frac{Q(r)}{(m+1)(l+1)^r}\Big\{2||T^{(r+1)}|| + ||\widetilde{T}^{(r+1)}||\Big\}.$$

Замечание 2. При $l+1 \geqslant n$ в следствиях 13–16 постоянную $Q(r)$ можно заменить на 1.

Доказательство следствий 9–16 получается применением следствий 3–8 и лемм 5 и 6 к оператору $U(f) = Q_{l,r}(f)$. При этом надо принять во внимание, что при $l+1 \geqslant n$ для любого $T \in H_n$ справедливы равенства

$$||Q_{l,r}(T)|| = (l+1)^{-r}||T^{(r)}||,$$

если $\frac{r}{2} \in \mathbb{Z}_+$,

$$||Q_{l,r}(T)|| = (l+1)^{-r}||\widetilde{T}^{(r)}||,$$

если $\frac{r+1}{2} \in \mathbb{N}$, а также соотношение (лемма J): $Q(r) < \infty$ при любом $r \in \mathbb{Z}_+$.

§2. Оценки функционалов

1. Теорема 1. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $\Phi, \Psi \in \Lambda$,*

$$\alpha = \sup_{T \in H_{2n-1}} \Big\{\Phi(T)/||T^{(r+1)}||\Big\} < \infty,$$

для любого $T \in H_n$ справедливо неравенство

$$||\widetilde{T}^{(r)}|| \leqslant \beta\Psi(T),$$

где $\beta \in \mathbb{R}_+$. Тогда для любой $f \in C$

$$\Phi(\widetilde{F}) \leqslant \Big(\frac{||\Phi||\gamma^*\widetilde{K}_1}{n+1} + \alpha(2n-1)^r\gamma + ||\Psi||\alpha\beta\Big)E_n(f) + \alpha\beta\Psi(f).$$

Доказательство. Принимая во внимание леммы B и C, имеем

$$
\begin{aligned}
&\Phi(\widetilde{F}) \leqslant \Phi(\widetilde{F} - \tau_n(\widetilde{F})) + \Phi(\tau_n(\widetilde{F})) \\
&\leqslant ||\Phi||\,||\widetilde{F} - \tau_n(\widetilde{F})|| + \alpha||\tau_n^{(r+1)}(\widetilde{F})|| \\
&\leqslant ||\Phi||\gamma^* E_n(\widetilde{F}) + \alpha||\widetilde{\tau}_n^{(r)}(f)|| \leqslant \frac{||\Phi||\gamma^*\widetilde{K}_1}{n+1} E_n(f) + \alpha||\widetilde{\tau}_n^{(r)}(f)||.
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Отсюда, применяя неравенство (5), находим, что

$$
\Phi(\widetilde{F}) \leqslant \frac{||\Phi||\gamma^*\widetilde{K}_1}{n+1} E_n(f) + \alpha(2n-1)^r \gamma E_n(f) + \alpha||\widetilde{T}_n^{(r)}(f)||.
$$

Далее,

$$
||\widetilde{T}_n^{(r)}(f)|| \leqslant \beta\Psi(T_n(f)) = \beta\{\Psi(T_n(f) - f) + \Psi(f)\}
$$

$$
\leqslant \beta\{||\Psi||\,||T_n(f) - f|| + \Psi(f)\} = \beta||\Psi||E_n(f) + \beta\Psi(f).
$$

Теперь, сопоставляя полученные неравенства, приходим к соотношению

$$
\Phi(\widetilde{F}) \leqslant \Big(\frac{||\Phi||\gamma^*\widetilde{K}_1}{n+1} + \alpha(2n-1)^r\gamma + ||\Psi||\alpha\beta\Big) E_n(f) + \alpha\beta\Psi(f).
$$

Теорема 1′. *Пусть $n, r \in \mathbb{N}$, $\Phi \in \Lambda$,*

$$
\alpha = \sup_{T \in H_{2n-1}} \Big\{\Phi(T)/||T^{(r+1)}||\Big\} < \infty,
$$

U и V – операторы из C в C такие, что для любой $f \in C$ справедливы соотношения: $U(f) \in H_n$, $||U(V(f))|| = ||V(U(f))||$. Тогда, если для любого $T \in H_n$ справедливо неравенство

$$
||\widetilde{T}^{\,(r)}|| \leqslant \beta||V(T)||,
$$

где $\beta \in \mathbb{R}_+$, то для любой $f \in C$

$$
\Phi(\widetilde{F}) \leqslant \Big(\frac{||\Phi||\gamma^*\widetilde{K}_1}{n+1} + \alpha(2n-1)^r\gamma\Big)||f - U(f)|| + \alpha\beta||U||\,||V(f)||.
$$

Доказательство. В силу (19)

$$\Phi(\widetilde{F}) \leqslant \frac{||\Phi||\gamma^* \widetilde{K}_1}{n+1} E_n(f) + \alpha ||\widetilde{\tau}_n^{(r)}(f)||.$$

На основании неравенства (3)

$$||\widetilde{\tau}_n^{(r)}(f)|| \leqslant \gamma(2n-1)^r ||f - U(f)|| + ||\widetilde{U}^{\,(r)}(f)||.$$

Далее,

$$||\widetilde{U}^{\,(r)}(f)|| \leqslant \beta ||V(U(f))|| = \beta ||U(V(f))|| \leqslant \beta ||U||\; ||V(f)||.$$

Сопоставляя приведенные неравенства, находим

$$\Phi(\widetilde{F}) \leqslant \frac{||\Phi||\gamma^* \widetilde{K}_1}{n+1} E_n(f) + \alpha(2n-1)^r \gamma ||f - U(f)|| + \alpha\beta ||U||\; ||V(f)||.$$

Следствие 17. *Если в условиях теоремы* 1

$$\Phi(\cdot) = \omega_{r+1}(\cdot, h),$$

где $h \in \mathbb{R}_+$, *то для любой* $f \in C$

$$\Phi(\widetilde{F}) \leqslant \Big(\frac{2^{r+1}\gamma^* \widetilde{K}_1}{n+1} + h^{r+1}(2n-1)^r\gamma + ||\Psi|| h^{r+1}\beta\Big) E_n(f) + h^{r+1}\beta\Psi(f).$$

Доказательство. Учитывая неравенства

$$\omega_{r+1}(f, h) \leqslant 2^{r+1}||f||,$$

если $f \in C$,

$$\omega_{r+1}(f, h) \leqslant ||f^{(r+1)}|| h^{r+1},$$

если $f \in C^{(r+1)}$ и применяя теорему 1 к функционалу

$$\Phi(\cdot) = \omega_{r+1}(\cdot, h),$$

находим

$$\begin{aligned} &\omega_{r+1}(\widetilde{F}, h) \\ &\qquad \leqslant \Big(\frac{2^{r+1}\gamma^* \widetilde{K}_1}{n+1} + h^{r+1}(2n-1)^r\gamma + ||\Psi|| h^{r+1}\beta\Big) E_n(f) \\ &\qquad\qquad + h^{r+1}\beta\Psi(f). \end{aligned}$$

Следствие 17′. *Если в условиях теоремы* $1'$

$$\Phi(\cdot) = \omega_{r+1}(\cdot, h),$$

где $h \in \mathbb{R}_+$, *то для любой* $f \in C$

$$\Phi(\widetilde{F}) \leqslant \Big(\frac{2^{r+1}\gamma^* \widetilde{K}_1}{n+1} + h^{r+1}(2n-1)^r\gamma\Big)||f - U(f)|| + h^{r+1}\beta||U||\,||V(f)||.$$

Доказательство следствия $17'$ аналогично доказательству следствия 17, но здесь вместо теоремы 1 используется теорема $1'$.

Теорема 2. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $\Phi, \Psi \in \Lambda$,

$$\alpha = \sup_{T \in H_{2n-1}} \Big\{\Phi(T)/||T^{(r)}||\Big\} < \infty,$$

для любого $T \in H_n$ *справедливо неравенство*

$$||T^{(r)}|| \leqslant \beta\Psi(T),$$

где $\beta \in \mathbb{R}_+$. *Тогда для любой* $f \in C$

$$\Phi(f) \leqslant \Big(||\Phi||\gamma^* + \alpha(2n-1)^r\gamma + ||\Psi||\alpha\beta\Big)E_n(f) + \alpha\beta\Psi(f).$$

Доказательство. Принимая во внимание лемму B, имеем

$$\begin{aligned}\Phi(f) &\leqslant \Phi(f - \tau_n(f)) + \Phi(\tau_n(f))\\ &\leqslant ||\Phi||\,||f - \tau_n(f)|| + \alpha||\tau_n^{(r)}(f)||\\ &\leqslant ||\Phi||\gamma^* E_n(f) + \alpha||\tau_n^{(r)}(f)||.\end{aligned} \tag{20}$$

На основании неравенства (6)

$$||\tau_n^{(r)}(f)|| \leqslant \gamma(2n-1)^r E_n(f) + ||T^{(r)}(f)||.$$

Далее,

$$||T^{(r)}(f)|| \leqslant \beta\Psi(T_n(f)) \leqslant \beta\{\Psi(T_n(f) - f) + \Psi(f)\}$$
$$\leqslant \beta||\Psi||\,||T_n(f) - f|| + \beta\Psi(f) = \beta||\Psi||E_n(f) + \beta\Psi(f).$$

Теперь, сопоставляя полученные неравенства, приходим к соотношению

$$\Phi(f) \leqslant \Big(||\Phi||\gamma^* + \alpha(2n-1)^r\gamma + ||\Psi||\alpha\beta\Big)E_n(f) + \alpha\beta\Psi(f).$$

Теорема 2′. *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $\Phi \in \Lambda$,

$$\alpha = \sup_{T \in H_{2n-1}} \left\{ \Phi(T)/||T^{(r)}|| \right\} < \infty,$$

U и V – операторы из C в C такие, что для любой $f \in C$ справедливы соотношения: $U(f) \in H_n$, $||U(V(f))|| = ||V(U(f))||$. Тогда, если для любого $T \in H_n$ справедливо неравенство

$$||T^{(r)}|| \leqslant \beta ||V(T)||,$$

где $\beta \in \mathbb{R}_+$, то для любой $f \in C$

$$\Phi(f) \leqslant \Big(||\Phi||\gamma^* + \alpha(2n-1)^r \gamma \Big) ||f - U(f)|| + \alpha\beta ||U|| \; ||V(f)||.$$

Доказательство. В силу (20)

$$\Phi(f) \leqslant ||\Phi||\gamma^* E_n(f) + \alpha ||\tau_n^{(r)}(f)||.$$

На основании неравенства (4)

$$||\tau_n^{(r)}(f)|| \leqslant \gamma(2n-1)^r ||f - U(f)|| + ||U^{(r)}(f)||.$$

Далее,

$$||U^{(r)}(f)|| \leqslant \beta ||V(U(f))|| = \beta ||U(V(f))|| \leqslant \beta ||U|| \; ||V(f)||.$$

Сопоставляя приведенные соотношения, получаем

$$\begin{aligned} \Phi(f) &\leqslant ||\Phi||\gamma^* E_n(f) + \gamma\alpha(2n-1)^r ||f - U(f)|| + \alpha\beta ||U|| \; ||V(f)|| \\ &\leqslant (||\Phi||\gamma^* + \alpha(2n-1)^r \gamma) ||f - U(f)|| + \alpha\beta ||U|| \; ||V(f)||. \end{aligned}$$

Следствие 18. *Если в условиях теоремы 2*

$$\Phi(\cdot) = \omega_r(\cdot, h),$$

где $h \in \mathbb{R}_+$, то для любой $f \in C$

$$\Phi(f) \leqslant (2^r \gamma^* + h^r (2n-1)^r \gamma + ||\Psi|| h^r \beta) E_n(f) + h^r \beta \Psi(f).$$

Следствие 18$'$. *Если в условиях теоремы* $2'$

$$\Phi(\cdot) = \omega_r(\cdot, h),$$

где $h \in \mathbb{R}_+$, *то для любой* $f \in C$

$$\Phi(f) \leqslant (2^r\gamma^* + h^r(2n-1)^r\gamma)||f - U(f)|| + h^r\beta||U||\, ||V(f)||.$$

Замечание 3. Если в теореме 2 условия $\Phi \in \Lambda$ заменить на условие

$$\Phi(f) = ||f - A(f)||,$$

где оператор $A : C \to C$ удовлетворяет равенству $A(f) = A(\tau_n(f))$ для любой $f \in C$, то для $f \in C$ справедливо неравенство

$$\Phi(f) \leqslant (\gamma^* + \alpha(2n-1)^r\gamma + ||\Psi||\alpha\beta)E_n(f) + \alpha\beta\Psi(f).$$

Доказательство замечания 3 аналогично доказательству теоремы 2, но здесь надо воспользоваться соотношением

$$\Phi(f) = ||f - A(f)|| \leqslant ||f - \tau_n(f)|| + ||\tau_n(f) - A(\tau_n(f))|| \leqslant \gamma^* E_n(f) + \alpha||\tau_n^{(r)}(f)||.$$

Замечание $3'$**.** Если в теореме $2'$ условие $\Phi \in \Lambda$ заменить на условие

$$\Phi(f) = ||f - A(f)||,$$

где оператор $A : C \to C$ удовлетворяет равенству $A(f) = A(\tau_n(f))$ для любой $f \in C$, то для $f \in C$ справедливо неравенство

$$\Phi(f) \leqslant (\gamma^* + \alpha(2n-1)^r\gamma)||f - U(f)|| + \alpha\beta||U||\, ||V(f)||.$$

2. Терема 3. *Пусть* $r, \frac{k}{2} \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, *функционал* $\Phi \in \Lambda$ *удовлетворяет условию*

$$\Phi(T) \leqslant \alpha||T^{(r)}|| + \beta||\widetilde{T}^{\,(r)}||$$

для любого полинома $T \in H_n$. *Тогда для любой* $f \in C$ *справедливо неравенство*

$$\Phi(f) \leqslant B(k)||\Phi||\omega_k\Big(f, \frac{\pi}{n+1}\Big)$$

$$+A(k)\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^r\Big\{\alpha\big\|\Delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\big\|+\beta\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\big\|\Big\}.$$

Доказательство. Легко понять, что

$$\Phi(f)\leqslant\Phi(f-R_{n,k}(f))+\Phi(R_{n,k}(f))$$
$$\leqslant||\Phi||\;||f-R_{n,k}(f)||+\alpha||R^{(r)}_{n,k}(f)||+\beta||\widetilde{R}^{(r)}_{n,k}(f)||.$$

Принимая во внимание леммы E и J, имеем

$$||R^{(r)}_{n,k}(f)||\leqslant\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^r\big\|\Delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(R_{n,k}(f))||=\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^r\big\|R_{n,k}\big(\Delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\big)\big\|$$
$$\leqslant\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^r\big\|R_{n,k}\big\|\;\big\|\Delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\big\|\leqslant A(k)\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^r\big\|\Delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\big\|,$$

$$\big\|\widetilde{R}^{(r)}_{n,k}(f)\big\|=\big\|R^{(r+1)}_{n,k}(\widetilde{F})\big\|\leqslant\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^{r+1}\big\|R_{n,k}\big(\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\big)\big\|$$
$$\leqslant\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^{r+1}\big\|R_{n,k}\big\|\;\big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\big\|\leqslant A(k)\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^{r+1}\big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\big\|,$$
$$\|f-R_{n,k}(f)\leqslant B(k)\omega_k\Big(f,\frac{\pi}{n+1}\Big).$$

Сопоставляя приведенные неравенства, находим, что

$$\Phi(f)\leqslant B(k)||\Phi||\omega_k\Big(f\frac{\pi}{n+1}\Big)$$
$$+\,A(k)\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^r\Big(\alpha\big\|\Delta^r_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\big\|+\beta\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\big\|\Big).$$

Теорема 4. *Пусть $r,n\in\mathbb{N}$, $m=2n-1$, функционал $\Phi\in\Lambda$ удовлетворяет условию*

$$\Phi(T)\leqslant\alpha||T^{(r)}||+\beta||\widetilde{T}^{\,(r)}||$$

для любого $T\in H_m$. Тогда для любой $f\in C$ справедливо неравенство

$$\Phi(f)\leqslant||\Phi||\gamma^*E_n(f)+\gamma n^r\Big(\alpha\big\|\Delta^r_{\frac{\pi}{2n}}(f)\big\|+\beta n\big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{2n}}(\widetilde{F})\big\|\Big).$$

Доказательство. Легко понять, что

$$\Phi(f)\leqslant\Phi(f-\tau_n(f))+\Phi(\tau_n(f))$$
$$\leqslant||\Phi||\;||f-\tau_n(f)||+\alpha||\tau^{(r)}_n(f)||+\beta||\widetilde{\tau}^{(r)}_n(f)||.$$

Принимая во внимание леммы Е и А, имеем

$$\|\tau_n^{(r)}(f)\| \leqslant \Big(\frac{m+1}{2}\Big)^r \big\|\Delta^r_{\frac{\pi}{m+1}}(\tau_n(f))\| = \Big(\frac{m+1}{2}\Big)^r \big\|\tau_n\big(\Delta^r_{\frac{\pi}{m+1}}(f)\big)\big\|$$

$$\leqslant \Big(\frac{m+1}{2}\Big)^r \|\tau_n\|\, \big\|\Delta^r_{\frac{\pi}{m+1}}(f)\big\| = n^r\gamma\big\|\Delta^r_{\frac{\pi}{2n}}(f)\big\|,$$

$$\big\|\widetilde{\tau}_n^{(r)}(f)\big\| = \big\|\tau_n^{(r+1)}(\widetilde{F})\big\| \leqslant \Big(\frac{m+1}{2}\Big)^{r+1} \big\|\tau_n\big(\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{m+1}}(\widetilde{F})\big)\big\|$$

$$\leqslant \Big(\frac{m+1}{2}\Big)^{r+1} \|\tau_n\|\, \big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{m+1}}(\widetilde{F})\big\| = n^{r+1}\gamma\big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{2n}}(\widetilde{F})\big\|.$$

Осталось сопоставить приведенные неравенства.

Замечание 4. Пусть в пространстве C введена полунорма p. Будем говорить, что p принадлежит классу A, если выполнены условия: 1) существует такая постоянная M, не зависящая от f, что $p(f) \leqslant M\|f\|$ для любой $f \in C$; 2) полунорма p инвариантна относительно сдвига, т.е. для любой $f \in C$ и любого $h \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $p(f(\cdot + h)) = p(f)$. Линейное множество C, в котором введена полунорма p, принадлежащая классу A, будем называть пространством C_p.

Все результаты этого параграфа (с естественными изменениями) остаются справедливыми для пространств C_p и L_q при $1 \leqslant q < \infty$.

§3. Некоторые приложения теорем §2 к конкретным функционалам

В этом параграфе придерживаемся следующей схемы: сначала формулируем основные теоремы, затем приводим их доказательства и указываем следствия.

1. Теорема 5. *Пусть $n, m, l \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $x \in \mathbb{R}$, функция q определена соотношениями: $q(t) = 2$, если $t \neq \frac{2\pi p}{m+1}$, $q\Big(\frac{2\pi p}{m+1}\Big) = 0$, где $p \in \mathbb{Z}$, $f \in C$. Тогда:*

1) *если $\frac{r}{2} \in \mathbb{Z}_+$, то*

$$X_{m,l,r}(f,x) \leqslant C_1(r)\Big\{q(x)\,\omega_{r+1}\Big(f, \frac{\pi}{n+1}\Big) + \frac{(n+1)^{r+1}}{(m+1)(l+1)^r} \times \Big(\big|\sin(m+1)x\big|\,\Big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\Big\| + (n+1)\big(1-\cos(m+1)x\big)\,\Big\|\Delta^{r+2}_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\Big\|\Big)\Big\}; \qquad (21)$$

2) *если* $\frac{r+1}{2} \in \mathbb{N}$, *то*

$$X_{m,l,r}(f,x) \leqslant C_2(r)\Big\{q(x)\,\omega_{r+1}\Big(f,\frac{\pi}{n+1}\Big) + \frac{(n+1)^{r+1}}{(m+1)(l+1)^r}$$
$$\times\Big(\big(1-\cos(m+1)x\big)\,\Big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\Big\|$$
$$+ (n+1)|\sin(m+1)x|\,\Big\|\Delta^{r+2}_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\Big\|\Big)\Big\}. \tag{22}$$

Теорема 6. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $l, r \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant 4n-1$, $l+1 \geqslant n$, $f \in C$. *Тогда*

$$\Omega_{r+1}\Big(f,\frac{1}{n+1}\Big) \leqslant C_3(r)\frac{(m+1)(l+1)^r}{(n+1)^{r+1}}\{E_n(f)+L_{m,l,r}(f)\}.$$

Теорема 7. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $l, r \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $l+1 \geqslant n$, $f \in C$. *Тогда*

$$\Omega_{r+1}\Big(f,\frac{1}{n+1}\Big) \leqslant C_4(r)\frac{(m+1)(l+1)^r}{(n+1)^{r+1}}\{E_n(f)+M_{m,l,r}(f)\}.$$

2. Доказательство теоремы 5. Установим (21). В силу следствия 13 для любого $T \in H_n$

$$X_{m,l,r}(T,x) \leqslant \frac{Q(r)}{(m+1)(l+1)^r}\Big\{||\widetilde{T}^{(r+1)}||(1-\cos(m+1)x)$$
$$+ ||T^{(r+1)}||\,|\sin(m+1)x|\Big\}. \tag{23}$$

Далее, для любой $f \in C$

$$X_{m,l,r}(f,x) \leqslant q(x)||Q_{l,r}(f)|| \leqslant q(x)(1+A(r))||f||. \tag{24}$$

Применяя теперь теорему 3 (при $k = r+2$) к функционалу $\Phi(f) = X_{m,l,r}(f,x)$ и учитывая неравенства (23) и (24), находим, что

$$X_{m,l,r}(f,x) \leqslant B(r+2)\,q(x)\Big(A(r)+1\Big)\omega_{r+2}\Big(f,\frac{\pi}{n+1}\Big)$$
$$+A(r+2)\Big(\frac{n+1}{2}\Big)^{r+1}\Big\{\frac{Q(r)|\sin(m+1)x|}{(m+1)(l+1)^r}\Big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\Big\|$$

$$+\frac{Q(r)(1-\cos(m+1)x)}{(m+1)(l+1)^r}\Big(\frac{n+1}{2}\Big)\Big\|\Delta^{r+2}_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\Big\|$$

$$\leqslant C_5(r)\,q(x)\,\omega_{r+1}\Big(f,\frac{\pi}{n+1}\Big)+\frac{C_6(r)(n+1)^{r+1}}{(m+1)(l+1)^r}\Big\{|\sin(m+1)x|\Big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\Big\|$$

$$+(n+1)(1-\cos(m+1)x)\Big\|\Delta^{r+2}_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\Big\|\Big\}.$$

Неравенство (22) доказывается аналогично, но здесь вместо следствия 13 используется следствие 14, а теорема 3 применяется при $k = r+1$.

Доказательство теоремы 6. Пусть $\frac{r}{2}\in\mathbb{Z}_+$. В силу (17)

$$||\widetilde{T}^{\,(r+1)}||\leqslant(m+1)(l+1)^r\Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big)L_{m,l,r}(T) \tag{25}$$

для любого $T\in H_n$. Нетрудно видеть, что для любой $f\in C$

$$L_{m,l,r}(f)\leqslant 2(A(r)+1)||f||. \tag{26}$$

Применяя теперь следствие 17 (для $\Phi(\cdot)=\omega_{r+2}\big(\cdot,\frac{1}{n+1}\big)$) к функционалу $\Psi(f)=L_{m,l,r}(f)$ и учитывая неравенства (25) и (26), находим, что

$$(n+1)\,\omega_{r+2}\Big(\widetilde{F},\frac{1}{n+1}\Big)\leqslant\Big(2^{r+2}\gamma^*\widetilde{K}_1+2^{r+1}\gamma+2(A(r)+1)\frac{(m+1)(l+1)^r}{(n+1)^{r+1}}$$

$$\times\Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big)\Big)E_n(f)+\frac{(m+1)(l+1)^r}{(n+1)^{r+1}}\Big(\cos\frac{\pi}{4}\Big)L_{m,l,r}(f)$$

$$\leqslant C_7(r)\frac{(m+1)(l+1)^r}{(n+1)^{r+1}}\{E_n(f)+L_{m,l,r}(f)\}. \tag{27}$$

В силу (18)

$$||T^{(r+1)}||\leqslant 2(m+1)(l+1)^r\Big(\cos\frac{\pi}{8}\Big)L_{m,l,r}(T) \tag{28}$$

для любого $T\in H_n$. Применяя теперь следствие 18 (для $\Phi(\cdot)=\omega_{r+1}\big(\cdot,\frac{1}{n+1}\big)$ к функционалу $\Psi(f)=L_{m,l,r}(f)$ и учитывая неравенства (26) и (28), находим, что

$$\omega_{r+1}\Big(f,\frac{1}{n+1}\Big)\leqslant\Big(2^{r+1}\gamma^*+2^{r+1}\gamma+2(A(r)+1)\frac{2(m+1)(l+1)^r\big(\cos\frac{\pi}{8}\big)}{(n+1)^{r+1}}\Big)$$

$$\times E_n(f) + \frac{2(m+1)(l+1)^r\big(\cos\frac{\pi}{8}\big)}{(n+1)^{r+1}} L_{m,l,r}(f)$$

$$\leqslant C_8(r)\frac{(m+1)(l+1)^r}{(n+1)^{r+1}}\{E_n(f) + L_{m,l,r}(f)\}. \tag{29}$$

Теперь опираясь на неравенства (27) и (29), имеем

$$\Omega_{r+1}\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) = \omega_{r+1}\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) + (n+1)\omega_{r+2}\Big(\widetilde{F}, \frac{1}{n+1}\Big)$$
$$\leqslant C_3(r)\frac{(m+1)(l+1)^r}{(n+1)^{r+1}}\{E_n(f) + L_{m,l,r}(f)\}.$$

Случай, когда $\frac{r+1}{2} \in \mathbb{N}$, рассматривается агналогично, но здесь вместо следствия 9 используется следствие 10.

Доказательство теоремы 7. В силу следствий 11 и 12 при $m \geqslant n$, $l+1 \geqslant n$

$$||\widetilde{T}^{\,(r+1)}|| \leqslant \frac{3}{2}(m+1)(l+1)^r\, M_{m,l,r}(T),$$

$$||T^{(r+1)}|| \leqslant \frac{3}{2}(m+1)(l+1)^r\, M_{m,l,r}(T)$$

для любого $T \in H_n$. Легко видеть, что для любой $f \in C$

$$M_{m,l,r}(f) \leqslant 2(A(r)+1)||f||.$$

Учитывая приведенные неравенства и рассуждая как при доказательстве теоремы 6, приходим к доказательству теоремы 7.

3. Следствие 19. *Пусть $n, m, l, r \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $f \in C$. Тогда*

$$L_{m,l,r}(f) \leqslant M_{m,l,r}(f) \leqslant C_9(r)\Big\{\omega_{r+1}\Big(f, \frac{\pi}{n+1}\Big)$$
$$+ \frac{(n+1)^{r+1}}{(m+1)(l+1)^r}\Big(\Big\|\Delta^{r+1}_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\Big\| + (n+1)\Big\|\Delta^{r+2}_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\Big\|\Big)\Big\}.$$

Следствие 20. *Пусть $n, m, l, r \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $l \geqslant n$, $f \in C$. Тогда*

$$L_{m,l,r}(f) \leqslant M_{m,l,r}(f)$$
$$\leqslant C_{10}(r)\Big\{\omega_{r+1}\Big(f, \frac{\pi}{n+1}\Big) + (n+1)\Big\|\Delta^{r+2}_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\Big\|\Big\}.$$

Следствие 21. *Пусть* $n, m, l, r \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $l \geqslant n$, $f \in C$. *Тогда*

$$L_{m,l,r}(f) \leqslant M_{m,l,r}(f) \leqslant C_{11}(r)\Big\{\omega_{r+1}\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) + (n+1)\omega_{r+2}\Big(\widetilde{F}, \frac{1}{n+1}\Big)\Big\} = C_{11}(r)\Omega_{r+1}\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big).$$

Следствия 19–21 легко выводятся из теоремы 5. При этом используется свойство модуля непрерывности:

$$\omega_q\Big(f, \frac{\lambda}{n+1}\Big) \leqslant (\lambda+1)^q \omega_q\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big)$$

при $q \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}_+$.

Следствие 22. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $l, r \in \mathbb{Z}_+$, $4n-1 \leqslant m \leqslant 8n$, $n \leqslant l \leqslant 8n$, $f \in C$. *Тогда*

$$\Omega_{r+1}\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) \leqslant C_{12}(r)\{E_n(f) + L_{m,l,r}(f)\} \leqslant C_{13}(r)\Omega_{r+1}\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big).$$

Доказательство. Первое неравенство очевидно в силу теоремы 6. Второе получается сопоставлением следствия 21 с неравенством (лемма H)

$$E_n(f) \leqslant D(r+1)\omega_{r+1}\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big).$$

Следствие 23. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C$. *Тогда*

$$\Omega_{r+1}\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) \leqslant C_{14}(r)M_{n,n,r}(f) \leqslant C_{15}(r)\Omega_{r+1}\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big).$$

Доказательство. В силу следствия 21

$$M_{n,n,r}(f) \leqslant C_{11}(r)\Omega_{r+1}\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big).$$

С другой стороны, учитывая теорему 7 и неравенство $E_n(f) \leqslant M_{n,n,r}(f)$, имеем

$$\Omega_{r+1}\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) \leqslant C_4(r)\{E_n(f) + M_{n,n,r}(f)\} \leqslant 2C_4(r)M_{n,n,r}(f).$$

4. Отдельно остановимся на случае приближения функций полиномами Джексона (соответствующие результаты получаются из приведенных выше в этом параграфе при $r = 0$).

Положим при $n \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in \mathbb{R}$

$$J_{n,\alpha}(f,x) = \frac{1}{(n+1)^2} \sum_{k=0}^{n} f(t_k+\alpha)\left(\frac{\sin \frac{(n+1)}{2}(x-t_k)}{\sin \frac{x-tk}{2}}\right)^2,$$

где

$$t_k = \frac{2\pi k}{n+1}.$$

Теорема 5′. *Пусть $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $x \in \mathbb{R}$, функция q определена соотношениями: $q(t) = 2$, если $t \neq \frac{2\pi k}{m+1}$, $q\left(\frac{2\pi k}{m+1}\right) = 0$ при $k \in \mathbb{Z}$, $f \in \mathbb{C}$. Тогда*

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} |f(x+\alpha) - J_{m,\alpha}(f,x)| \leqslant C_{16}\Big\{q(x)\omega_1\Big(f, \frac{\pi}{n+1}\Big) + \frac{n+1}{m+1}\Big\{\big|\sin(m+1)x\big| \,\Big\|\Delta^1_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\Big\| + (n+1)\big(1-\cos(m+1)x\big)\,\Big\|\Delta^2_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\Big\|\Big\}.$$

Теорема 6′. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant 4n-1$, $f \in C$. Тогда*

$$\Omega_1\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) = \omega_1\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) + (n+1)\omega_2\Big(\widetilde{F}, \frac{1}{n+1}\Big) \leqslant C_{17}\frac{m+1}{n+1}\{E_n(f) + ||f - J_m(f)||\}.$$

Теорема 7′. *Пусть $n, m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n$, $f \in C$. Тогда*

$$\Omega_1\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) \leqslant C_{18}\frac{m+1}{n+1}\{E_n(f) + \sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\|f(\cdot+\alpha) - J_{m,\alpha}(f,\cdot)\|\}.$$

Следствие 19′. *Пусть $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $f \in C$. Тогда*

$$\|f - J_m(f)\| \leqslant \sup_{\alpha\in\mathbb{R}}\|f(\cdot+\alpha) - J_{m,\alpha}(f,\cdot)\| \leqslant C_{19}\Big\{\omega_1\Big(f, \frac{\pi}{n+1}\Big) + \frac{n+1}{m+1}\Big(\Big\|\Delta^1_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\Big\| + (n+1)\Big\|\Delta^2_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\Big\|\Big)\Big\}.$$

Следствие 20′. *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $f \in C$. *Тогда*

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \|f(\cdot+\alpha) - J_{m,\alpha}(f,\cdot)\| \leqslant C_{20}\Big\{\omega_1\Big(f, \tfrac{\pi}{n+1}\Big) + (n+1)\Big\|\Delta^2_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\Big\|\Big\}.$$

Следствие 21′. *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $f \in C$. *Тогда*

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \|f(\cdot+\alpha) - J_{m,\alpha}(f,\cdot)\| \leqslant C_{21}\Omega_1\Big(f, \tfrac{1}{n+1}\Big).$$

Следствие 22′. *Пусть* $n, m \in \mathbb{N}$, $4n-1 \leqslant m \leqslant 8n$, $f \in C$. *Тогда*

$$\Omega_1\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) \leqslant C_{22}\{E_n(f) + ||f - J_m(f)||\} \leqslant C_{23}\Omega_1\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big).$$

Следствие 23′. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{C}$. *Тогда*

$$\Omega_1\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) \leqslant C_{24}\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} ||f - J_{n,\alpha}(f)||\} \leqslant C_{25}\Omega_1\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big).$$

Литература

1. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* Т. 2, М., 1965.
2. J. Szabados, *On the convergence and saturation problem of the Jackson polynomials.* — Acta Math. Hungar. **24**, No. 3–4 (1973), 399–406.
3. T. F. Xie, X. L. Zhou, *The Jackson interpolation operator and construction of functions.* — Acta Math. Hungar. **112**, No. 3 (2006), 237–247.
4. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
5. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М., 1977.
6. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного.* М., 1960.
7. Н. К. Бари, *Тригонометрические ряды.* М., 1961.

Zhuk V. V. Approximation of periodic functions in the uniform metric by Jackson type polynomials.

Let C be a space of continuous 2π-periodic functions f with the norm $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$,

$$J_n(f,x) = \frac{1}{(n+1)^2}\sum_{k=0}^{n} f(t_k)\left(\frac{\sin\frac{(n+1)}{2}(x-t_k)}{\sin\frac{(x-t_k)}{2}}\right)^2, \text{ where } t_k = \frac{2\pi k}{n+1},$$

be the Jackson polynomials of a function f. Let $\omega_r(f,h)$ be the rth continuity modulu of f, $E_n(f)$ be the best approximation of f in the space C by trigonometric polynomials of order n, and let $\widetilde{F}$ be the function trigonometrically conjugated with the primitive of f. The paper establishes results of the following types:

$$E_n(f) + \|J_{4n-1}(f) - f\| \asymp \omega_1\Big(f, \frac{1}{n+1}\Big) + (n+1)\omega_2\Big(\widetilde{F}, \frac{1}{n+1}\Big),$$

$$\sup_{\alpha\in\mathbb{R}} \|J_n(f, \cdot+\alpha) - f(\cdot+\alpha)\| \asymp \omega_1\Big(f, \tfrac{1}{n+1}\Big) + (n+1)\omega_2\Big(\widetilde{F}, \tfrac{1}{n+1}\Big).$$

Here, the symbol $\asymp$ does not depend on f and n.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 1 сентября 2008 г.