Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

В. В. Жук

О ПРИБЛИЖЕНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ СУММАМИ ТИПА ДЖЕКСОНА

Пусть
$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}} \right)^2$$
– ядро Фейера, C – пространство непрерывных 2π-периодических функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$; $t_{k,n} = t_k = \frac{2\pi k}{n+1}$,
$$J_n(f,x) = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(t_k)\Phi_n(x-t_k)$$
– полиномы Джексона функции f,
$$\sigma_n(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)\,dt$$
– суммы Фейера функции f.

Полиномы $J_n(f)$ обладают (см. [1, с. 35, 36]) свойствами: $J_n(f)$ – тригонометрический полином порядка не выше n, $J_n(f,t_k) = f(t_k)$, $J_n'(f,t_k) = 0$.

В ряде работ (см., например, [2; 3] и указанную там литературу) изучался вопрос: как связано поведение величины $\|f - J_n(f)\|$ со структурными свойствами функции f. В частности, в [3] показано, что для любой $f \in C$
$$Y_n(f) = \frac{1}{n+1} \max_{0\leqslant k\leqslant n} (k+1)\|J_k(f) - f\| \asymp \alpha(f, \frac{1}{n+1}),$$
где символ “$\asymp$” не зависит от n и f,
$$\alpha(f,\delta) = \delta \left\| \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{f(\cdot+t)+f(\cdot-t)-2f(\cdot)}{t^2}\,dt \right\| + \omega(f,\delta).$$

Здесь $\omega(f,\delta)$ – модуль непрерывности функции f.

Пусть $\widetilde{F}$ – функция тригонометрически сопряженная с первообразной для функции $f-\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f$,

$$\Delta_t^r(f,x)=\sum_{m=0}^{r}(-1)^{r-m}C_r^m f(x+mt)$$

– конечная разность r-го порядка функции f,

$$\omega_r(f,h)=\sup_{|t|\leqslant h}\|\Delta_t^r(f)\|$$

– модуль непрерывности порядка r функции f,

$$U_n(f,x)=f(x)-\sigma_n(f,x).$$

В работе устанавливаются оценки сверху для величин типа

$$|f(x)-J_n(f,x)|,\quad |J_n(f,x)-\sigma_n(f,x)|,\quad |J_n(U_n(f),x)-U_n(f,x)|,$$
$$\|f-J_n(f)\|,\quad \|J_n(f)-\sigma_n(f)\|$$

точные по порядку для каждой функции $f\in C$. При этом серьезное внимание уделяется постоянным, входящим в получаемые неравенства.

Примерами установленных в работе результатов могут служить следующие утверждения.

Пусть $n\in\mathbb{Z}_+$, $x\in\mathbb{R}$, $f\in C$, функция q_n определена соотношениями: $q_n(x)=2$, если $x\neq t_{k,n}$, $q_n(t_{k,n})=0$. Тогда:

$$|f(x)-J_n(f,x)|\leqslant\frac{\pi^2+1}{2}q_n(x)\omega_2\left(f,\frac{1}{n+1}\right)$$
$$+|\sin(n+1)x|\,\|\Delta^1_{\frac{1}{n+1}}(f)\|+(1-\cos(n+1)x)(n+1)\|\Delta^2_{\frac{1}{n+1}}(\widetilde{F})\|;$$

$$\|f-J_n(f)\|\leqslant(2\pi^2+3)\omega_1(f,\frac{1}{n+1})+2(n+1)\omega_2(\widetilde{F},\frac{1}{n+1});$$

$$|J_n(f,x)-\sigma_n(f,x)|\leqslant(\pi^2+1)\omega_2(f,\frac{1}{n+1})$$
$$+|\sin(n+1)x|\,\|\Delta^1_{\frac{1}{n+1}}(f)\|+(1-\cos(n+1)x)(n+1)\|\Delta^2_{\frac{1}{n+1}}(\widetilde{F})\|;$$

$$\|J_n(f)-\sigma_n(f)\| \leqslant (2\pi^2+3)\omega_1(f,\frac{1}{n+1})+2(n+1)\omega_2(\widetilde{F},\frac{1}{n+1});$$

$$|J_n(U_n(f),x)-U_n(f,x)| \leqslant (\pi^2+\frac{13}{12})q_n(x)\omega_2(f,\frac{1}{n+1})$$

$$+(1-\cos(n+1)x)\|\Delta^2_{\frac{1}{n+1}}(f)\|+|\sin(n+1)x|(n+1)\|\Delta^3_{\frac{1}{n+1}}(\widetilde{F})\|;$$

$$\|J_n(U_n(f))-U_n(f)\| \leqslant (2\pi^2+\frac{25}{6})\omega_2(f,\frac{1}{n+1})+(n+1)\omega_3(\widetilde{F},\frac{1}{n+1});$$

$$Y_n(f) \leqslant (3+\frac{A(1)}{\pi})\omega_1(f,\frac{\pi}{n+1})+\frac{A(1)}{\pi}(n+1)\|\Delta^2_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\|,$$

где постоянная $A(1)$ определена формулой (1).

Отметим, что все конкретные результаты получены на основе теорем общего характера (см. §2), которые применимы и в других ситуациях.

§1. Обозначения. Вспомогательные предложения

1. В дальнейшем $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ суть соответственно множества вещественных, неотрицательных вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел.

Функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются в этой точке по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0.

При $1 \leqslant p < \infty$ через L_p обозначаем множество измеримых 2π-периодических функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, у которых

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\pi}^{\pi}|f|^p\right)^{1/p} < \infty;$$

C – пространство непрерывных 2π-периодических функций $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ с нормой

$$\|f\| = \max_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|;$$

H_n – множество вещественных тригонометрических полиномов порядка не выше n. В дальнейшем вместо “тригонометрический полином” говорим просто полином.

Пусть $f \in L_1$. Тогда

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\, kt\,dt \quad b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin\, kt\,dt$$

– коэффициенты Фурье функции f; при $k \in \mathbb{N}$

$$A_k(f,x) = a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx, \quad A_0(f,x) = \frac{a_0(f)}{2}.$$

Пусть $f \in C$, $r \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\Delta_t^r(f,x) = \sum_{m=0}^{r}(-1)^{r-m}C_r^m f(x+mt)$$

– конечная разность r-го порядка функции f в точке x с шагом t;

$$\omega_r(f,h) = \sup_{|t|\leqslant h}\|\Delta_t^r(f)\|$$

– модуль непрерывности порядка r функции f в пространстве C.

Через $\tilde{f}$ обозначаем функцию тригонометрически сопряженную с f:

$$\tilde{f}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}(-b_k(f)\cos kx + a_k(f)\sin kx);$$

F – первообразная для функции $f - \frac{a_0(f)}{2}$, $\widetilde{F}$ – функция тригонометрически сопряженная с F, т.е.

$$\widetilde{F}(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{b_k(f)}{k}\sin kx - \frac{a_k(f)}{k}\right)\cos kx = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A_k(f,x)}{k};$$

$$C^{(r)} = \{f \in C : \exists f^{(r)} \in C\}, \quad C_+^{(r)} = \{f \in C : \exists f^{(r)}, \tilde{f}^{(r)} \in C\}.$$

Для оператора $U : C \to C$ полагаем

$$\|U\| = \sup_{f\in C}\{\|U(f)\|/\|f\|\}.$$

Через Λ обозначаем множество функционалов $\Phi : C \to \mathbb{R}_+$ таких, что $\Phi(f+g) \leqslant \Phi(f) + \Phi(g)$ для любых $f, g \in C$. Для $\Phi \in \Lambda$ полагаем

$$\|\Phi\| = \sup_{f\in C}\{\Phi(f)/\|f\|\}.$$

Через $S_{h,r}(f)$ обозначаем функции Стеклова порядка r функции f:

$$S_{h,1}(f,x) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\,dt, \quad S_{h,r}(f) = S_{h,1}(S_{h,r-1}(f)).$$

Для любой $f \in L_1$ справедливо равенство

$$S_{h,r}(f,x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f,x)\alpha_r\left(\frac{kh}{2}\right),$$

где $\alpha_r(t) = \left(\frac{\sin t}{t}\right)^r$. Полагаем

$$\lambda_r(t) = \begin{cases} \frac{-\pi t^r}{(r-1)!2}\left(\frac{1}{\sin(\pi t/2)}\right)^{(r-1)}, & \text{если } \ \frac{r}{2} \in \mathbb{N}, \\ \frac{\pi t^r}{(r-1)!2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi t}{2}\right)^{(r-1)}, & \text{если } \ \frac{r+1}{2} \in \mathbb{N}; \end{cases}$$

$$\gamma_r(t) = \left(\frac{t}{2\sin(t/2)}\right)^r \cos\frac{t}{2}, \quad \lambda(t) = \left(1 - \frac{|t|}{\pi}\right)\cos t + \frac{1}{\pi}\sin t.$$

Через $R_n(f)$, $\sigma_n(f)$, $X_{n,r}(f)$, $K_n(f)$, $J_n(f)$ обозначаем соответственно суммы Рогозинского, Фейера, Ахиезера–Крейна–Фавара, Бомана–Коровкина, Джексона:

$$R_n(f) = \sum_{k=0}^{n} \cos\frac{\pi k}{2(n+1)} A_k(f), \quad \sigma_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)A_k(f),$$

$$X_{n,r}(f) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_r\left(\frac{k}{n+1}\right)A_k(f), \quad K_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\lambda\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)A_k(f),$$

$$J_n(f,x) = \frac{2\pi}{n+1}\sum_{k=0}^{n} f(t_k)\Phi_n(x - t_k),$$

где $t_k = t_{k,n} = \frac{2\pi k}{n+1}$, $\Phi_n(t)$ – ядро Фейера:

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{(n+1)t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Полагаем

$$Y_{n,r}(f) = \sum_{k=0}^{n}\gamma_r\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)A_k(f), \quad K_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}},$$

$$B(t) = 4\pi\frac{\cos^2\frac{t}{2}}{(t^2-\pi^2)^2}.$$

Имеют место соотношения: $Y_{n,0}(f) = R_n(f)$, $Y_{n,r}(f) = X_{n,r}(f)$ при $r = 1,2,3$,

$$K_n(f,x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f\left(x+\frac{t}{n+1}\right)B(t)\,dt.$$

Пусть

$$U_n(f) = \sum_{k=0}^{n}\varphi\left(\frac{\pi k}{n+1}\right)A_k(f),$$

где функция φ определена и непрерывна на $[0,\pi]$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(\pi) = 0$. Хорошо известно (см. [4, с. 166–168]), что

$$\sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\|U_n\| \leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\left|\int\limits_0^{\pi}\varphi(u)\cos ut\,du\right|dt.$$

Полагаем

$$A(r) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\|Y_{n,r}\| \leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_{\mathbb{R}_+}\left|\int\limits_0^{\pi}\gamma_r(u)\cos ut\,du\right|dt, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
&A_{n,h}(f) = X_{n,2}(S_{h,2}(f)), \quad B_{n,h}(f) = X_{n,3}(S_{h,3}(f)),\\
&C_{n,h}(f) = K_n(S_{h,2}(f)), \quad D_{n,h}(f) = K_n(S_{h,3}(f)),\\
&F_{n,h}(f) = X_{n,1}(S_{h,1}(f)).
\end{aligned}$$

2. Нам понадобятся следующие известные результаты.

Лемма А (см. [5, с. 134, 138])**.** . *Пусть* $r \in \mathbb{N}$, $h > 0$. *Тогда:*
1) *для любой* $f \in C$

$$S_{h,r}(f) \in C^{(r)}, \quad \|S_{h,r}^{(r)}(f)\| = h^{-r}\|\Delta_h^r(f)\|,$$
$$\|f - S_{n,1}(f)\| \leqslant \omega_1(f, \frac{h}{2}), \quad \|f - S_{h,2}(f)\| \leqslant \frac{1}{2}\omega_2(f,h);$$

2) *для любой* $f \in C^{(2)}$

$$\|f - S_{h,1}(f)\| \leqslant \frac{h^2}{24}\|f^{(2)}\|.$$

Лемма В. *Пусть* $f \in C$, $h > 0$. *Тогда*

$$\|f - S_{h,3}(f)\| \leqslant \frac{13}{24}\omega_2(f,h).$$

Доказательство. Принимая во внимание лемму А, имеем

$$\begin{aligned}
&\|f - S_{h,3}(f)\| \leqslant \|f - S_{h,2}(f)\| + \|S_{h,2}(f) - S_{h,3}(f)\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\omega_2(f,h) + \|S_{h,1}(S_{h,2}(f)) - S_{h,2}(f)\| \\
&\leqslant \frac{1}{2}\omega_2(f,h) + \frac{h^2}{24}\|S''_{h,2}(f)\| = \frac{1}{2}\omega_2(f,h) + \frac{1}{24}\|\Delta_h^2(f)\| \\
&\leqslant \frac{13}{24}\omega_2(f,h).
\end{aligned}$$

Лемма С (см. [6, с. 303; 7])**.** *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $f \in C^{(r)}$. *Тогда*

$$\|f - X_{n,r}(f)\| \leqslant \frac{K_r}{(n+1)^r}\|f^{(r)}\|.$$

Замечание 1. Справедливы равенства

$$K_1 = \frac{\pi}{2}, \quad K_2 = \frac{\pi^2}{8}, \quad K_3 = \frac{\pi^3}{24}.$$

Лемма D (см. [5, с. 328]). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C^{(2)}$. *Тогда*

$$\|f - K_n(f)\| \leqslant \frac{\pi^2}{2(n+1)^2}\|f^{(2)}\|.$$

Лемма E. *Пусть* $n \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C$. *Тогда*

$$\|f - R_n(f)\| \leqslant 0,582 \quad \omega_2(f, \frac{\pi}{n+1}), \tag{2}$$

$$\|f - R_n(f)\| \leqslant \frac{6}{5} \quad \omega_1(f, \frac{\pi}{n+1}), \tag{3}$$

$$\|f - K_n(f)\| \leqslant 1,3424 \quad \omega_1(f, \frac{\pi}{n+1}). \tag{4}$$

В связи с неравенствами (2)–(4) см. соответственно [8; 9, с. 311; 10].

Лемма F (см. [6, с. 228]). *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$\|T^{(r)}\| \leqslant (\frac{n}{2})^r \|\Delta^r_{\frac{\pi}{n}}(f)\|.$$

Лемма G (см. [11, с. 123]). *Справедливы соотношения*

$$A(0) = \sup_{n \in \mathbb{Z}_+} \|R_n\| \leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{2}{\pi} S_i(\pi) < 1,185.$$

Лемма H (см. [12, с. 185]). *Пусть* $n, r \in \mathbb{N}$, $h \in (0, 2\pi/n)$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$\|T\| \leqslant \left(\frac{nh}{2\sin(nh/2)}\right)^r \|S_{h,r}(T)\|.$$

Следствие 1. *Пусть* $r, s \in \mathbb{Z}$, $r < s$. *Тогда*

$$A(s) \leqslant (\frac{\pi}{2})^{s-r} A(r).$$

Доказательство. Пусть $h = \frac{\pi}{n+1}$, $f \in C$. Ясно, что

$$Y_{n,r}(f) = Y_{n,s}(S_{h,s-r}(f)) = S_{h,s-r}(Y_{n,s}(f)). \tag{5}$$

Отсюда, применяя лемму Н, находим, что при любом $n \in \mathbb{Z}_+$

$$\|Y_{n,s}(f)\| \leqslant (\frac{\pi}{2})^{s-r}\|Y_{n,r}(f)\| \leqslant (\frac{\pi}{2})^{s-r}\|Y_{n,r}\|\,\|f\| \leqslant (\frac{\pi}{2})^{s-r}A(r)\|f\|.$$

Следовательно,

$$A(s) = \sup_{n\in\mathbb{Z}_+}\|Y_{n,s}\| \leqslant (\frac{\pi}{2})^{s-r}A(r).$$

Замечание 2. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $r, s \in \mathbb{Z}$, $r \leqslant s$, $f \in C$. Тогда

$$\|Y_{n,r}(f)\| \leqslant \|Y_{n,s}(f)\|. \tag{6}$$

Неравенство (6) сразу следует из соотношения (5), так как $\|S_{h,k}\| = 1$ при любых $h > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма I (см. [2, с. 401; 3, с. 240]). *Пусть $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $x \in \mathbb{R}$, $T \in H_n$. Тогда*

$$J_m(T,x) = T(x) + (\cos(m+1)x - 1)(T(x) - \sigma_m(T,x)) + (\widetilde{T}(x) - \tilde{\sigma}_m(T,x))\sin(m+1)x. \tag{7}$$

Замечание 3. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$. Так как для любого полинома $T \in H_{n+1}$

$$T(x) - \sigma_n(T,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} kA_k(f,x) = \frac{\widetilde{T}'(x)}{n+1}, \tag{8}$$

$$\widetilde{T}(x) - \tilde{\sigma}_n(T,x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1} k(-b_k(f)\cos kx + a_k(f)\sin kx) = -\frac{T'(x)}{n+1}, \tag{9}$$

то равенство (7) можно переписать в виде

$$J_m(T,x) = T(x) + \frac{1}{m+1}\{(\cos(m+1)x - 1)\widetilde{T}'(x) - T'(x)\sin(m+1)x\}. \tag{10}$$

Следствие 2. *Пусть $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $x \in \mathbb{R}$, $T \in H_n$. Тогда*

$$J_m(T,x) = \sigma_m(T,x) + (T(x) - \sigma_m(T,x))\cos(m+1)x + (\widetilde{T}(x) - \tilde{\sigma}_m(T,x))\sin(m+1)x. \tag{11}$$

§2. Оценка функционалов

Результаты этого параграфа аналогичны ряду утверждений, содержащихся в книге [5]. Основу их доказательств составляют рассуждения, уже применявшиеся в [5].

1. Теорема 1. *Пусть* $\Phi \in \Lambda$, $\|\Phi\| < \infty$, $h > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\Phi(T) \leqslant \alpha\|T'\| + \beta\|\widetilde{T}'\|$$

для любого полинома $T \in H_n$. *Тогда для любой функции* $f \in C$

$$\Phi(f) \leqslant \|\Phi\| \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8(n+1)^2 h^2}\right) \omega_2(f,h) + A(2)\{\frac{\alpha}{h}\|\Delta_h^1(f)\| + \frac{\beta}{h^2}\|\Delta_h^2(\widetilde{F})\|\}, \tag{12}$$

$$\Phi(f) \leqslant \|\Phi\| \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{2(n+1)^2 h^2}\right) \omega_2(f,h) + \frac{\alpha}{h}\|\Delta_h^1(f)\| + \frac{\beta}{h^2}\|\Delta_h^2(\widetilde{F})\|, \tag{13}$$

$$\Phi(f) \leqslant \frac{6}{5}\|\Phi\|\omega_1\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right) + \frac{A(1)}{\pi}\alpha(n+1)\|\Delta^1_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\| + \frac{A(2)}{\pi^2}\beta(n+1)^2\|\Delta^2_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\|, \tag{14}$$

$$\Phi(f) \leqslant 0,582\|\Phi\|\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right) + \frac{A(1)}{\pi}\alpha(n+1)\|\Delta^1_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\| + \frac{A(2)}{\pi^2}\beta(n+1)^2\|\Delta^2_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\|, \tag{15}$$

$$\Phi(f) \leqslant 1,35\|\Phi\|\omega_1\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right) + \alpha\frac{(n+1)}{2}\|\Delta^1_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\| + \beta\left(\frac{(n+1)}{2}\right)^2\|\Delta^2_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\|. \tag{16}$$

Доказательство. Докажем (12). Ясно, что

$$\Phi(f) \leqslant \Phi(f - A_{n,h}(f)) + \Phi(A_{n,h}(f)) \leqslant \|\Phi\| \, \|f - A_{n,h}(f)\| + \alpha \|A'_{n,h}(f)\| + \beta \|\widetilde{A}'_{n,h}(f)\|.$$

Принимая во внимание леммы A и C ($r = 2$) и замечание 1, имеем

$$\|f - A_{n,h}(f)\| = \|f - X_{n,2}(S_{h,2}(f))\| \leqslant \|f - S_{h,2}(f)\| + \|S_{h,2}(f) - X_{n,2}(S_{h,2}(f))\| \leqslant \frac{1}{2}\omega_2(f,h) + \frac{K_2}{(n+1)^2}\|S''_{h,2}(f)\| = \frac{1}{2}\omega_2(f,h) + \frac{K_2}{(n+1)^2h^2}\|\Delta_h^2(f)\| \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8(n+1)^2h^2}\right)\omega_2(f,h).$$

Далее,

$$\|A'_{n,h}(f)\| = \|X'_{n,2}(S_{h,2}(f))\| = \|X_{n,2}(S'_{h,2}(f))\| \leqslant \|X_{n,2}\| \, \|S'_{h,2}(f)\| = \|X_{n,2}\| \, \|S_{h,1}(S'_{h,1}(f))\| \leqslant \|X_{n,2}\| \, \|S'_{h,1}(f)\| = \|X_{n,2}\| h^{-1} \|\Delta_h^1(f)\|,$$

$$\|\widetilde{A}'_{n,h}(f)\| = \|\widetilde{A}''_{n,h}(F)\| = \|A''_{n,h}(\widetilde{F})\| = \|X_{n,2}(S''_{h,2}(\widetilde{F}))\| \leqslant \|X_{n,2}\| \, \|S''_{h,2}(\widetilde{F})\| = \|X_{n,2}\| h^{-2} \|\Delta_h^2(\widetilde{F})\|.$$

Сопоставляя установленные неравенства, получаем, что

$$\Phi(f) \leqslant \|\Phi\| \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{8(n+1)^2h^2}\right)\omega_2(f,h) + \|X_{n,2}\|(\alpha h^{-1}\|\Delta_h^1(f)\| + \beta h^{-2}\|\Delta_h^2(\widetilde{F})\|).$$

Осталось заметить, что $\|X_{n,2}\| \leqslant A(2)$.

Теперь докажем (13). Ясно, что

$$\Phi(f) \leqslant \Phi(f - C_{n,h}(f)) + \Phi(C_{n,h}(f)) \leqslant \|\Phi\| \, \|f - C_{n,h}(f)\| + \alpha \|C'_{n,h}(f)\| + \beta \|\widetilde{C}'_{n,h}(f)\|.$$

Принимая во внимание леммы A и D, имеем

$$\|f - C_{n,h}(f)\| = \|f - K_n(S_{h,2}(f))\| \leqslant \|f - S_{h,2}(f)\| + \|S_{h,2}(f) - K_n(S_{h,2}(f))\| \leqslant \frac{1}{2}\omega_2(f,h) + \frac{\pi^2}{2(n+1)^2}\|S''_{h,2}(f)\| = \frac{1}{2}\omega_2(f,h) + \frac{\pi^2}{2(n+1)h^2}\|\Delta_h^2(f)\| \leqslant \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{2(n+1)^2h^2}\right)\omega_2(f,h).$$

Далее,

$$\begin{aligned}&\|C'_{n,h}(f)\| = \|K'_n(S_{h,2}(f))\| = \|K_n(S'_{h,2}(f))\| \leqslant \|S'_{h,2}(f)\|\\&= \|S_{h,1}(S'_{h,1}(f))\| \leqslant \|S'_{h,1}(f)\| = h^{-1}\|\Delta_h^1(f)\|,\\&\|\widetilde{C}'_{n,h}(f)\| = \|\widetilde{C}''_{n,h}(F)\| = \|C''_{n,h}(\widetilde{F})\| = \|K_n(S''_{h,2}(\widetilde{F}))\|\\&\leqslant \|S''_{h,2}(\widetilde{F})\| = h^{-2}\|\Delta_h^2(\widetilde{F})\|.\end{aligned}$$

Сопоставляя установленные неравенства, получаем, что

$$\begin{aligned}\Phi(f) \leqslant &\|\Phi\| \left(\frac{1}{2} + \frac{\pi^2}{2(n+1)^2h^2}\right)\omega_2(f,h) + \alpha h^{-1}\|\Delta_h^1(f)\|\\&+ \beta h^{-2}\|\Delta_h^2(\widetilde{F})\|.\end{aligned}$$

Докажем (14) и (15). Ясно, что

$$\begin{aligned}\Phi(f) \leqslant &\Phi(f - R_n(f)) + \Phi(R_n(f)) \leqslant \|\Phi\|\,\|f - R_n(f)\| + \alpha\|R'_n(f)\|\\&+ \beta\|\widetilde{R}'_n(f)\|.\end{aligned}$$

Полагая $h = \frac{\pi}{n+1}$ и принимая во внимание, что

$$R_n(f) = X_{n,1}(S_{h,1}(f)) = X_{n,2}(S_{h,2}(f)),$$

имеем

$$\begin{aligned}\|R'_n(f)\| &= \|X'_{n,1}(S_{h,1}(f))\| = \|X_{n,1}(S'_{h,1}(f))\| \leqslant \|X_{n,1}\|\,\|S'_{h,1}(f)\|\\&= \|X_{n,1}\|h^{-1}\|\Delta_h^1(f)\|,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{R}'_n(f)\| &= \|\widetilde{X}''_{n,2}(S_{h,2}(F))\| = \|X_{n,2}(S''_{h,2}(\widetilde{F}))\| \leqslant \|X_{n,2}\|\,\|S''_{h,2}(\widetilde{F})\|\\&= \|X_{n,2}\|h^{-2}\|\Delta_h^2(\widetilde{F})\|.\end{aligned}$$

Сопоставляя установленные неравенства, получаем, что

$$\begin{aligned}\Phi(f) \leqslant &\|\Phi\|\,\|f - R_n(f)\| + \alpha\|X_{n,1}\|h^{-1}\|\Delta_h^1(f)\|\\&+ \beta\|X_{n,2}\|h^{-2}\|\Delta_h^2(\widetilde{F})\|.\end{aligned}$$

Осталось воспользоваться неравенствами (3) и (2).

Докажем (16). Имеем

$$\Phi(f) \leqslant \Phi(f - K_n(f) + \Phi(K_n(f)) \leqslant \|\Phi\| \, \|f - K_n(f)\| \\ + \alpha \|K_n'(f)\| + \beta \|\widetilde{K}'(f)\|.$$

Полагая $h = \frac{\pi}{n+1}$ и применяя лемму F, находим, что

$$\|K_n'(f)\| \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right) \|\Delta_h^1(K_n(f))\| = \left(\frac{n+1}{2}\right) \|K_n(\Delta_h^1(f))\| \\ \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right) \|\Delta_h^1(f)\|,$$

$$\|\widetilde{K}_n'(f)\| = \|K''(\widetilde{F})\| \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \|\Delta_h^2(K_n(\widetilde{F}))\| \\ = \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \|K_n(\Delta_h^2(\widetilde{F}))\| \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \|\Delta_h^2(\widetilde{F})\|.$$

Сопоставляя установленные неравенства и учитывая (4), получаем, что

$$\Phi(f) \leqslant 1,35 \|\Phi\| \omega_1\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right) + \alpha \left(\frac{n+1}{2}\right) \|\Delta^1_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\| \\ + \beta \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \|\Delta^2_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\|.$$

Замечание 4. Соотношение (14) следует из (15) применением неравенства $\omega_2(f,h) \leqslant 2\omega_1(f,h)$. В неравенстве (16) постоянная 1,35 может быть уменьшена до 1,313.

В связи с последним утверждением см. [13].

Теорема 2. *Пусть* $\Phi \in \Lambda$, $\|\Phi\| < \infty$, $n \in \mathbb{Z}_+$, $m \in \mathbb{N}$, $m \geqslant n$, $h \in (0, \frac{2\pi}{m})$,

$$\Phi(T) \leqslant \alpha \|T'\| + \beta \|\widetilde{T}'\|$$

для любого полинома $T \in H_n$. *Тогда для любой функции* $f \in C$

$$\Phi(f) \leqslant \|\Phi\| \left(1 + \frac{\pi}{2(n+1)h}\right) \omega_1(f,h) + A(1) \left\{ \frac{\alpha}{h} \|\Delta_h^1(f)\| \\ + \beta \left(\frac{m}{2h \sin(mh/2)}\right) \|\Delta_h^2(\widetilde{F})\| \right\}. \tag{17}$$

Доказательство. Ясно, что

$$\Phi(f) \leqslant \Phi(f - F_{n,h}(f)) + \Phi(F_{n,h}(f)) \leqslant \|\Phi\| \, \|f - F_{n,h}(f)\| \\ + \alpha \|F'_{n,h}(f)\| + \beta \|\widetilde{F}'_{n,h}(f)\|.$$

Принимая во внимание леммы A и C ($r = 1$) и замечание 1, имеем

$$\|f - F_{n,h}(f)\| = \|f - X_{n,1}(S_{h,1}(f))\| \leqslant \|f - S_{h,1}(f)\| + \|S_{h,1}(f) \\ - X_{n,1}(S_{h,1}(f))\| \leqslant \omega_1(f, \frac{h}{2}) + \frac{K_1}{n+1}\|S'_{h,1}(f)\| \\ \leqslant \omega_1(f,h) + \frac{K_1}{(n+1)h}\|\Delta_h^1(f)\| \leqslant \left(1 + \frac{\pi}{2(n+1)h}\right)\omega_1(f,h).$$

Далее,

$$\|F'_{n,h}(f)\| = \|X'_{n,h}(S_{h,1}(f))\| = \|X_{n,1}(S'_{h,1}(f))\| \\ \leqslant \|X_{n,1}\| \, \|S'_{h,1}(f)\| = \|X_{n,1}\| h^{-1} \|\Delta_h^1(f)\|.$$

Опираясь на лемму H, находим, что

$$\|\widetilde{F}'_{n,h}(f)\| = \|\widetilde{X}'_{n,1}(S_{h,1}(f))\| \leqslant \left(\frac{mh}{2\sin(mh/2)}\right)\|S_{h,1}(\widetilde{X}'_{n,1}(S_{h,1}(f)))\| \\ = \left(\frac{mh}{2\sin(mh/2)}\right)\|X_{n,1}(S''_{h,2}(\widetilde{F}))\| \leqslant \left(\frac{mh}{2\sin(mh/2)}\right)\|X_{n,1}\| \, \|S''_{h,2}(\widetilde{F})\| \\ = \frac{m\|X_{n,1}\|}{2h\sin(mh/2)}\|\Delta_h^2(\widetilde{F})\|.$$

Сопоставляя установленные неравенства, получаем, что

$$\Phi(f) \leqslant \|\Phi\| \left(1 + \frac{\pi}{2(n+1)h}\right)\omega_1(f,h) + \|X_{n,1}\|\{\alpha h^{-1}\|\Delta_h^1(f)\| \\ + \beta\left(\frac{m}{2h\sin(mh/2)}\right)\|\Delta_h^2(\widetilde{F})\|\}.$$

2. Теорема 3. *Пусть* $\Phi \in \Lambda$, $\|\Phi\| < \infty$, $h > 0$, $n \in \mathbb{Z}_+$,

$$\Phi(T) \leqslant \alpha\|T''\| + \beta\|\widetilde{T}''\|$$

для любого полинома $T \in H_n$. *Тогда для любой* $f \in C$

$$\Phi(f) \leqslant \|\Phi\| \left(\frac{13}{24} + \frac{\pi^3}{12(n+1)^3h^3}\right)\omega_2(f,h) + A(3)\left\{\frac{\alpha}{h^2}\|\Delta_h^2(f)\| + \frac{\beta}{h^3}\|\Delta_h^3(\widetilde{F})\|\right\}, \tag{18}$$

$$\Phi(f) \leqslant \|\Phi\| \left(\frac{13}{24} + \frac{\pi^2}{2(n+1)^2h^2}\right)\omega_2(f,h) + \frac{\alpha}{h^2}\|\Delta_h^2(f)\| + \frac{\beta}{h^3}\|\Delta_h^3(\widetilde{F})\|, \tag{19}$$

$$\Phi(f) \leqslant 0,582\|\Phi\|\omega_2\left(f, \frac{\pi}{n+1}\right) + \frac{A(2)}{\pi^2}\alpha(n+1)^2\|\Delta^2_{\frac{\pi}{n+1}}(f)\| + \frac{A(3)}{\pi^3}\beta(n+1)^3\|\Delta^3_{\frac{\pi}{n+1}}(\widetilde{F})\|. \tag{20}$$

Доказательство. Докажем (18). Ясно, что

$$\Phi(f) \leqslant \Phi(f - B_{n,h}(f)) + \Phi(B_{n,h}(f)) \leqslant \|\Phi\|\,\|f - B_{n,h}(f)\| + \alpha\|B''_{n,h}(f)\| + \beta\|\widetilde{B}''_{n,h}(f)\|.$$

Принимая во внимание леммы A, B и C ($r = 3$) и замечание 1, имеем

$$\|f - B_{n,h}(f)\| = \|f - X_{n,3}(S_{h,3}(f))\| \leqslant \|f - S_{h,3}(f)\| + \|S_{h,3}(f) - X_{n,3}(S_{h,3}(f))\| \leqslant \frac{13}{24}\omega_2(f,h) + \frac{K_3}{(n+1)^3}\|S^{(3)}_{h,3}(f)\|$$
$$= \frac{13}{24}\omega_2(f,h) + \frac{K_3}{(n+1)^3h^3}\|\Delta_h^3(f)\| \leqslant \left(\frac{13}{24} + \frac{\pi^3}{12(n+1)^3h^3}\right)\omega_2(f,h).$$

Далее,

$$\|B''_{n,h}(f)\| = \|X''_{n,3}(S_{h,3}(f))\| = \|X_{n,3}(S''_{h,3}(f))\| \leqslant \|X_{n,3}\| \times \|S''_{h,3}(f)\| = \|X_{n,3}\|\,\|S_{h,1}(S''_{h,2}(f))\| \leqslant \|X_{n,3}\|\,\|S''_{h,2}(f)\|$$
$$= \|X_{n,3}\|h^{-2}\|\Delta_h^2(f)\|,$$

$$\|\widetilde{B}''_{n,h}(f)\| = \|\widetilde{X}''_{n,3}(S_{h,3}(f))\| = \|\widetilde{X}^{(3)}_{n,3}(S_{h,3}(F))\|$$
$$= \|X_{n,3}(S^{(3)}_{h,3}(\widetilde{F}))\| \leqslant \|X_{n,3}\| \, \|S^{(3)}_{h,3}(\widetilde{F})\| = \|X_{n,3}\| h^{-3} \|\Delta^3_h(\widetilde{F})\|.$$

Сопоставляя установленные неравенства, получаем, что

$$\Phi(f) \leqslant \|\Phi\| \left(\frac{13}{24} + \frac{\pi^3}{12(n+1)^3h^3}\right)\omega_2(f,h) + \|X_{n,3}\|(\alpha h^{-2}\|\Delta^2_h(f)\|$$
$$+ \beta h^{-3}\|\Delta^3_h(\widetilde{F})\|).$$

Осталось заметить, что $\|X_{n,3}\| \leqslant A(3)$.

Теперь докажем (19). Ясно, что

$$\Phi(f) \leqslant \Phi(f - D_{n,h}(f)) + \Phi(D_{n,h}(f)) \leqslant \|\Phi\| \, \|f - D_{n,h}(f)\|$$
$$+ \alpha\|D''_{n,h}(f)\| + \beta\|\widetilde{D}''_{n,h}(f)\|.$$

Принимая во внимание леммы A, B и D, имеем

$$\|f - D_{n,h}(f)\| = \|f - K_n(S_{h,3}(f))\| \leqslant \|f - S_{h,3}(f)\|$$
$$+ \|S_{h,3}(f) - K_n(S_{h,3}(f))\| \leqslant \frac{13}{24}\omega_2(f,h) + \frac{\pi^2}{2(n+1)^2}\|S''_{h,3}(f)\|$$
$$= \frac{13}{24}\omega_2(f,h) + \frac{\pi^2}{2(n+1)^2}\|S_{h,1}(S''_{h,2}(f))\|$$
$$\leqslant \frac{13}{24}\omega_2(f,h) + \frac{\pi^2}{2(n+1)^2}\|S''_{h,2}(f)\| \leqslant \left(\frac{13}{24} + \frac{\pi^2}{2(n+1)^2h^2}\right)\omega_2(f,h).$$

Далее,

$$\|D''_{n,h}(f)\| = \|K''_n(S_{h,3}(f))\| = \|K_n(S''_{h,3}(f))\| \leqslant \|S''_{h,3}(f)\|$$
$$= \|S_{h,1}(S''_{h,2}(f))\| \leqslant \|S''_{h,2}(f)\| = h^{-2}\|\Delta^2_h(f)\|,$$
$$\|\widetilde{D}''_{n,h}(f)\| = \|\widetilde{K}''_n(S_{h,3}(f))\| = \|K_n(S^{(3)}_{h,3}(\widetilde{F}))\| \leqslant \|S'''_{h,3}(\widetilde{F})\|$$
$$= h^{-3}\|\Delta^3_h(\widetilde{F})\|.$$

Сопоставляя установленные неравенства, получаем, что

$$\Phi(f) \leqslant \|\Phi\| \left(\frac{13}{24} + \frac{\pi^2}{2(n+1)^2h^2}\right)\omega_2(f,h) + \frac{\alpha}{h^2}\|\Delta^2_h(f)\| + \frac{\beta}{h^3}\|\Delta^3_h(\widetilde{F})\|.$$

Докажем (20). Принимая во внимание (2), имеем

$$\Phi(f) \leqslant \Phi(f-R_n(f)) + \Phi(R_n(f)) \leqslant \|\Phi\|\,\|f-R_n(f)\|$$
$$+\alpha\|R_n''(f)\| + \beta\|\widetilde{R}_n''(f)\| \leqslant 0,582\|\Phi\|\omega_2(f,\frac{\pi}{n+1})$$
$$+\alpha\|R_n''(f)\| + \beta\|\widetilde{R}_n''(f)\|.$$

Пусть $h = \frac{\pi}{n+1}$. Тогда

$$\|R_n''(f)\| = \|X_{n,2}''(S_{h,2}(f))\| = \|X_{n,2}(S_{h,2}''(f))\|$$
$$\leqslant \|X_{n,2}\|\,\|S_{h,2}''(f)\| = \|X_{n,2}\|h^{-2}\|\Delta_h^2(f)\|,$$
$$\|\widetilde{R}_n''(f)\| = \|\widetilde{X}_{n,3}''(S_{h,3}(f))\| = \|X_{n,3}(S_{h,3}^{(3)}(\widetilde{F}))\|$$
$$\leqslant \|X_{n,3}\|\,\|S_{h,3}^{(3)}(\widetilde{F})\| = \|X_{n,3}\|h^{-3}\|\Delta_h^3(\widetilde{F})\|.$$

Сопоставляя установленные неравенства, получаем, что

$$\Phi(f) \leqslant 0,582\|\Phi\|\omega_2(f,\frac{\pi}{n+1}) + \frac{\|X_{n,2}\|}{\pi^2}\alpha(n+1)^2\|\Delta_h^2(f)\|$$
$$+\frac{\|X_{n,3}\|}{\pi^3}\beta(n+1)^3\|\Delta_h^3(\widetilde{F})\|.$$

3. Замечание 5. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $\Phi \in \Lambda$, $\|\Phi\| < \infty$,

$$\Phi(T) \leqslant \alpha\|T^{(r)}\| + \beta\|\widetilde{T}^{(r)}\|$$

для любого полинома $T \in H_n$. Тогда для любой $f \in C_+^{(r)}$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\frac{K_r\|\Phi\|}{(n+1)^r} + \alpha\|X_{n,r}\|\right)\|f^{(r)}\| + \beta\|X_{n,r}\|\,\|\tilde{f}^{(r)}\|.$$

Доказательство. Принимая во внимание лемму C, имеем

$$\Phi(f) \leqslant \Phi(f-X_{n,r}(f)) + \Phi(X_{n,r}(f)) \leqslant \|\Phi\|\,\|f-X_{n,r}(f)\|$$
$$+\alpha\|X_{n,r}^{(r)}(f)\| + \beta\|\widetilde{X}_{n,r}^{(r)}(f)\| = \|\Phi\|\,\|f-X_{n,r}(f)\|$$
$$+\alpha\|X_{n,r}(f^{(r)})\| + \beta\|X_{n,r}(\tilde{f}^{(r)})\| \leqslant \frac{K_r\|\Phi\|}{(n+1)^r}\|f^{(r)}\|$$
$$+\alpha\|X_{n,r}\|\,\|f^{(r)}\| + \beta\|X_{n,r}\|\,\|\tilde{f}^{(r)}\|.$$

Замечание 6. Пусть $n \in \mathbb{Z}_+$, $r \in \mathbb{N}$, $\Phi \in \Lambda$, $\|\Phi\| < \infty$,

$$\Phi(T) \leqslant \alpha\|T^{(r)}\|$$

для любого полинома $T \in H_n$. Тогда для любой $f \in C^{(r)}$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\frac{K_r\|\Phi\|}{(n+1)^r} + \alpha\|X_{n,r}\|\right)\|f^{(r)}\|.$$

Доказательство замечания 6 аналогично доказательству замечания 5.

Замечание 7. Оценки величины $A(r)$ при $r \in \mathbb{N}$, получающиеся из сопоставления следствия 1 с леммой G, являются грубыми. Нахождение численных значений $A(r)$ связано с вычислением интегралов, стоящих в правой части соотношения (1). Заметим, что вопрос о нормах сумм Ахиезера–Крейна–Фавара рассматривался в [14].

Замечание 8. Пусть в пространстве C введена полунорма p. Будем говорить, что p принадлежит классу A, если выполнены условия: 1) существует такая постоянная M, не зависящая от f, что $p(f) \leqslant M\|f\|$ для любой $f \in C$; 2) полунорма p инвариантна относительно сдвига, т.е. для любой $f \in C$ и любого $h \in \mathbb{R}$ справедливо равенство $p(f(\cdot + h)) = p(f)$. Линейное множество C, в котором введена полунорма p, принадлежащая классу A, будем называть пространством C_p.

Все результаты этого параграфа с естественными изменениями остаются справедливыми для пространств C_p и L_q при $1 \leqslant q < \infty$.

§3. Некоторые приложения теорем §2 к конкретным функционалам

1. В этом параграфе полагаем:

$$q_m(x) = 2, \quad \text{если} \quad x \neq \frac{2\pi p}{m+1}, \; q\left(\frac{2\pi p}{m+1}\right) = 0, \quad \text{где} \quad p \in \mathbb{Z},$$

$$U_l(f,x) = f(x) - \sigma_l(f,x), \alpha_m(f,x) = |f(x) - J_m(f,x)|,$$
$$\beta_m(f,x) = |J_m(f,x) - \sigma_m(f,x)|,$$
$$\gamma_m(f,x) = |J_m(f,x) - f(x) + (f(x) - \sigma_m(f,x)(1 - \cos(m+1)x)|.$$

Лемма 1. *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $x \in \mathbb{R}$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$\alpha_m(T,x) \leqslant \frac{1}{m+1}\{(1-\cos(m+1)x)\|\widetilde{T}'\| + |\sin(m+1)x|\|T'\|\}, \tag{21}$$

$$\beta_m(T,x) \leqslant \frac{1}{m+1}\{|\cos(m+1)x|\,\|\widetilde{T}'\| + |\sin(m+1)x|\|T'\|\}, \tag{22}$$

$$\gamma_m(T,x) \leqslant \frac{\|T'\|}{m+1}|\sin(m+1)x|. \tag{23}$$

Лемма 1 легко следует из соотношений (7), (10), (11).

Следствие 3. *Пусть* $n, m, l \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $l+1 \geqslant n$, $T \in H_n$. *Тогда*

$$\alpha_m(U_l(T),x) \leqslant \frac{1}{(m+1)(l+1)}\{(1-\cos(m+1)x)\|T''\| + |\sin(m+1)x|\|\widetilde{T}''\|\}, \tag{24}$$

$$\beta_m(U_l(T),x) \leqslant \frac{1}{(m+1)(l+1)}\{|\cos(m+1)x|\|T''\| + |\sin(m+1)x|\|\widetilde{T}''\|\}, \tag{25}$$

$$\gamma_m(U_l(T),x) \leqslant \frac{\|\widetilde{T}''\|}{(m+1)(l+1)}|\sin(m+1)x|. \tag{26}$$

Соотношения (24)–(26) *следуют из сопоставления неравенств* (21)–(23) *с равенствами* (8), (9).

Замечание 9. Пусть $m \in \mathbb{Z}_+$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in C$. Тогда

$$\alpha_m(f,x) \leqslant q_m(x)\|f\|, \tag{27}$$

$$\beta_m(f,x) \leqslant 2\|f\|, \tag{28}$$

$$\gamma_m(f,x) \leqslant \{q_m(x) + 2(1-\cos(m+1)x)\}\|f\|, \tag{29}$$

$$\alpha_m(U_l(f),x) \leqslant 2q_m(x)\|f\|, \tag{30}$$

$$\beta_m(U_l(f),x) \leqslant 4\|f\|, \tag{31}$$

$$\gamma_m(U_l(f),x) \leqslant \{2q_m(x) + 4(1-\cos(m+1)x)\}\|f\|. \tag{32}$$

2. Мы не будем рассматривать в полном объеме приложения теорем 1 и 2 к функционалам $\alpha_m(f,x)$, $\beta_m(f,x)$, $\gamma_m(f,x)$ и теоремы 3 к функционалам $\alpha_m(U_l(f),x)$, $\beta_m(U_l(f),x)$, $\gamma_m(U_l(f),x)$ (а ограничимся лишь примерами таких приложений), так как они получаются простым сопоставлением соответствующих неравенств, написанных на основе теорем 1 и 2 (теоремы 3) с соотношениями (21)–(23), (27)–(29) ((24)–(26), (30)–(32)).

Теорема 4. *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in C$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\alpha_m(f,x) &\leqslant q_m(x)\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2(m+1)^2}{8(n+1)^2}\right)\omega_2\left(f,\frac{1}{m+1}\right)\\&+A(2)\{|\sin(m+1)x|\,\|\Delta^1_{\frac{1}{m+1}}(f)\|\\&+(1-\cos(m+1)x)(m+1)\|\Delta^2_{\frac{1}{m+1}}(\widetilde{F})\|\},\end{aligned}\tag{33}$$

$$\begin{aligned}\|\alpha_m(f)\| &\leqslant \left(2+A(2)+\frac{\pi^2(m+1)^2}{2(n+1)^2}\right)\omega_1\left(f,\frac{1}{m+1}\right)\\&+2A(2)(m+1)\omega_2\left(\widetilde{F},\frac{1}{m+1}\right),\end{aligned}\tag{34}$$

$$\begin{aligned}\alpha_n(f,x) &\leqslant q_n(x)\left(\frac{\pi^2+1}{2}\right)\omega_2\left(f,\frac{1}{n+1}\right)+|\sin(n+1)x|\,\|\Delta^1_{\frac{1}{n+1}}(f)\|\\&+(1-\cos(n+1)x)(n+1)\|\Delta^2_{\frac{1}{n+1}}(\widetilde{F})\|,\end{aligned}$$

$$\|\alpha_n(f)\| \leqslant (2\pi^2+3)\omega_1\left(f,\frac{1}{n+1}\right)+2(n+1)\omega_2\left(\widetilde{F},\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\begin{aligned}\beta_m(f,x) &\leqslant \left(1+\frac{\pi^2(m+1)^2}{4(n+1)^2}\right)\omega_2\left(f,\frac{1}{m+1}\right)\\&+A(2)\{|\sin(m+1)x|\,\|\Delta^1_{\frac{1}{m+1}}(f)\|\\&+|\cos(m+1)x|(m+1)\|\Delta^2_{\frac{1}{m+1}}(\widetilde{F})\|\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|\beta_m(f)\| &\leqslant \left(2+A(2)+\frac{\pi^2(m+1)^2}{2(n+1)^2}\right)\omega_1\left(f,\frac{1}{m+1}\right)\\&+A(2)(m+1)\omega_2\left(\widetilde{F},\frac{1}{m+1}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\beta_n(f,x) &\leqslant (\pi^2+1)\omega_2\left(f,\frac{1}{n+1}\right)+|\sin(n+1)x|\,\|\Delta^1_{\frac{1}{n+1}}(f)\|\\&+(1-\cos(n+1)x)(n+1)\|\Delta^2_{\frac{1}{n+1}}(\widetilde{F})\|,\end{aligned}$$

$$\|\beta_n(f)\| \leqslant (2\pi^2+3)\omega_1\left(f, \frac{1}{n+1}\right) + 2(n+1)\omega_2\left(\widetilde{F}, \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\gamma_m(f,x)$$
$$\leqslant \{q_m(x)+2(1-\cos(m+1)x)\}\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2(m+1)^2}{8(n+1)^2}\right)\omega_2\left(f, \frac{1}{m+1}\right)$$
$$+ A(2)|\sin(m+1)x|\,\|\Delta^1_{\frac{1}{m+1}}(f)\|,$$

$$\|\gamma_m(f)\| \leqslant \left(6 + A(2) + \frac{3\pi^2(m+1)^2}{2(n+1)^2}\right)\omega_1\left(f, \frac{1}{m+1}\right).$$

Доказательство. Ограничимся доказательством неравенств (33) и (34). Остальные утверждения теоремы устанавливаются близким образом. Полагая в неравенстве (12)

$$\Phi(f) = \alpha_m(f,x), \quad h = \frac{1}{m+1},$$

находим, что

$$\Phi(f) \leqslant \|\Phi\|\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2(m+1)^2}{8(n+1)^2}\right)\omega_2\left(f, \frac{1}{m+1}\right)$$
$$+ A(2)\{\alpha(m+1)\|\Delta^1_{\frac{1}{m+1}}(f)\| + \beta(m+1)^2\|\Delta^2_{\frac{1}{m+1}}(\widetilde{F})\|\}.$$

В силу (27) и (21) имеем

$$\|\Phi\| \leqslant q_m(x), \quad \alpha \leqslant \frac{|\sin(m+1)x|}{m+1}, \quad \beta \leqslant \frac{1-\cos(m+1)x}{m+1}.$$

Сопоставляя приведенные неравенства, получаем, что

$$\alpha_m(f,x) \leqslant q_m(x)\left(\frac{1}{2}+\frac{\pi^2(m+1)^2}{8(n+1)^2}\right)\omega_2\left(f, \frac{1}{m+1}\right) + A(2)\{|\sin(m+1)x|$$
$$\times \|\Delta^1_{\frac{1}{m+1}}(f)\| + (1-\cos(m+1)x)(m+1)\|\Delta^2_{\frac{1}{m+1}}(\widetilde{F})\|\}.$$

Тем самым соотношение (33) доказано. Для доказательства (34) достаточно воспользоваться (33) и принять во внимание, что

$$q_m(x) \leqslant 2, \quad \omega_2\left(f, \frac{1}{m+1}\right) \leqslant 2\omega_1\left(f, \frac{1}{m+1}\right),$$
$$|\sin(m+1)x| \leqslant 1, \; 1-\cos(m+1)x \leqslant 2.$$

Теорема 5. *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m+1 \geqslant n$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in C$. *Тогда*

$$\alpha_n(f,x) \leqslant q_n(x)\left(1+\frac{m+1}{2(n+1)}\right)\omega_1\left(f,\frac{\pi}{m+1}\right)$$
$$+\frac{A(1)(m+1)}{\pi(n+1)}\{|\sin(n+1)x|$$
$$\times\|\Delta^1_{\frac{\pi}{m+1}}(f)\|+\frac{(1-\cos(n+1)x)}{2}(m+1)\|\Delta^2_{\frac{\pi}{m+1}}(\widetilde{F})\|\}.$$

Доказательство. Полагая в неравенстве (17)

$$\Phi(f)=\alpha_n(f,x) \quad h=\frac{\pi}{m+1}$$

и учитывая соотношения (27) и (21), находим, что

$$\alpha_n(f,x) \leqslant q_n(x)\left(1+\frac{m+1}{2(n+1)}\right)\omega_1\left(f,\frac{\pi}{m+1}\right)$$
$$+\frac{A(1)(m+1)}{\pi(n+1)}\{|\sin(n+1)x|$$
$$\times\|\Delta^1_{\frac{\pi}{m+1}}(f)\|+\frac{(1-\cos(n+1)x)}{2}(m+1)\|\Delta^2_{\frac{\pi}{m+1}}(\widetilde{F})\|\}.$$

Следствие 4. *Пусть* $n, m \in \mathbb{Z}_+$, $m+1 \geqslant n$, $f \in C$. *Тогда*

$$\|\alpha_n(f)\| \leqslant \left\{2+\left(\frac{m+1}{n+1}\right)\left(1+\frac{A(1)}{\pi}\right)\right\}\omega_1\left(f,\frac{\pi}{m+1}\right)$$
$$+\frac{A(1)(m+1)^2}{\pi(n+1)}\|\Delta^2_{\frac{\pi}{m+1}}(\widetilde{F})\|.$$

Следствие 5. *Пусть* $m \in \mathbb{Z}_+$, $f \in C$. *Тогда*

$$\frac{1}{m+1}\max_{0\leqslant n\leqslant m}(n+1)\|f-J_n(f)\| \leqslant \left(3+\frac{A(1)}{\pi}\right)\omega_1\left(f,\frac{\pi}{m+1}\right)$$
$$+\frac{A(1)}{\pi}(m+1)\omega_2\left(\widetilde{F},\frac{\pi}{m+1}\right).$$

Следствие 5 получается применением следствия 4.

Теорема 6. *Пусть* $n, m, l \in \mathbb{Z}_+$, $m \geqslant n$, $l+1 \geqslant n$, $x \in \mathbb{R}$, $f \in C$. *Тогда*

$$\alpha_m(U_l(f), x) \leqslant q_m(x) \left(\frac{2\pi^3+13}{12}\right) \omega_2\left(f, \frac{1}{n+1}\right) + A(3)\frac{(n+1)^2}{(l+1)(m+1)}$$
$$\times \{(1-\cos(m+1)x)\|\Delta^2_{\frac{1}{n+1}}(f)\| + |\sin(m+1)x|(n+1)\|\Delta^3_{\frac{1}{n+1}}(\widetilde{F})\|\}, \tag{35}$$

$$\|\alpha_m(U_l(f))\| \leqslant \left(\frac{2\pi^3+13}{6} + 2A(3)\frac{(n+1)^2}{(l+1)(m+1)}\right) \omega_2\left(f, \frac{1}{n+1}\right)$$
$$+ A(3)\frac{(n+1)^3}{(l+1)(m+1)}\omega_3\left(\widetilde{F}, \frac{1}{n+1}\right), \tag{36}$$

$$\alpha_n(U_n(f), x) \leqslant q_n(x) \left(\pi^2 + \frac{13}{12}\right) \omega_2\left(f, \frac{1}{n+1}\right)$$
$$+ (1-\cos(n+1)x)\|\Delta^2_{\frac{1}{n+1}}(f)\| + |\sin(n+1)x|(n+1)\|\Delta^3_{\frac{1}{n+1}}(\widetilde{F})\|,$$
$$\|\alpha_n(U_n(f))\| \leqslant \left(2\pi^2 + \frac{25}{6}\right) \omega_2\left(f, \frac{1}{n+1}\right) + (n+1)\omega_3\left(\widetilde{F}, \frac{1}{n+1}\right).$$

Доказательство. Ограничимся доказательством неравенств (35) и (36). Остальные утверждения теоремы устанавливаются близким образом. Полагая в неравенстве (18)

$$\Phi(f) = \alpha_m(U_l(f), x), \quad h = \frac{1}{n+1},$$

находим, что

$$\Phi(f) \leqslant \|\Phi\| \left(\frac{2\pi^3+13}{24}\right) \omega_2\left(f, \frac{1}{n+1}\right) + A(3)\{\alpha(n+1)^2\|\Delta^2_{\frac{1}{n+1}}(f)\|$$
$$+ \beta(n+1)^3\|\Delta^3_{\frac{1}{n+1}}(\widetilde{F})\|\}.$$

В силу (30) и (24) имеем

$$\|\Phi\| \leqslant 2q_m(x), \quad \alpha \leqslant \frac{1-\cos(m+1)x}{(m+1)(l+1)}, \quad \beta \leqslant \frac{|\sin(m+1)x|}{(m+1)(l+1)}.$$

Сопоставляя приведенные неравенства получаем, что

$$\alpha_m(U_l(f),x) \leqslant 2q_m(x)\left(\frac{2\pi^3+13}{24}\right)\omega_2\left(f,\frac{1}{n+1}\right) + A(3)\frac{(n+1)^2}{(m+1)(l+1)}$$
$$\times\{(1-\cos(m+1)x)\|\Delta^2_{\frac{1}{n+1}}(f)\| + |\sin(m+1)x|(n+1)\|\Delta^3_{\frac{1}{n+1}}(\widetilde{F})\|\}.$$

Тем самым соотношение (35) доказано. Для доказательства (36) достаточно воспользоваться (35) и принять во внимание, что

$$q_m(x) \leqslant 2, \quad |\sin(m+1)x| \leqslant 1, \quad 1-\cos(m+1)x \leqslant 2.$$

Литература

1. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* Т. 2. М., 1965.
2. J. Szabados, *On the convergence and saturation problem of the Jackson polynomials.* — Acta Math. Hungar. **24**, No. 3–4 (1973), 399–406.
3. T. F. Xie, X. L. Zhou, *The Jackson interpolation operator and construction of functions.* — Acta Math. Hungar. **112**, No. 3 (2006), 237–247.
4. В. В. Жук, Г. И. Натансон, *Тригонометрические ряды Фурье и элементы теории аппроксимации.* Л., 1983.
5. В. В. Жук, *Аппроксимация периодических функций.* Л., 1982.
6. А. Ф. Тиман, *Теория приближения функций действительного переменного.* М., 1960.
7. Н. И. Ахиезер, М. Г. Крейн, *О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций.* — Докл. АН СССР **15**, No. 3 (1937), 107–112.
8. О. Л. Виноградов, *Точное неравенство для отклонения сумм Рогозинского и второго модуля непрерывности в пространстве непрерывных периодических функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **247** (1997), 26–45.
9. А. И. Степанец, *Равномерные приближения тригонометрическими полиномами.* Киев, 1981.
10. В. Жук, Г. Натансон, *К вопросу приближения функций посредством положительных операторов.* — Уч. зап. Тартуского гос. ун-та XIX, вып. 430 (1997), 58–69.
11. В. К. Дзядык, *Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами.* М., 1977.
12. В. В. Жук, *Лекции по теории аппроксимации.* СПб., 2008.
13. О. Л. Виноградов, *О квадратичном функционале из задачи о точной постоянной в неравенстве Джексона для приближения линейными положительными операторами.* — Вестн. СПбГУ, No. 15, сер. 1, вып. 3 (1998), 6–11.
14. В. В. Жук, С. Ю. Пименов, *О нормах сумм Ахиезера–Крейна–Фавара.* — Вестн. СПбГУ, сер. 10, вып. 4 (2006), 37–47.

Zhuk V. V. Approximation of periodic functions by Jackson type interpolation sums.

Let

$$\Phi_n(t) = \frac{1}{2\pi(n+1)} \left(\frac{\sin \frac{(n+1)t}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$$

be Fejer's kernel, C be a space of continuous 2π-periodic functions f with the norm $\|f\| = \max\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$;

$$J_n(f,x) = \frac{2\pi}{n+1} \sum_{k=0}^{n} f(t_k)\Phi_n(x - t_k), \qquad \text{where} \qquad t_k = \frac{2\pi k}{n+1},$$

be Jackson's polynomials of a function f, and let

$$\sigma_n(f,x) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\Phi_n(t)\,dt$$

be Fejer's sums of f.

The paper establishes upper estimates for the values of the types

$$|f(x) - J_n(f,x)|,\ |J_n(f,x) - \sigma_n(f,x),\ \|f - J_n(t)\|,\ \|J_n(t) - \sigma n(f)\|$$

which are exact in the order for every function $f \in C$. Special attention is paid to constants occurring in the inequalities obtained.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: zhuk@math.spbu.ru

Поступило 1 сентября 2008 г.