Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТРАНИМЫХ МНОЖЕСТВ

§1. Предварительные сведения

Пусть G – открытое множество в R^n, $n \geqslant 2$, H_k и L_k – k-мерные меры Хаусдорфа и Лебега соответственно, $1 \leqslant k \leqslant n$. Пусть задана некоторая система координат $Ox_1x_2\dots x_n$ в R^n. Определим n-мерные клетки как множества $\{x : a_i < x_i < b_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ для некоторых чисел a_i, b_i, $i = 1, 2, \dots, n$. Множества, являющиеся связными объединениями конечного числа клеток, назовём клеточными множествами.

Пусть A_p – класс весовых функций $w : R^n \to (0; +\infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта

$$\sup_Q \frac{1}{L_n(Q)} \int\limits_Q w\,dx \left(\frac{1}{L_n(Q)} \int\limits_Q w^{1-q}\,dx\right)^{p-1} < \infty, \tag{1}$$

где супремум берётся по всем координатным кубам Q, $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Пусть F_0, F_1 – два непересекающихся замкнутых множества в $\overline{G}$, $F \subset \overline{G}$ – ограниченное замкнутое относительно $R^n \setminus (F_0 \cup F_1)$ множество, не имеющее компонент с предельными точками на $E_0 \cup E_1$. Данную четвёрку множеств назовём конденсатором и обозначим $(E_0, E_1, G/F)$.

Вещественная функция $u(x)$, заданная в G, называется допустимой для ёмкости конденсатора $(F_0, F_1, G/F)$, если она непрерывна в G, локально липшицева в $G \setminus \{\infty\}$, для любых точек $x_0 \in F_0 \cap \overline{G}$, $x_1 \in F_1 \cap \overline{G}$ выполняются условия $\limsup\limits_{G \ni x \to x_0} u(x) \leqslant 0$, $\liminf\limits_{G \ni x \to x_1} u(x) \geqslant 1$ и $u(x)$ постоянна в некоторой окрестности любой компоненты множества F.

Ёмкостью конденсатора $(E_0, E_1, G/F)$ назовём величину

$$C_{p,w}(E_0, E_1, G/F) = \inf \int\limits_G |\nabla u|^p w\,dx,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ-2810.2008.1), РФФИ (грант 08-01-00028) и ДВО РАН (грант 06-III-А-01-013).

где инфимум берётся по всем допустимым функциям u.

Пусть τ – континуум в G, соединяющий F_0 и F_1 и неприводимый в $R^n \setminus (F_0 \cup F_1)$. Множество $\gamma = \tau \setminus F$ назовём составной кривой, соединяющей F_0 и F_1 в G.

Пусть Γ – некоторое семейство (составных) кривых. Определим (p,w)-модуль этого семейства равенством

$$M_{p,w}(\Gamma) = \inf \int\limits_G \rho^p w \, dx,$$

где инфимум берётся по всем неотрицательным борелевским функциям ρ, определённым в G и таким, что для любой $\gamma \in \Gamma$ $\int\limits_\gamma \rho \, dH^1 \geqslant 1$. Такие функции назовём допустимыми для модуля. Если указанное неравенство выполняется для всех кривых, исключая семейство модуля нуль, то такие функции назовём почти допустимыми для данного семейства.

Если некоторое свойство выполняется для всех кривых (поверхностей), исключая семейство модуля нуль, то будем говорить, что данное свойство выполняется для почти всех кривых (поверхностей).

Множество σ назовём поверхностью, отделяющей F_0 от F_1 в R^n, если $R^n \setminus \sigma$ состоит из нескольких связных компонент, одна из которых содержит F_0, а другая – F_1. Множество $\sigma \cap G$ назовём поверхностью, отделяющей F_0 от F_1 в G. Для такого семейства Σ определим (q, w^{1-q})-модуль следующим образом:

$$M_{q,w^{1-q}}(\Sigma) = \inf \int\limits_G \rho^q w^{1-q} \, dx,$$

где инфимум берётся по всем неотрицательным борелевским функциям ρ, определённым в G и таким, что для любой $\sigma \in \Sigma$ справедливо неравенство $\int\limits_\sigma \rho \, dH^{n-1} \geqslant 1$. Составной поверхностью $\widetilde{\sigma}$, отделяющей F_0 от F_1 в G, будем называть множество $\sigma \setminus F$, где $\sigma \in \Sigma$.

Множество F назовём $NC_{p,w}$-множеством, если для любых компактов $F_0, F_1 \subset G \setminus F$ справедливо равенство

$$C_{p,w}(F_0, F_1, (G \setminus F)/\emptyset) = C_{p,w}(F_0, F_1, G/\emptyset).$$

Множество F назовём $NH_{p,w}$-множеством, если для любых компактов $F_0, F_1 \subset G$ имеем равенство

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G/F) = C_{p,w}(F_0, F_1, G/\emptyset).$$

Нетрудно видеть, что такие множества F не разбивают ни одной области $D \subset G$.

Пусть

$$A_i(x) = \lim_{\delta \to 0} \inf \frac{H^{n-1}(\widetilde{\sigma})}{H^{n-1}(\mathrm{pr}_i \sigma)}, \quad i = 1, 2, \ldots n,$$

где инфимум берётся по всем клеткам диаметра меньшего δ, содержащим точку x, и по (q, w^{1-q})-почти всем составным поверхностям, отделяющим грани, параллельные гиперплоскости $x_i = 0$ в этой клетке. Пусть $\mathrm{pr}_i \sigma$ – проекция σ на гиперплоскость $x_i = 0$, $A(x) = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i(x)$.

Пусть дано замкнутое множество $F_0 \subset F$. Рассмотрим все поверхности, проходящие через множество F_0. Если (q, w^{1-q})-модуль соответствующих составных поверхностей $\widetilde{\sigma}$ равен нулю, то множество F_0 назовём исключительным.

§2. Локальный критерий $NC_{p,w}$-множества

Лемма 1. *Если $A_i(x_k) \leqslant A$ при некотором $i = 1, 2, \ldots, n$ и $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$, то $A_i(x_0) \leqslant A$.*

Доказательство. Предположим, что $A_i(x_0) > A$. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $\inf \frac{H^{n-1}(\widetilde{\sigma})}{H^{n-1}(\mathrm{pr}_i \sigma)} > A$, то есть для любой клетки, содержащей точку x_0 и имеющий диаметр, меньший δ, $\frac{H^{n-1}(\widetilde{\sigma})}{H^{n-1}(\mathrm{pr}_i \sigma)} > A$ для (q, w^{1-q})-почти всех составных поверхностей, отделяющих стороны клетки, параллельные гиперплоскостям $x_i = 0$.

Зафиксируем такую клетку и рассмотрим все поверхности, не содержащие частей, исключительных в определении каждого значения $A_i(x_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, и $A_i(x_0)$. При достаточно большом k точка x_k будет принадлежать этой клетке и поэтому найдётся поверхность σ, для которой $\frac{H^{n-1}(\widetilde{\sigma})}{H^{n-1}(\mathrm{pr}_i \sigma)} \leqslant A$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Отсюда следует, что при любом A множества $\{x \in R^n : A_i(x) \leqslant A\}$ являются замкнутыми и что функции $A_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $A(x)$ являются измеримыми.

Далее докажем лемму о полноте системы непрерывных допустимых функций.

Лемма 2. *В определении (p, w)-модуля семейства Σ поверхностей, отделяющих F_0 от F_1 в G, инфимум можно брать только по системе непрерывных на $G \setminus (F_0 \cup F_1)$ допустимых функций.*

Доказательство. Возьмём любое $\varepsilon > 0$. Пусть дана произвольная допустимая для модуля функция ρ такая, что $\int\limits_G \rho^p w\,dx < M_{p,w}(\Sigma) + \varepsilon$. Пусть $r(x)$ – расстояние от точки x до границы множества $G\setminus(F_0 \cup F_1)$ и B – единичный шар с центром в нуле. Рассмотрим функцию

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{L_n(B)} \int\limits_B \rho(x + \varepsilon r(x)y)\,dy.$$

Эта функция является непрерывной на $G\setminus(F_0 \cup F_1)$. Оценим интеграл от этой функции по поверхности σ, отделяющей F_0 от F_1 в G:

$$\begin{aligned}\int\limits_\sigma \rho_\varepsilon\,dH^{n-1} &= \frac{1}{L_n(B)} \int\limits_\sigma \int\limits_B \rho(x + \varepsilon r(x)y)\,dy\,dH^{n-1}(x)\\ &= \frac{1}{L_n(B)} \int\limits_B \int\limits_\sigma \rho(x + \varepsilon r(x)y)\,dH^{n-1}(x)\,dy.\end{aligned}$$

Рассмотрим внутренний интеграл. При достаточно малых ε отображение $z(x) = x + \varepsilon r(x)y$, $y \in B$, является взаимно однозначным в $G \setminus (F_0 \cup F_1)$, $1 - \varepsilon \leqslant |\nabla z(x)| \leqslant 1 + \varepsilon$. Заметим, что $z(\sigma)$ также будет поверхностью, отделяющей F_0 от F_1 в G. Имеем:

$$\int\limits_\sigma \rho(x + \varepsilon r(x)y)\,dH^{n-1}(x) = \int\limits_\sigma \rho(z(x)) \frac{dH^{n-1}(x)}{dH^{n-1}(z(x))}\,dH^{n-1}(z(x))$$

$$\geqslant (1+\varepsilon)^{1-n} \int\limits_{z(\sigma)} \rho(z)\,dH^{n-1}(z) \geqslant (1+\varepsilon)^{1-n}.$$

Таким образом, функция $(1+\varepsilon)^{n-1}\rho_\varepsilon$ является допустимой для семейства отделяющих поверхностей. Применяя неравенство Иенсена, получаем

$$\begin{aligned}
M_{p,w}(\Sigma) &\leqslant \int\limits_G (1+\varepsilon)^{(n-1)p} \rho_\varepsilon^p w\,dx \\
&= \int\limits_G (1+\varepsilon)^{(n-1)p} \left(\frac{1}{L_n(B)} \int\limits_B \rho(x+\varepsilon r(x)y)\,dy \right)^p w\,dx \\
&\leqslant (1+\varepsilon)^{(n-1)p} \frac{1}{L_n(B)} \int\limits_{G\setminus(F_0\cup F_1)} \int\limits_B \rho^p(x+\varepsilon r(x)y) w\,dy\,dx \\
&= (1+\varepsilon)^{(n-1)p} \frac{1}{L_n(B)} \int\limits_B \int\limits_{G\setminus(F_0\cup F_1)} \rho^p(z(x)) w\,dy \frac{dx}{dz(x)}\,dz(x) \\
&\leqslant \frac{(1+\varepsilon)^{(n-1)p}}{(1-\varepsilon)^n} \frac{1}{L_n(B)} \int\limits_B \int\limits_{G\setminus(F_0\cup F_1)} \rho^p(z) w(x)\,dy \frac{dx}{dz(x)}\,dz(x) \\
&\leqslant M_{p,w}(\Sigma) + o(1)
\end{aligned}$$

при $\varepsilon \to 0$ в силу свойств веса Макенхаупта [4, гл. 2]. Это и доказывает лемму.

Теорема 1. *Замкнутое относительно G множество F является $NC_{p,w}$-множеством тогда и только тогда, когда $A(x) > 0$ при $x \in F \setminus F_0$, где F_0 – исключительное множество.*

Доказательство. *Достаточность.* Заметим, что для локально спрямляемой по мере H^{n-1} поверхности σ, любая часть σ' которой удовлетворяет условию

$$H^{n-1}(\sigma' \setminus F) \geqslant A H^{n-1}(\mathrm{pr}_i \sigma'), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

выполняется неравенство

$$\begin{aligned}
dH_{\widetilde{\sigma}}^{n-1}(x) &\geqslant \frac{A}{n} \sum_{i=1}^n dH_{\mathrm{pr}_i \sigma}^{n-1}(x) \\
&\geqslant \frac{A}{n} \sqrt{\sum_{i=1}^n dH_{\mathrm{pr}_i \sigma}^{n-1}(x)^2} = \frac{A}{n} dH_\sigma^{n-1}(x). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Докажем, что $L_n(F \setminus F_0) = 0$. Пусть

$$E_m = (F \setminus F_0) \cap \Big\{x : A(x) > \frac{1}{m}\Big\}, \quad m = 1, 2, \dots .$$

Видим, что $E_m \subset E_{m+1}$ и $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} E_m = F \setminus F_0$ по условию. Предположим, что $L_n(F \setminus F_0) > 0$. Тогда существует m_0 такое, что $L_n(E_{m_0}) > 0$. Повторяя рассуждения из [3], получим противоречие.

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Обозначим $E'_1 = E_1$, $E'_m = E_m \setminus E_{m-1}$, $m = 2, 3, \dots$. Для каждого натурального m для $x \in E'_m$ существуют замкнутые клетки сколь угодно малого диаметра, содержащие точку x и такие, что $H^{n-1}(\widetilde{\sigma}) > \frac{1}{m} H^{n-1}(\mathrm{pr}_i \sigma)$ для (q, w^{1-q})-почти всех поверхностей, отделяющих стороны клетки, параллельные i-й координатной плоскости, $i = 1, 2, \dots, n$.

Пусть G_k – исчерпание области $G \setminus (F_0 \cup F_1)$, то есть

$$\overline{G}_k \subset G_{k+1}, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = G \setminus (F_0 \cup F_1).$$

Обозначим $G'_1 = G_1$, $G'_k = G_k \setminus G_{k-1}$, $k = 2, 3, \dots$. По теореме Витали [1, гл. III, §8, теорема 1] можно найти точки x_{km} и покрытие множества $G'_k \cap F'_m$ содержащейся в этом множестве системой Π_{km} непересекающихся клеток, фигурирующих в определении значений $A(x_{km})$ и таких, что $L_n((G'_k \cap E'_m) \setminus \Pi_{km}) = 0$, $k, m = 1, 2, \dots$. При этом можно считать, что

$$L_n(\Pi_{km}) < 2^{-m-k-1} m^{-q} M_k^{-q} n^{-q} \Big(\int\limits_G w^{1-q}\, dx\Big)^{-1/p} \quad \varepsilon, k, m = 1, 2, \dots .$$

Пусть $F_0, F_1 \subset \overline{G} \setminus F$ – замкнутые непересекающиеся множества и пусть ρ – непрерывная допустимая функция для (q, w^{1-q})-модуля семейства поверхностей Σ, отделяющих F_0 от F_1 в G, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_G \rho^q w^{1-q}\, dx < M_{q, w^{1-q}}(\Sigma) + \frac{\varepsilon}{2}$$

(см. лемму 2 настоящей работы). Пусть $M_k = \sup\limits_{G_k} \rho$, $k = 1, 2, \dots$. Введём функцию

$$\rho'(x) = \begin{cases} mnM_k, & x \in \Pi_{km}, \quad k, m = 1, 2, \dots, \\ \rho(x), & x \notin \bigcup\limits_{k,m=1}^{\infty} \Pi_{km}. \end{cases}$$

Далее будем рассматривать только те составные поверхности $\widetilde{\sigma}$, которые не содержат частей, исключительных в определении каждого значения $A(x_{km})$, для которых

$$H^{n-1}\left((\widetilde{\sigma}) \cap \left(\bigcup_{k,m=1}^{\infty} (G_k \cap E'_m) \setminus \bigcup_{k,m=1}^{\infty} \Pi_{km}\right)\right) = 0,$$

и указанные поверхности не проходят через множество F_0. Очевидно, что (q, w^{1-q})-модуль всех остальных поверхностей равен нулю.

Рассмотрим составную поверхность $\widetilde{\sigma}$, удовлетворяющую вышеприведённым условиям. Для неё

$$\int\limits_{\widetilde{\sigma}} \rho' dH^{n-1} = \sum_{k,m=1}^{\infty} \int\limits_{\widetilde{\sigma}\cap\Pi_{km}} \rho' dH^{n-1} + \int\limits_{\sigma\setminus \bigcup\limits_{k,m=1}^{\infty}\Pi_{km}} \rho' dH^{n-1}$$

$$= \sum_{k,m=1}^{\infty} \int\limits_{\widetilde{\sigma}\cap\Pi_{km}} mnM_k dH^{n-1} + \int\limits_{\sigma\setminus \bigcup\limits_{k,m=1}^{\infty}\Pi_{km}} \rho dH^{n-1}$$

$$\geqslant \sum_{k,m=1}^{\infty} \int\limits_{\sigma\cap\Pi_{km}} M_k dH^{n-1} + \int\limits_{\sigma\setminus \bigcup\limits_{k,m=1}^{\infty}\Pi_{km}} \rho dH^{n-1}$$

$$\geqslant \sum_{k,m=1}^{\infty} \int\limits_{\sigma\cap\Pi_{km}} \rho dH^{n-1} + \int\limits_{\sigma\setminus \bigcup\limits_{k,m=1}^{\infty}\Pi_{km}} \rho dH^{n-1} = \int\limits_{\sigma} \rho dH^{n-1} \geqslant 1$$

в силу неравенства (2). Отсюда следует, что функция ρ' является почти допустимой для (q, w^{1-q})-модуля семейства составных поверхностей, отделяющих F_0 от F_1 в G.

Оценим (q, w^{1-q})-модуль семейства составных поверхностей Σ', отделяющих F_0 от F_1 в G:

$$M_{q,w^{1-q}}(\Sigma') \leqslant \int\limits_{G\setminus(F_0\cup F_1)} \rho'^q w^{1-q}\,dx$$
$$= \sum_{k,m=1}^{\infty} \int\limits_{\Pi_{km}} m^q n^q M_k^q w^{1-q}\,dx + \int\limits_{G\setminus\bigcup\limits_{k,m=1}^{\infty}\Pi_{km}} \rho'^q w^{1-q}\,dx$$
$$\leqslant \sum_{k,m=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{m+k+1}} + \int\limits_{G\setminus\bigcup\limits_{k,m=1}^{\infty}\Pi_{km}} \rho^q w^{1-q}\,dx$$
$$\leqslant \int\limits_{G} \rho^q w^{1-q}\,dx + \frac{\varepsilon}{2} < M_{q,w^{1-q}}(\Sigma) + \varepsilon.$$

Отсюда в силу произвольности ε получим

$$M_{q,w^{1-q}}(\Sigma') \leqslant M_{q,w^{1-q}}(\Sigma).$$

Так как противоположное неравенство, очевидно, выполнено, то в силу связи между ёмкостью конденсатора и модулем семейства разделяющих поверхностей [2] теорема доказана.

Необходимость. Если $A(x) = 0$ для любого x из некоторого неисключительного множества $F' \subset F$, то для каждой такой точки x существует её содержащая клетка, и для некоторого семейства составных поверхностей $\widetilde{\sigma}$ положительного модуля, отделяющих стороны этой клетки, справедливо равенство $H^{n-1}(\widetilde{\sigma}) = 0$. Далее доказательство проводится так же, как и в [3].

§3. Условие ε-обхвата для $NH_{p,w}$-множеств

Найдём оценку снизу для (q, w^{1-q})-модуля семейства Σ $(n-1)$-мерных площадок $p_c = \{x : x_n = c,\ a_i < x_i < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, n-1\}$, отделяющих стороны $x_n = a_n$ и $x_n = b_n$ клетки $\Pi = \{x : a_i < x_i < b_i,$ $i = 1, 2, \ldots, n\}$. Пусть ρ – произвольная допустимая функция для модуля. При $c \in (a_n, b_n)$ имеем:

$$\int\limits_{p_c} \rho\, dH^{n-1} \geqslant 1.$$

С другой стороны, применяя неравенство Гёльдера, получим:

$$\int\limits_{p_c} \rho\, dH^{n-1} = \int\limits_{p_c} \rho w^{-\frac{1}{p}} \cdot w^{\frac{1}{p}} dH^{n-1}$$
$$\leqslant \Big(\int\limits_{p_c} \rho^q w^{1-q}\, dH^{n-1} \Big)^{1/q} \Big(\int\limits_{p_c} w\, dH^{n-1} \Big)^{1/p}.$$

Соединим эти два неравенства:

$$\int\limits_{p_c} \rho^q w^{1-q}\, dx_1 \dots dx_{n-1} \geqslant \Big(\int\limits_{p_c} w\, dx_1 \dots dx_{n-1} \Big)^{1-q}.$$

Интегрируя по x_n и учитывая произвол в выборе ρ, получим:

$$M_{q,w1-q}(\Sigma) \geqslant \int\limits_{a_n}^{b_n} dx_n \Big(\int\limits_{p_{x_n}} w\, dx_1 \dots dx_{n-1} \Big)^{1-q} > 0. \tag{3}$$

Можно заметить, что подобное неравенство верно для любого параллелепипеда, не обязательно координатного.

Будем говорить, что множество F удовлетворяет условию ε-обхвата, если выполнены следующие условия. Для любого $\varepsilon > 0$, для любой неотрицательной функции ρ такой, что $\int\limits_G \rho^q w^{1-q}\, dx < \infty$, для произвольного семейства гиперплоскостей, параллельных друг другу, и для почти всех гиперплоскостей σ из этого семейства существует поверхность σ', не проходящая через F и такая, что $\int\limits_{\sigma' \setminus \sigma} \rho\, dH^{n-1} < \varepsilon$, где σ' находится в ε-окрестности σ и $H^{n-1}(\sigma' \setminus \sigma) < \varepsilon$.

Теорема 2. *Замкнутое множество $F \subset G$, $L_n(F) = 0$, является $NH_{p,w}$-множеством тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет условию ε-обхвата.*

Доказательство. *Достаточность.* Пользуясь определением множества $NH_{p,w}$, связью между ёмкостью конденсатора и модулем семейства отделяющих поверхностей [2] и равенством (3) получаем, что (q, w^{1-q})-модуль семейства поверхностей, отделяющих стороны невырожденной клетки и не проходящих через множество F, положителен.

Это означает, что для любой функции ρ, удовлетворяющей условию теоремы и любого невырожденного параллелепипеда в G найдётся поверхность σ, отделяющая какие-либо две стороны этого параллелепипеда и не проходящая через F такая, что $\int\limits_\sigma \rho\, dH^{n-1} < \infty$.

Для упрощения рассуждений рассмотрим гиперплоскости p_c, параллельные гиперплоскости $x_n = 0$, и пусть ρ – функция, определенная в условиях теоремы. Рассмотрим те значения c, для которых:

1. $0 < \int\limits_{p_c \cap G} w\, dH^{n-1} < \infty$;
2. существует производная
$$\frac{d}{dc}\int\limits_{c_0}^{c}\Big(\int\limits_{s_c} w\, dH^{n-1}\Big)^{1-q} dx_n = \Big(\int\limits_{p_c} w\, dH^{n-1}\Big)^{1-q};$$
3. $$\int\limits_{p_c \cap G} \rho^q w^{1-q}\, dH^{n-1} < \infty;$$
4. существует производная
$$\frac{d}{dc}\int\limits_{c_0}^{c}\Big(\int\limits_{s_c} \rho^q w^{1-q}\, dH^{n-1}\Big) dx_n = \int\limits_{s_c} \rho^q w^{1-q}\, dH^{n-1};$$
5. $H^{n-1}(p_c \cap F) = 0$.

Здесь s_c – $(n-1)$-мерные клеточные множества на гиперплоскости $p_c = \{x : x_n = c\}$, лежащие в G, у которых вершины имеют рациональные координаты.

Покажем, что эти условия выполняются для почти всех c. Для условий 1), 2) это следует из формулы (1). Для условий 3) и 4) это верно в силу теоремы Фубини, для 5) – вытекает из условия теоремы.

Пусть c удовлетворяет условиям 1)–5). Рассмотрим соответствующую гиперплоскость $x_n = c$. Покроем часть множества F, лежащую в этой гиперплоскости, непересекающимися клеточными множествами s_c^k, $k = 1, 2, \ldots, m$, с рациональными координатами вершин таким образом, чтобы выполнялись неравенства
$$\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} s_c^k} w\, dH^{n-1} < \frac{\varepsilon}{4}, \qquad \int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m} s_c^k} \rho^q w^{1-q} dH^{n-1} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Фиксируем k. Пусть Π_δ – клеточное множество, составленное из множеств $s^k_{c'}$ с $c \leqslant c' \leqslant c+\delta$, $\delta > 0$; s'^k_c – $(n-1)$-мерное клеточное множество такое, что $s'^k_c \subset s^k_c$, $k = 1, 2, \ldots, m$, и $s^k_c \setminus s'^k_c$ не содержит точек множества F. Очевидно, что в силу замечания в начале доказательства при достаточно малом δ существует поверхность σ^1_k, отделяющая две боковых граничных компоненты множества

$$\Pi_\delta = \bigcup_{c\leqslant c'\leqslant c+\delta} (s^k_{c'} \setminus s'^k_{c'})$$

в этом же множестве и такая, что

$$\int\limits_{\sigma^1_k} \rho dH^{n-1} < \frac{\varepsilon}{2m}.$$

Рассмотрим семейство поверхностей Σ_k, отделяющих $x_n = c$ от $x_n = c+\delta$ в Π_δ и не проходящих через F. Из формулы (3) и замечания в начале доказательства теоремы следует, что

$$M_{q,w^{1-q}}(\Sigma_k) \geqslant \int\limits_c^{c+\delta} \Bigg(\int\limits_{s^k_{x_n}} w\, dH^{n-1} \Bigg)^{1-q} dx_n. \tag{4}$$

Пусть $L = \inf\limits_{\sigma\in\Sigma_k} \int\limits_\sigma \rho dH^{n-1}$. Тогда функция $\frac{\rho}{L}$ допустима для $M_{q,w^{1-q}}(\Sigma_k)$ и поэтому

$$M_{q,w^{1-q}}(\Sigma_k) \leqslant L^{-q} \int\limits_{\Pi_\delta} \rho^q w^{1-q}\, dx. \tag{5}$$

Соединяя (4) и (5), получим:

$$L^{-q} \int\limits_{\Pi_\delta} \rho^q w^{1-q}\, dx \geqslant \int\limits_c^{c+\delta} \Bigg(\int\limits_{s^k_{x_n}} w\, dH^{n-1} \Bigg)^{1-q} dx_n.$$

При достаточно малых δ, используя неравенство Юнга, имеем:

$$
\begin{aligned}
&L^{-q}\Big(\int\limits_{s_c^k}\rho^q w^{1-q}\,dH^{n-1}+\frac{\varepsilon}{8m}\Big)\geqslant\Big(\int\limits_{s_c^k} w\,dH^{n-1}+\frac{\varepsilon}{8m}\Big)^{1-q},\\
&L^{q}\leqslant\Big(\int\limits_{s_c^k}\rho^q w^{1-q}\,dH^{n-1}+\frac{\varepsilon}{8m}\Big)\Big(\int\limits_{s_c^k} w\,dH^{n-1}+\frac{\varepsilon}{8m}\Big)^{q-1},\\
&L\leqslant\Big(\int\limits_{s_c^k}\rho^q w^{1-q}\,dH^{n-1}+\frac{\varepsilon}{8m}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\int\limits_{s_c^k} w\,dH^{n-1}+\frac{\varepsilon}{8m}\Big)^{\frac{1}{p}}\\
&\leqslant\frac{1}{q}\Big(\int\limits_{s_c^k}\rho^q w^{1-q}\,dH^{n-1}+\frac{\varepsilon}{8m}\Big)+\frac{1}{p}\Big(\int\limits_{s_c^k} w\,dH^{n-1}+\frac{\varepsilon}{8m}\Big)\\
&=\frac{1}{q}\int\limits_{s_c^k}\rho^q w^{1-q}\,dH^{n-1}+\frac{1}{p}\int\limits_{s_c^k} w\,dH^{n-1}+\frac{\varepsilon}{8m}.
\end{aligned}
$$

По определению инфимума, найдется поверхность $\sigma_k'\in\Sigma_k$ такая, что

$$
\int\limits_{\sigma_k'}\rho\,dH^{n-1}\leqslant L+\frac{\varepsilon}{8m}\leqslant\frac{1}{q}\int\limits_{s_c^k}\rho^q w^{1-q}\,dH^{n-1}+\frac{1}{p}\int\limits_{s_c^k} w\,dH^{n-1}+\frac{\varepsilon}{4m}.
$$

Пусть $\sigma_k=\sigma_k^1\cup\sigma_k'$ – поверхность, граница которой лежит на s_c^k. Она не проходит через множество F по построению и

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m}\sigma_k}\rho\,dH^{n-1}&\leqslant\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\sigma_k^1}\rho\,dH^{n-1}+\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\sigma_k'}\rho\,dH^{n-1}\leqslant\frac{\varepsilon}{2}\\
&+\frac{1}{q}\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m}s_c^k}\rho^q w^{1-q}\,dH^{n-1}+\frac{1}{p}\int\limits_{\bigcup\limits_{k=1}^{m}s_c^k} w\,dH^{n-1}+\frac{\varepsilon}{4}\\
&\leqslant\frac{1}{q}\frac{\varepsilon}{4}+\frac{1}{p}\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.
\end{aligned}
$$

В качестве поверхности σ' можно взять поверхность $\left(\sigma \setminus \bigcup\limits_{k=1}^{m} s_c^k\right) \cup \bigcup\limits_{k=1}^{m} \sigma_k$. Если в вышеизложенных рассуждениях наряду с функцией ρ будем рассматривать функцию, тождественно равную 1, то получим также утверждение $H^{n-1}(\sigma' \setminus \sigma) < \varepsilon$.

Необходимость. Рассмотрим клетку Π, $\overline{\Pi} \subset G \setminus (F_0 \cup F_1)$, и семейство поверхностей $\widetilde{\Sigma}$, отделяющих какие-либо две стороны этой клетки в Π. Применяя теорему 2.4.2 работы [5], выведем, что модуль этого семейства равен модулю полиэдральных поверхностей $\Sigma \subset \widetilde{\Sigma}$, то есть поверхностей, составленных из конечного числа частей гиперплоскостей.

Пусть $\Sigma' \subset \Sigma$ – семейство поверхностей, не проходящих через F, и пусть ρ – произвольная допустимая функция для $M_{q,w^{1-q}}(\Sigma')$. Легко видеть, что если $\sigma \in \Sigma$ – поверхность, образованная частями гиперплоскостей, которые удовлетворяют условию ε-обхвата, то

$$\int\limits_{\sigma} \rho \, dH^{n-1} \geqslant 1. \tag{6}$$

Пусть $\sigma \in \Sigma$, τ – поверхность, отделяющая F_0 от F_1 в G и такая, что $\tau \cap \Pi = \sigma$. Если $y \in R^n$ находится в шаре $B(0,r)$ с центром в 0 и радиуса $r < d(\Pi_i, \partial G)$, то поверхность $\tau_y \cap \Pi \in \Sigma$, где τ_y – сдвиг поверхности τ на вектор y. Для значений r, определённых выше, введём усреднённую функцию

$$\rho_r(x) = \frac{1}{L_n(B(0,r))} \int\limits_{B(0,r)} \rho(x+y) \, dy.$$

Рассмотрим интеграл

$$
\begin{aligned}
\int\limits_{\tau} \rho_r(x)\, dH^{n-1}(x) &\geqslant \int\limits_{\tau} \rho_r(x)\, dH^{n-1}(x) \\
&= \frac{1}{L_n(B(0,r))} \int\limits_{\tau} \int\limits_{B(0,r)} \rho(x+y)\, dy\, dH^{n-1}(x) \\
&= \frac{1}{L_n(B(0,r))} \int\limits_{B(0,r)} \int\limits_{\tau} \rho(x+y)\, dH^{n-1}(x)\, dy \\
&= \frac{1}{L_n(B(0,r))} \int\limits_{B(0,r)} \int\limits_{\tau_y} \rho(x)\, dH^{n-1}(x)\, dy.
\end{aligned}
$$

Поверхность τ_y удовлетворяет условию ε-обхвата при почти всех y, а именно, при тех y, для которых части гиперплоскостей, образующие τ_y, удовлетворяют условию ε-обхвата и, может быть, при тех y, которые не являются векторами, параллельными частям гиперплоскостей, составляющих τ. Таким образом, для почти всех τ_y выполнено неравенство (6) и поэтому $\int\limits_{\tau} \rho_r(x)\, dH^{n-1}(x) \geqslant 1$.

Рассуждениями, аналогичными приведённым в [5, лемма 3.8], докажем, что для (q, w^{1-q})-почти всех поверхностей $\sigma \in \Sigma$ выполнено неравенство $\int\limits_{\sigma} \rho\, dH^{n-1} \geqslant 1$. Значит, функция ρ почти допустима для $M_{q,w^{1-q}}(\Sigma)$. Отсюда следует, что $M_{q,w^{1-q}}(\Sigma) \leqslant M_{q,w^{1-q}}(\Sigma')$. Так как обратное неравенство очевидно, то теорема доказана.

Литература

1. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной.* СПб, 1999.
2. В. А. Шлык, *Емкость конденсатора и модуль семейства разделяющих поверхностей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 168–182.
3. В. А. Шлык, *Метрические характеристики N_p-компактов и устранимых особенностей пространства $L_p^1, p \in (1, \infty)$.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1991), 162–171.
4. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions.* Tokyo, 2003. Gakuto International Series, Advances in Mathematical Sciences and Applications, **19**.
5. W. P. Ziemer, *Extremal length and conformal capacity.* — Trans. Amer. Math. Soc. **126**, No. 3, (1967), 460–473.

Dymchenko Yu. V., Shlyk V. A. Geometric criteria for removable sets.

In the paper some exact geometrical characteristics of removable sets for two classes of weight capacities are established.

Дальневосточный государственный
университет, Владивосток
E-mail: dymch@mail.ru
shlyknv@yandex.ru

Поступило 30 июля 2008 г.