Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

В. Н. Дубинин, Д. А. Кириллова

К ЗАДАЧАМ ОБ ЭКСТРЕМАЛЬНОМ РАЗБИЕНИИ

Указанные в заглавии задачи более или менее непосредственно связаны с различными экстремальными вопросами геометрической теории функций [1]. Из последних исследований в этой области отметим работы Г. В. Кузьминой [2, 3], Е. Г. Емельянова [4, 5] и А. К. Бахтина [6, 7]. Данная работа посвящена развитию техники емкостей конденсаторов и симметризации в решении подобного рода задач [8–12]. В отличие от предыдущих авторов мы изучаем также произведения радиусов Робена [12] взамен внутренних (конформных) радиусов. В §1 нашей статьи доказываются новые теоремы о максимуме указанного произведения для неналегающих областей в круге либо в кольце. Во втором параграфе вводятся и оцениваются сверху новые инварианты относительно группы дробно-линейных автоморфизмов комплексной сферы, связанные с приведенными модулями открытых множеств [10].

§1. Неравенства для произведений радиусов Робена неналегающих областей

Для внутренних радиусов $r(D_k,\, a_k)$ двух непересекающихся односвязных областей D_1 и D_2, лежащих в единичном круге $U = \{z : |z| < 1\}$, хорошо известно неравенство П. П. Куфарева [13]:

$$r(D_1, a_1) r(D_2, a_2) \leqslant |a_2 - a_1|^2 \left[1 - |(a_2 - a_1)/(1 - \overline{a_1} a_2)|^2\right]. \qquad (1)$$

Докажем сперва аналог этого неравенства, где внутренние радиусы будут заменены на "радиусы Робена" $r(D_k,\, \Gamma_k,\, a_k)$, $k = 1, 2$. Пусть область $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ ограничена конечным числом аналитических жордановых кривых, Γ – непустое замкнутое подмножество ∂D, состоящее из конечного числа невырожденных жордановых дуг, и пусть z_0 – конечная точка области D. Функция Робена $g_D(z, z_0, \Gamma)$ определяется

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ-2810.2008.1) и РФФИ (грант 08-01-00028).

как вещественная непрерывная функция на $\overline{D}\setminus\{z_0\}$, непрерывно дифференцируемая на $\overline{D}\setminus(\Gamma\cup\{z_0\})$, гармоническая в $D\setminus\{z_0\}$ и удовлетворяющая следующим условиям:

$$
\begin{aligned}
&g_D(z,z_0,\Gamma)=0 \qquad &&\text{при}\quad z\in\Gamma,\\
&\frac{\partial}{\partial n}g_D(z,z_0,\Gamma)=0 \qquad &&\text{при}\quad z\in\partial D\setminus\Gamma,
\end{aligned}
$$

$g_D(z,z_0,\Gamma)+\log|z-z_0|$ – гармоническая функция в окрестности точки z_0 ($\partial/\partial n$ означает дифференцирование вдоль нормали к ∂D). В случае, когда D – произвольная конечносвязная область комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$ без изолированных граничных точек, а Γ – непустое замкнутое граничное подмножество ∂D, состоящее из конечного числа невырожденных связных компонент, функция Робена определяется с помощью конформного отображения [11].

Радиусом Робена назовем величину

$$
r(D,\Gamma,z_0)=\exp\lim_{z\to z_0}\left(g_D(z,z_0,\Gamma)+\log|z-z_0|\right).
$$

Если множество Γ совпадает с границей области D, то функция Робена равна функции Грина, а радиус Робена $r(D,\Gamma,z_0)=r(D,z_0)$. Всюду далее в этом параграфе рассматриваются только области D и множества Γ, указанные выше.

Теорема 1. *Для любых областей D_k, множеств Γ_k и точек a_k, удовлетворяющих условиям*

$$
D_1\cap D_2=\emptyset,\quad a_k\in D_k\subset U,\quad (\partial D_k)\cap U\subset\Gamma_k\subset\partial D_k,\quad k=1,2,
$$

справедливо неравенство

$$
\begin{aligned}
&r(D_1,\Gamma_1,a_1)r(D_2,\Gamma_2,a_2)\\
&\qquad\qquad\leqslant|a_2-a_1|^2\left[1-|(a_2-a_1)/(1-\overline{a_1}a_2)|^2\right]^{-1}. \qquad (2)
\end{aligned}
$$

Равенство в (2) для любых фиксированных точек a_1 и a_2 круга U достигается в том случае, если общая граница областей D_1 и D_2 совпадает с $\Gamma_1=\Gamma_2$ и является неевклидовой прямой, ортогональной *отрезку неевклидовой прямой, соединяющему точки a_1 и a_2, и делящей этот отрезок пополам.*

Доказательство. Пусть для определенности $a_k \neq 0$, $k = 1, 2$, множество $(\partial D_1) \setminus \Gamma_1$ пусто, а множество $\gamma := (\partial D_2) \setminus \Gamma_2$ не пусто. Следуя работе [12], введем конденсаторы

$$
\begin{aligned}
&C_1 = C(r; D_1, \partial D_1, \{a_1\}, \{-1\}, \{r\}),\\
&C_1^* = C\left(r; D_1^*, \partial D_1^*, \left\{\frac{1}{\overline{a}_1}\right\}, \{-1\}, \left\{\frac{r}{|a_1|^2}\right\}\right),\\
&C_2 = C(r; D_2, \Gamma_2, \{a_2\}, \{1\}, \{r\}),\\
&C_2^* = C\left(r; D_2^*, \partial D_2^*, \left\{a_2, \frac{1}{\overline{a}_2}\right\}, \{1, 1\}, \left\{r, \frac{r}{|a_2|^2}\right\}\right),\\
&C_3 = C\left(r; \overline{\mathbb{C}}, \emptyset, \left\{a_1, a_2, \frac{1}{\overline{a}_1}, \frac{1}{\overline{a}_2}\right\}, \{-1, 1, -1, 1\}, \left\{r, r, \frac{r}{|a_1|^2}, \frac{r}{|a_2|^2}\right\}\right),
\end{aligned}
$$

где

$$D_1^* = \{z : 1/\overline{z} \in D_1\}, \quad D_2^* = D_2 \cup \gamma \cup \{z : 1/\overline{z} \in D_2\}.$$

Из конформной инвариантности емкости и принципа симметрии [12] вытекают равенства

$$\operatorname{cap} C_1 = \operatorname{cap} C_1^*, \ \operatorname{cap} C_2^* = 2 \operatorname{cap} C_2.$$

Расширив при необходимости области D_1, D_1^*, D_2^* так, чтобы они по-прежнему не пересекались, но при этом $\overline{D_1 \cup D_1^* \cup D_2^*} = \overline{\mathbb{C}}$, и применяя монотонность емкости [11] и принцип композиции (теорема 3 работы [12]), имеем

$$\operatorname{cap} C_1 + \operatorname{cap} C_1^* + \operatorname{cap} C_2^* \geqslant \operatorname{cap} C_3.$$

Таким образом,

$$2\operatorname{cap} C_1 + 2\operatorname{cap} C_2 \geqslant \operatorname{cap} C_3.$$

Неравенство (2) вытекает отсюда при $r \to 0$ с учетом асимптотических формул для емкостей вырождающихся конденсаторов [10, 11], согласно которым

$$\operatorname{cap} C_1 = -\frac{2\pi}{\log r} - 2\pi \log r(D_1, a_1)\Big(\frac{1}{\log r}\Big)^2 + o\bigg(\Big(\frac{1}{\log r}\Big)^2\bigg), \quad r \to 0,$$

$$\operatorname{cap} C_2 = -\frac{2\pi}{\log r} - 2\pi \log r(D_2, \Gamma_2, a_2)\Big(\frac{1}{\log r}\Big)^2 + o\bigg(\Big(\frac{1}{\log r}\Big)^2\bigg), \ r \to 0,$$

$$\operatorname{cap} C_3 = -\frac{8\pi}{\log r} - 4\pi \log \frac{|a_1 - a_2|^2|1 - \overline{a}_1 a_2|^2}{||a_1|^2 - 1||a_2|^2 - 1|}\Big(\frac{1}{\log r}\Big)^2 + o\bigg(\Big(\frac{1}{\log r}\Big)^2\bigg), \quad r \to 0.$$

Случай равенства в (2) проверяется непосредственно, а также вытекает из теоремы 8 [12].

Аналогично рассматриваются случаи, когда одна из точек $a_k = 0$, либо оба множества $(\partial D_k) \setminus \Gamma_k$, $k = 1, 2$, пустые, либо оба не пустые. Теорема доказана.

Заметим, что если одна из точек a_k фиксирована, а другая стремится к окружности $|z| = 1$, то правая часть неравенства (1) стремится к нулю, в то время как правая часть неравенства (2) – к бесконечности. В связи с этим рассмотрим следующую экстремальную задачу “со свободными полюсами”:

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, \Gamma_k, a_k)(1 - |a_k|^2) \to \sup, \tag{3}$$

где верхняя грань ищется по всевозможным точкам a_k, областям D_k и множествам Γ_k, удовлетворяющим условиям: $a_k \in D_k \subset U$, $(\partial D_k) \cap U \subset \Gamma_k \subset \partial D_k$, $D_k \cap D_l = \emptyset$, $k \neq l$, $k, l = 1, \dots, n$, $n \geqslant 2$. Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. *При* $n = 2$ *верхняя грань в задаче* (3) *не достигается и равна* 16.

Действительно, ввиду (2)

$$\prod_{k=1}^{2} r(D_k, \Gamma_k, a_k)(1 - |a_k|^2) \leqslant |1 - \overline{a_1} a_2|^2 |a_2 - a_1|^2$$

$$\leqslant (1 + |a_1 a_2|)^2 \left(|a_2| + |a_1|\right)^2 < 16.$$

С другой стороны, для экстремальной в теореме 1 конфигурации имеем

$$\lim_{\rho\to 1}(2\rho)^2\left[1-\left(2\rho/(1+\rho^2)\right)^2\right]^{-1}(1-\rho^2)^2=16,$$

где $\rho=a_2=-a_1$.

Теорема 2. *При фиксированом $n\geqslant 3$ произведение в левой части* (3) *ограничено сверху. Если, дополнительно, верхняя грань в* (3) *достигается для точек a_k^*, $|a_k^*|<1$, $k=1,\dots,n$, то необходимо выполняется равенство*

$$\sum_{k=1}^{n}a_k^*=0. \tag{4}$$

Доказательство. Ограниченность вытекает из следствия 1, примененного к парам областей из совокупности $\{D_k\}_{k=1}^n$. Пусть теперь супремум (3) достигается для точек a_k^*, $|a_k^*|<1$, областей D_k^* и множеств Γ_k^*, $k=1,\dots,n$, и пусть

$$\tau_\varphi(z):=\frac{z-re^{i\varphi}}{1-re^{-i\varphi}z}=z+\left(e^{-i\varphi}z^2-e^{i\varphi}\right)r+o(r),\ r\to 0,$$

$r\in(0,1)$, $\varphi\in\mathbb{R}$. Тогда

$$\begin{aligned}&\prod_{k=1}^{n}r(D_k^*,\Gamma_k^*,a_k^*)(1-|a_k^*|^2)\\ &\geqslant\prod_{k=1}^{n}r(\tau_\varphi(D_k^*),\tau_\varphi(\Gamma_k^*),\tau_\varphi(a_k^*))(1-|\tau_\varphi(a_k^*)|^2)\\ &=\prod_{k=1}^{n}r(D_k^*,\Gamma_k^*,a_k^*)|\tau_\varphi'(a_k^*)|(1-|\tau_\varphi(a_k^*)|^2).\end{aligned}$$

Отсюда

$$1\geqslant\prod_{k=1}^{n}|\tau_\varphi'(a_k^*)|=1+2r\,\mathrm{Re}\,e^{-i\varphi}\sum_{k=1}^{n}a_k^*+o(r),\ r\to 0,$$

для любых $\varphi\in\mathbb{R}$. Поэтому имеет место равенство (4). Теорема доказана.

Обозначим через $K(t)$, $0 < t < 1$, круговое кольцо $t < |z| < 1$, и пусть функция T конформно и однолистно отображает кольцо $K(t)$ на кольцо Тейхмюллера – плоскость с разрезами по некоторому отрезку $[T(1), -1]$, $T(1) < -1$, и по неотрицательной части вещественной оси от 0 до бесконечности. Понятно, что функция T симметрична относительно вещественной оси и $T(t) = \infty$. Привлекая эллиптические функции, нетрудно выписать явное выражение для функции T.

Теорема 3. *Для любых областей D_k, множеств Γ_k и точек a_k, удовлетворяющих условиям*

$$D_1 \cap D_2 = \emptyset, \quad a_k \in D_k \subset K(t), \quad (\partial D_k) \cap K(t) \subset \Gamma_k \subset \partial D_k, \quad k = 1, 2,$$

справедливо неравенство

$$r(D_1, \Gamma_1, a_1) r(D_2, \Gamma_2, a_2) \leqslant \frac{|T(|a_2|) - T(-|a_1|)|^2}{|T'(|a_2|)\, T'(-|a_1|)|}. \tag{5}$$

Равенство в (5) *достигается, например, в случае, когда $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, а общая граница областей D_1 и D_2 совпадает с*

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 = \left\{ z \in \overline{K}(t) : |T(z) - T(a_1)| = |T(z) - T(a_2)| \right\}.$$

Доказательство. В обозначениях работ [11, 12] рассмотрим конденсаторы $C_1 = C(r; D_1, \Gamma_1, \{a_1\}, \{-1\}, \{r/|T'(-|a_1|)|\})$ и $C_2 = C(r; D_2, \Gamma_2, \{a_2\}, \{1\}, \{r/|T'(|a_2|)|\})$. По формуле (7) работы [11]

$$\begin{aligned} \operatorname{cap} C_1 + \operatorname{cap} C_2 = -\frac{4\pi}{\log r} \\ - 2\pi \left\{ \log \left[|T'(-|a_1|) T'(|a_2|)| r(D_1, \Gamma_1, a_1) r(D_2, \Gamma_2, a_2) \right] \right\} \left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \\ + o\left(\left(\frac{1}{\log r} \right)^2 \right), \quad r \to 0. \end{aligned}$$

Введем следующие вещественнозначные функции:

u – функция, совпадающая в $\overline{D}_2$ и $\overline{D}_2$ с потенциальными функциями конденсаторов, соответственно C_1 и C_2, и доопределенная по непрерывности нулем в замыкании кольца $K(t)$;

u^* – результат круговой симметризации функции u относительно вещественной положительной полуоси [14] (в отличие от

[14] мы симметризуем функцию в кольце, а не во всей плоскости, с сохранением определений [14]);

функция v задана в w-плоскости равенством $v(w) = u^*\left(T^{-1}(w)\right)$ (определение корректно ввиду симметрии функций u^* и T).

Всюду ниже

$$I(\omega, B) := \iint\limits_B |\nabla\omega|^2 dxdy.$$

Из свойств симметризации и конформной инвариантности интеграла Дирихле следует

$$\begin{aligned}
&\operatorname{cap} C_1 + \operatorname{cap} C_2 = I(u, K(t)) \geqslant I(u^*, K(t)) \\
&\quad = I(v, \mathbb{C}) \geqslant \operatorname{cap} C(r; \mathbb{C}, \emptyset, \{T(-|a_1|), T(|a_2|)\}, \{-1, 1\}, \{r, r\}) \\
&\quad = -\frac{4\pi}{\log r} - 4\pi \left\{\log |T(|a_2|) - T(-|a_1|)|\right\} \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \\
&\qquad\qquad r \to 0.
\end{aligned}$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулой (2) из работы [12]. Суммируя выписанные соотношения, получим неравенство (5).

Пусть теперь $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, а области D_k и множества Γ_k определены также как в конце формулировки теоремы 3, $k = 1, 2$. Можно считать, что конденсатор $C(r; \mathbb{C}, \emptyset, \{T(-|a_1|), T(|a_2|)\}, \{-1, 1\}, \{r, r\})$ симметричен относительно вещественной оси, и, если v – потенциальная функция этого конденсатора, то в этом случае функция $u(z) := v(T(z))$ совпадает в точках множеств D_1 и D_2 с потенциальными функциями конденсаторов соответственно C_1 и C_2. Поскольку $I(u, K(t)) = I(v, \mathbb{C})$, то емкость конденсатора

$$\operatorname{cap} C(r; \mathbb{C}, \emptyset, \{T(-|a_1|), T(|a_2|)\}, \{-1, 1\}, \{r, r\}) = \operatorname{cap} C_1 + \operatorname{cap} C_2.$$

Отсюда следует равенство в (5). Теорема доказана.

Заметим, что указанный в теореме 3 случай равенства в (5) далеко не единственный. По-видимому, мы опишем все случаи равенства, если рассмотрим наряду с функцией T суперпозиции этой функции с дробно-линейными автоморфизмами комплексной сферы, оставляющими неизменной вещественную ось. В случае, если множества $(\partial D_k) \setminus \Gamma_k$, $k = 1, 2$, расположены на одной окружности кольца $K(t)$, имеем следующее усиление неравенства (5).

Теорема 4. *Для любых областей D_k, множеств Γ_k и точек a_k, удовлетворяющих условиям $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, $a_k \in D_k \subset K(t)$, $\{z \in \partial D_k : \ t \leqslant |z| < 1\} \subset \Gamma_k \subset \partial D_k$, $k = 1, 2,$. справедливо неравенство*

$$r(D_1, \Gamma_1, a_1) r(D_2, \Gamma_2, a_2)$$
$$\leqslant \frac{16\,|T(|a_2|) - T(-|a_1|)|^2}{|T'(|a_2|)\,T'(-|a_1|)|\left(\sqrt[4]{T(|a_2|)/T(-|a_1|)} + \sqrt[4]{T(-|a_1|)/T(|a_2|)}\right)^4}. \qquad (6)$$

Равенство в (6) достигается в случае, когда $a_1 < 0$, $a_2 > 0$, общая граница областей D_1 и D_2 определяется уравнением

$$\sqrt{-T(|a_2|)}|T(z) - T(-|a_1|)|$$
$$= \sqrt{-T(-|a_1|)}|T(z) - T(|a_2|)|, \quad z \in \overline{K(t)},$$

а множества Γ_1 и Γ_2 состоят из этой границы и дуг окружности $|z| = t$ (всюду выше берется положительное значение корня).

Доказательство в своей основной части слово в слово повторяет доказательство предыдущей теоремы. В заключительной части конденсатор $C(r; \mathbb{C}, \ \emptyset, \ \{T(-|a_1|), T(|a_2|)\}, \ \{-1, 1\}, \{r, r\})$ необходимо заменить на конденсатор $C(r; \mathbb{C} \setminus \Gamma, \Gamma, \{T(-|a_1|), T(|a_2|)\},. \{-1, 1\}, \{r, r\})$, где Γ – неотрицательная вещественная полуось. По формуле (7) работы [11] емкость последнего конденсатора равна

$$-\frac{4\pi}{\log r} - 2\pi$$
$$\times \left\{\log|16T(|a_2|)T(-|a_1|)| - 2\log\left|\frac{\sqrt{-T(|a_2|)} + \sqrt{-T(-|a_1|)}}{\sqrt{-T(|a_2|)} - \sqrt{-T(-|a_1|)}}\right|\right\}$$
$$\times \left(\frac{1}{\log r}\right)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0,$$

что ведет к неравенству (6). Случай равенства также рассматривается как при доказательстве теоремы 3 с той же заменой конденсатора.

Правая часть неравенства (6) строго меньше правой части (5). В этом можно убедиться непосредственно, но проще всего установить этот факт сравнением емкостей обсуждаемых выше конденсаторов, точнее вторых слагаемых в разложении этих емкостей (см. [15]).

Теорема 5. *Пусть точки* a_k, $k = 1, \dots, n$, $n \geqslant 2$, *принадлежат окружности* $|z| = \rho$, $0 < t < \rho < 1$; *области* D_k, $a_k \in D_k \subset K(t)$, $k = 1, \dots, n$, *односвязные и попарно непересекающиеся; и пусть замкнутые множества* Γ_k, $\Gamma_k \subset \partial D_k$, $k = 1, \dots, n$, *такие, что для каждого* k *множество* $(\partial D_k) \setminus \Gamma_k$ *либо пусто, либо представляет собой дугу окружности* $|z| = 1$, $k = 1, \dots, n$. *Тогда справедливо неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(D_k, \Gamma_k, a_k) \leqslant \prod_{k=1}^{n} r(D_k^*, \Gamma_k^*, a_k^*) = \left(\frac{4\,|1 + T_n\,(\rho^n)|}{n\rho^{n-1}\,|T_n'\,(\rho^n)|} \right)^n,$$

где $a_k^* = \rho \exp(2\pi i k/n)$, $D_k^* = \{z \in K(t) : |\arg z - 2\pi k/n| < \pi/n\}$, $\Gamma_k^* = \overline{\{z \in \partial D_k^* : |z| \neq 1\}}$, $k = 1, \dots, n$, *а функция* T_n *определяется как функция* T, *но с заменой параметра* t *на* t^n.

Доказательство основано на диссимметризации вещественнозначных функций [9, с. 35] и повторяет доказательство теоремы 8 работы [12] со следующими изменениями. Круг U необходимо заменить на кольцо $K(t)$; функция u^* равна единице на отрезках $[ta_k^*/|a_k^*|, (\rho - r)a_k^*/|a_k^*|]$ взамен $[0, (\rho - r)a_k^*/|a_k^*|]$, $k = 1, \dots, n$, и, наконец, новая функция $\zeta(z)$ имеет вид $\zeta(z) = T_n(z^n)$ и отображает область D_k^* на ζ-плоскость с разрезом вдоль луча $[T_n(1), +\infty]$, $k = 1, \dots, n$.

§2. Мебиусовы инварианты

Пусть B – открытое множество комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$, и пусть $A = \{a_k\}_{k=1}^n$ – совокупность различных точек множества B. В работах первого автора были введены и изучены различные модификации приведенного модуля $M(B, A, \Delta, \Psi)$ множества B относительно совокупности A и некоторых наборов параметров Δ и Ψ. Данный приведенный модуль является постоянным членом в асимптотическом разложении величины, обратной емкости обобщенного конденсатора. Если дополнение множества B имеет положительную гармоническую меру, то справедлива формула:

$$M(B, A) \equiv M(B, A, \{1, \dots, 1\}, \{r, \dots, r\})$$

$$= \frac{1}{2\pi n^2} \left\{ \sum_{k=1}^{n} \log r(B, a_k) + \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{l=1,\\ l \neq k}}^{n} g_B(a_k, a_l) \right\}, \tag{7}$$

где $r(B, a_k)$ означает внутренний радиус связной компоненты множества B, содержащей точку a_k, относительно этой точки, а $g_B(z,\zeta)$ – функция Грина связной компоненты B, содержащей точку ζ, с полюсом в этой точке. Как обычно полагаем $g_B(z,\zeta) = 0$ вне указанной компоненты (см. подробнее [10]). Всюду ниже молчаливо предполагается, что множество B обладает указанным выше свойством.

Рассмотрим следующие мебиусовы инварианты

$$I(B,A) = \frac{\exp\{2\pi n^2 M(B,A)\}}{\prod\limits_{1\leqslant k<l\leqslant n}{}^{'} |a_k - a_l|^{2/(n-1)}},$$

$$J(B,A) = \frac{\exp\{2\pi n^2 M(B,A)\}}{\prod\limits_{k=1}^{n}{}^{'} |a_k - a_{k+1}|}, \quad a_{n+1} = a_1, \quad n \geqslant 2,$$

где штрих у произведения означает, что если одна из точек a_k является ∞, то под соответствующим сомножителем понимается единица. При $n = 2$ и $n = 3$ данные величины совпадают. Факт инвариантности относительно группы дробно-линейных автоморфизмов комплексной сферы проверяется непосредственно с учетом формулы (7):

$$I(B, \{a_k\}_{k=1}^n) = I(\varphi(B), \{\varphi(a_k)\}_{k=1}^n)$$

и

$$J(B, \{a_k\}_{k=1}^n) = J(\varphi(B), \{\varphi(a_k)\}_{k=1}^n)$$

для любого мебиусова преобразования $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$. В случае, когда множество B является объединением попарно непересекающихся областей D_k, $a_k \in D_k$, $k = 1, \dots, n$, инвариант

$$I(B,A) = I_n \equiv \left(\prod_{k=1}^{n} r(D_k, a_k)\right) \prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}{}^{'} |a_k - a_l|^{2/(1-n)}$$

изучался многими авторами (см. обзоры [1, 9]). Заметим, что если хотя бы две области из совокупности $\{D_k\}_{k=1}^n$ пересекаются, то

$$I\left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k, A\right) > I_n.$$

Инвариант $J(B,A)$, $n \geqslant 4$, отличается от $I(B,A)$ на произведение степеней модулей ангармонических отношений точек из совокупности A, и ранее, по-видимому, не встречался.

Приведем сперва утверждение общего характера.

Теорема 6. *Для любого открытого множества $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ имеют место равенства*

$$\sup_{\substack{a_k \in B \subset G \\ k=1,\dots,n}} I(B, \{a_k\}_{k=1}^n) = \sup_{\substack{a_k \in B \subset \overline{\mathbb{C}} \\ k=1,\dots,n}} I(B, \{a_k\}_{k=1}^n),$$

$$\sup_{\substack{a_k \in B \subset G \\ k=1,\dots,n}} J(B, \{a_k\}_{k=1}^n) = \sup_{\substack{a_k \in B \subset \overline{\mathbb{C}} \\ k=1,\dots,n}} J(B, \{a_k\}_{k=1}^n).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что множество G содержит начало координат. Обозначим через α левую часть первого соотношения, а через β – его правую часть. По определению верхней грани $\alpha \leqslant \beta$. Пусть $\beta' < \beta$ и для некоторого открытого множества $B' \subset \overline{\mathbb{C}}$ и совокупности $A' = \{a'_k\}_{k=1}^n$, $a'_k \in B'$, $k = 1, \dots, n$, выполняется неравенство

$$\beta' < I(B', A').$$

Привлекая дробно-линейное отображение, можно считать, что множество B' не содержит бесконечно удаленную точку. Тогда каждое множество $G_j := \{z : z/j \in G\}$ начиная с некоторого номера j_0 содержит все точки $a'_k, k = 1, \dots, n$. Последовательность множеств $\{B' \cap G_j\}_{j \geqslant j_0}$ образует исчерпание множества B', т.е. $B' \cap G_j \subset B' \cap G_{j+1}$, $j \geqslant j_0$ и $\bigcup\limits_{j \geqslant j_0} (B' \cap G_j) = B'$. Поэтому $I(B' \cap G_j, A') \to I(B', A')$ при $j \to \infty$. Вновь по определению верхней грани

$$\alpha \geqslant I(B' \cap G_j, A') = I\left(\{z \in G : zj \in B'\}, \{a'_k/j\}_{k=1}^n\right), \quad j \geqslant j_0.$$

Отсюда

$$\beta' < \alpha \leqslant \beta.$$

Ввиду произвольности β' получаем требуемое равенство $\alpha = \beta$. Случай инварианта $J(B, A)$ рассматривается аналогично. Теорема доказана.

Таким образом, при изучении экстремальных разбиений со свободными полюсами с участием инвариантов $I(B, A)$ и $J(B, A)$ достаточно рассматривать множества B, лежащие во всей комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$.

Лемма. *Предположим, что открытое множество B имеет непустые пересечения с верхней и нижней полуплоскостями, а число точек совокупности $A = \{a_k\}_{k=1}^n$, $a_k \in B$, $k = 1, \ldots, n$, лежащих выше вещественной оси равно числу точек этой совокупности, расположенных ниже вещественной оси. Обозначим через B^+ объединение части множества B, лежащей в полуплоскости $\{z : \ \mathrm{Im}\ z \geqslant 0\}$ с ее отражением относительно вещественной оси, а через B^- объединение $B \cap \{z : \ \mathrm{Im}\ z \leqslant 0\}$ с его отражением. Пусть $A^+ = \{a_k^+\}_{k=1}^n$ означает совокупность всех точек из A, лежащих в $\{z : \ \mathrm{Im}\ z \geqslant 0\}$, и им симметричных в $\{z : \ \mathrm{Im}\ z < 0\}$, если таковые имеются, а $A^- = \{a_k^-\}_{k=1}^n$ – совокупность точек из A, в $\{z : \ \mathrm{Im}\ z \leqslant 0\}$, и им симметричных в $\{z : \ \mathrm{Im}\ z > 0\}$. Тогда справедливо неравенство*

$$I^2(B, A) \leqslant I(B^+, A^+) I(B^-, A^-).$$

Доказательство. Принцип симметрии (теорема 3 работы [16]) и принцип композиции (теорема 5 работы [16]) дают

$$2M(B, A) \leqslant M(B^+, A^+) + M(B^-, A^-). \tag{8}$$

Пусть теперь a_k и a_l - произвольная пара конечных точек из совокупности A, $1 \leqslant k, l \leqslant n$. Если для одной из них, пусть a_k, $\mathrm{Im}\ a_k \geqslant 0$, а для другой $\mathrm{Im}\ a_l > 0$, то существуют две точки $a_s^+ = a_k$ и $a_t^+ = a_l$ такие, что при некоторых i, j выполняется

$$|a_k - a_l|^2 = |a_s^+ - a_t^+||\overline{a}_s^+ - \overline{a}_t^+| = |a_s^+ - a_t^+||a_i^+ - a_j^+|, \quad t \neq j,$$

$1 \leqslant s, t \leqslant n$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Если $\mathrm{Im}\ a_k \leqslant 0$ и $\mathrm{Im}\ a_l < 0$, то аналогично найдутся $a_s^- = a_k$, $a_t^- = a_l$, i и j, что

$$|a_k - a_l|^2 = |a_s^- - a_t^-||a_i^- - a_j^-|, \quad t \neq j.$$

Если $\mathrm{Im}\ a_k = \mathrm{Im}\ a_l = 0$, то

$$|a_k - a_l|^2 = |a_s^+ - a_t^+||a_i^- - a_j^-|, \quad t \neq j$$

при некоторых s, t, i и j.

Наконец, если $\mathrm{Im}\ a_k > 0$ и $\mathrm{Im}\ a_l < 0$, то, как легко видеть,

$$|a_k - a_l|^2 \geqslant 4\ \mathrm{Im}\ a_k(-\mathrm{Im}\ a_l) = |a_s^+ - a_t^+||a_i^- - a_j^-|$$

при некоторых s, t, i и j. Учитывая все случаи, заключаем, что

$$\Big\{ \prod_{1\leqslant k<l\leqslant n}' |a_k - a_l|^{2/(n-1)} \Big\}^2 \geqslant \Big\{ \prod_{1\leqslant k<l\leqslant n} |a_k^+ - a_l^+|^{2/(n-1)} \Big\} \Big\{ \prod_{1\leqslant k<l\leqslant n} |a_k^- - a_l^-|^{2/(n-1)} \Big\}.$$

Сравнивая это неравенство с (8), приходим к требуемому неравенству. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные оценки сверху инвариантов $I(B,A)$ и $J(B,A)$ в тех частных случаях, когда применимы методы работ [8, 9]. Прежде всего заметим, что из теоремы 1 [8] вытекает следующий результат.

Теорема 7. *Если открытое множество B не содержит ни одной дуги окружности, соединяющей данные точки a_1 и a_2, $A = \{a_1, a_2\}$, то*

$$I(B,A) = J(B,A) \leqslant 1.$$

Равенство имеет место только в тех случаях, когда $B = \{z : |(z - a_1)/(z - a_2)| \neq c\}$, где c – произвольное положительное число.

В случае, когда множество B является объединением двух непересекающихся областей, теорема 7 совпадает с известной теоремой М.А. Лаврентьева. Аналогичные замечания к классическим оценкам можно сформулировать в случае трех и более точек совокупности A, однако они носят громоздкий характер. Мы остановимся на тех ситуациях, когда условия на точки A и на множество B более менее прозрачны. Условимся говорить, что открытое множество B *отделяет* точку $a_k \in A$ от точки $a_l \in A$, если указанные точки принадлежат различным связным компонентам множества B. Следующая теорема дополняет результат Г. В. Кузьминой об оценке инварианта I_4 [17] (см. также [1, с. 25]).

Теорема 8. *Пусть $A = \{a_k\}_{k=1}^4$ – совокупность различных точек комплексной сферы $\overline{\mathbb{C}}$, и пусть множество B отделяет точки a_1, a_2 от точек a_3 и a_4. Тогда*

$$I(B,A) \leqslant |(a_1, a_3, a_4, a_2)|^{8/3} |(a_3, a_4, a_1, a_2)|^{4/3}, \tag{9}$$

где $(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ *– ангармоническое отношение четырех точек. Равенство в* (9) *достигается в случае, когда множество* B *ограничено кривыми, заданными уравнением*

$$|(z-a_1)(z-a_2)| = |(z-a_3)(z-a_4)|. \tag{10}$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичный дифференциал

$$Q(z)dz^2 = \Big(\frac{1}{z-a_1}+\frac{1}{z-a_2}-\frac{1}{z-a_3}-\frac{1}{z-a_4}\Big)^2 dz^2.$$

Пусть γ – произвольная траектория, лежащая в полосообразной области этого дифференциала. При движении точки z вдоль кривой γ мнимая часть функции

$$F(z) = \int\limits_{z_0}^{z} [-Q(z)]^{1/2} dz$$

меняется от $-\infty$ до $+\infty$ (или от $+\infty$ до $-\infty$). Поэтому разным концам γ соответствуют разные точки a_k и, кроме того, точки a_1, a_2 (a_3, a_4) не могут являться концами одной и той же кривой γ. Следовательно, все траектории квадратичного дифференциала $Q(z)dz^2$, за исключением, быть может, конечного числа, не принадлежат множеству B. По теореме 2.16 работы [9] справедливо неравенство

$$\prod_{k=1}^{4} r(B,a_k) \leqslant \frac{|a_1-a_3|^2|a_1-a_4|^2|a_2-a_3|^2|a_2-a_4|^2}{|a_1-a_2|^2|a_3-a_4|^2}. \tag{11}$$

Доказательство этой теоремы опирается на оценки емкости некоторого конденсатора $C(\lambda, 0)$ сверху и снизу (см., также [8, с. 115]). Заменяя оценку сверху в этом доказательстве на асимптотическую формулу для емкости обобщенного конденсатора

$$C(r; B, A, \{1,1,1,1\}, \{r(B,a_k)r\}_{k=1}^4),$$

$r = e^{-\lambda}$, $\lambda \to +\infty$ (см.[10–11]), приходим к усилению неравенства (11), которое выражается заменой левой части на величину

$$\left(\prod_{k=1}^{4} r(B,a_k)\right) \exp\left\{2\left(g_B(a_1,a_2)+g_B(a_3,a_4)\right)\right\}.$$

Из выше сказанного заключем, что справедливо неравенство (9):

$$I(B,A) \leqslant \frac{(|a_1-a_3||a_1-a_4||a_2-a_3||a_2-a_4|)^{4/3}}{(|a_1-a_2||a_3-a_4|)^{8/3}}$$
$$= \left(\frac{|a_1-a_4||a_3-a_2|}{|a_1-a_2||a_3-a_4|}\right)^{8/3}\left(\frac{|a_1-a_3||a_2-a_4|}{|a_1-a_4||a_2-a_3|}\right)^{4/3}.$$

Далее, множество B, ограниченное кривыми (10), является открытым, причем точки a_1, a_2 и точки a_3, a_4 принадлежат разным связным компонентам этого множества. Легко видеть, что

$$g_B(z,a_1)+g_B(z,a_2) = -\log\left|\frac{(z-a_1)(z-a_2)}{(z-a_3)(z-a_4)}\right|,$$
$$g_B(z,a_3)+g_B(z,a_4) = \log\left|\frac{(z-a_1)(z-a_2)}{(z-a_3)(z-a_4)}\right|.$$

Отсюда выполняются равенства

$$\log r(B,a_1)+g_B(a_1,a_2) = \log\left|\frac{(a_1-a_3)(a_1-a_4)}{a_1-a_2}\right|,$$

$$\log r(B,a_2)+g_B(a_2,a_1) = \log\left|\frac{(a_2-a_3)(a_2-a_4)}{a_1-a_2}\right|,$$

и аналогичные равенства с заменой a_1 на a_3 и a_2 на a_4. Следовательно,

$$2\pi n^2 M(B,A) = \log\left|\frac{(a_1-a_3)^2(a_1-a_4)^2(a_2-a_3)^2(a_2-a_4)^2}{(a_1-a_2)^2(a_3-a_4)^2}\right|,$$

что приводит к равенству в (9). Теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть точки совокупности $A=\{a_k\}_{k=1}^4$ расположены на единичной окружности $|z|=1$ в положительном направлении обхода в порядке возрастания индекса, и пусть множество B отделяет точки a_1, a_3 от точек a_2 и a_4. Тогда справедливы неравенства*

$$I(B,A) \leqslant 4^{-4/3}, \quad J(B,A) \leqslant 1/4.$$

Равенство в каждом случае достигается при $a_k = \exp(i(\theta + \pi k/2))$, $k = 1, \dots, 4$ *и* $B = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \arg z^4 \neq 4\theta + \pi\}$, *где* θ *– произвольная вещественная постоянная.*

Доказательство. Ввиду симметрии и конформной инвариантности можно считать, что $a_1 = 1$, $a_2 = e^{i\varphi}$, $a_3 = -1$, $a_4 = -i$. Применяя теорему 8 (с другой нумерацией точек), приходим к неравенству

$$I(B, A) \leqslant 2^{-4/3} \left(\frac{\sin\varphi}{\sin\varphi + 1}\right)^{4/3} \leqslant 4^{-4/3}$$

с соответствующим утверждением и знаке равенства.

Далее, аналогичные соображения приводят ко второму неравенству:

$$\begin{aligned} &J(B, A) \\ &= \frac{I(B, A)(|a_1 - a_3||a_1 - a_2||a_1 - a_4||a_3 - a_2||a_3 - a_4||a_2 - a_4|)^{2/3}}{|a_1 - a_3||a_3 - a_2||a_2 - a_4||a_4 - a_1|} \\ &\qquad \leqslant \frac{|a_1 - a_3||a_1 - a_4||a_3 - a_2||a_2 - a_4|}{|a_1 - a_2|^2|a_3 - a_4|^2} = \frac{\sin\varphi}{2(\sin\varphi + 1)} \leqslant \frac{1}{4} \end{aligned}$$

(мы поменяли индексы у точек a_2 и a_3). Следствие доказано.

Ввиду неравенства Шура

$$\prod_{1 \leqslant k < l \leqslant 4} |a_k - a_l|^{2/3} \leqslant 4^{4/3}.$$

Поэтому первое неравенство следствия 2 является усилением теоремы Г. П. Бахтиной (см. теорему 2.17 работы [9] в случае $n = 4$ и комментарии к ней).

Теорема 9. *Пусть* $A = \{a_k\}_{k=1}^5$ *– совокупность различных точек сферы* $\overline{\mathbb{C}}$, *и пусть множество* B *является объединением попарно неналегающих областей* D_k, $a_k \in D_k$, $k = 1, \dots, 5$, *таких, что области* D_4 *и* D_5 *расположены по разные стороны от прямой или окружности, проходящей через точки* a_1, a_2 *и* a_3. *Тогда*

$$I(B, A) = I_5 \leqslant 4^{11/3} \cdot 3^{-3/4} \cdot 5^{-25/6}. \tag{12}$$

Равенство в (12) *имеет место в том случае, когда* $A = \{1, e^{-2\pi i/3}, 0, e^{2\pi i/3}, \infty\}$, *а областями* D_k, $k = 1, \dots, 5$, *служат круговые области квадратичного дифференциала*

$$Q(z)dz^2 = -\frac{z^6 + 7z^3 + 1}{z^2(z^3-1)^2}dz^2.$$

Каждая другая экстремальная конфигурация теоремы 9 *получается из указанной при дробно-линейном автоморфизме* $\overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Можно считать, что точки a_1, a_2 и a_3 расположены на вещественной прямой, и $\operatorname{Im} a_4 > 0, \operatorname{Im} a_5 < 0$. В обозначениях леммы имеем

$$I^2(B, A) \leqslant I(B^+, \{a_1, a_2, a_3, a_4, \overline{a_4}\})I(B^-, \{a_1, a_2, a_3, \overline{a_5}, a_5\}). \tag{13}$$

Ввиду условий теоремы 9 связные компоненты множества B^+, содержащие точки a_1, a_2, a_3, a_4 и $\overline{a_4}$, попарно не пересекаются, и связные компоненты множества B^-, содержащие точки a_1, a_2, a_3, $\overline{a_5}$ и a_5 также представляют собой попарно непересекающиеся области. Осталось воспользоваться теоремой статьи [18], согласно которой каждый множитель правой части (13) не превосходит правой части (12) с соответствующим утверждением и знаке равенства. Теорема доказана.

Оценка сверху инварианта I_5 без каких-либо ограничений на области D_k и точки $a_k, k = 1, \dots, 5$, является трудной и весьма увлекательной задачей [1, с. 25–26]. До настоящего времени решение этой задачи было получено только при дополнительном предположении, что совокупность точек $\{a_k\}_{k=1}^5$ симметрична относительно некоторой окружности или прямой. В этом случае также имеет место неравенство (12) с утверждением о знаке равенства как в теореме 9 (см. [18, 19]).

Теорема 10. *Пусть точки совокупности* $A = \{a_k\}_{k=1}^6$ *расположены на окружности* $|z| = 1$ *в положительном направлении обхода в порядке возрастания индекса, и пусть множество* B *отделяет точку* a_k *от точки* $a_{k+1}, k = 1, \dots, 6$ $(a_7 = a_1)$. *Тогда справедливо неравенство*

$$J(B, A) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^6. \tag{14}$$

Равенство в (14) достигается в случае, когда $A = \{\exp(i(\theta+\pi k/3))\}_{k=1}^{6}$ *и* $B = \{z \in \mathbb{C}\backslash\{0\} : \arg z^6 \neq 6\theta+\pi\}$, *где* θ *– произвольная вещественная постоянная.*

Доказательство. Так как $J(B,A)$ является мебиусовым инвариантом, то можно считать, что $a_1 = 1$, $a_2 = e^{i\varphi_1}$, $a_3 = e^{2\pi i/3}$, $a_4 = e^{2\pi i/3+i\varphi_2}$, $a_5 = e^{4\pi i/3}$, $a_6 = e^{4\pi i/3+i\varphi_3}$, где $\varphi_j, j = 1,2,3$ – некоторые числа из интервала $(0, 2\pi/3)$. В этом случае

$$\prod_{k=1}^{6} |a_k - a_{k+1}| = 2^6 \prod_{j=1}^{3} \sin\frac{\varphi_j}{2} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\varphi_j}{2}\right). \tag{15}$$

Рассмотрим конденсатор

$$C(r; B, A, \{1,\dots,1\}, \{r,\dots,r\}) \equiv (B, \{\partial B, E\}, \{0,1\}),$$

где множество E представляет собой объединение всех "почти кругов" с центрами в точках a_k, $k = 1,\dots,6$, достаточно малого радиуса $r > 0$ (см. [10], а также работы [11] и [12], в которых формулировки утверждений даны для связных компонент множества B). Из теоремы 1 [10] следует

$$\begin{aligned}&\operatorname{cap}(B, \{\partial B, E\}, \{0,1\})\\ &= 12\pi\Big(\frac{-1}{\log r}\Big) - (12\pi)^2 M(B,A)\Big(\frac{1}{\log r}\Big)^2 + o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r \to 0.\end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$D_j = \{z : 2\pi(j-1)/3 < \arg z < 2\pi j/3\}$,

$C_j = (B \cap D_j, \{\overline{(\partial B) \cap D_j}, E \cap \overline{D_j}\}, \{0,1\})$,

f_j – одна из ветвей функции $w = z^{3/2}$, отображающая область D_j на верхнюю полуплоскость,

$f_j(C_j)$ – образ конденсатора C_j при отображении f_j,

C_j^* – симметричный относительно вещественной оси конденсатор, "совпадающий" в $\operatorname{Im} > 0$ с конденсатором $f_j(C_j)$,

B_j^* – объединение множества $f_j(B \cap \overline{D_j})$ с его отражением относительно вещественной оси, $j = 1,2,3$.

Согласно принципу композиции (теорема 2 в работе [12]) и принципу симметрии (см. теорему 1 в [12]), примененному к каждой связной компоненте соответствующего множества, имеем последовательно

$$\operatorname{cap}(B,\{\partial B,E\},\{0,1\}) \geqslant \sum_{j=1}^{3} \operatorname{cap}\, C_j = \sum_{j=1}^{3} \operatorname{cap} f_j(C_j) = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \operatorname{cap}\, C_j^*.$$

Вновь по теореме 1 из [10]

$$\begin{aligned}\operatorname{cap}\, C_j^* &= 8\pi\left(\frac{-1}{\log r}\right)\\ &+ 2\pi\left[4\log\frac{3}{2} - 32\pi M(B_j^*,\{1,e^{3\varphi_j i/2},-1,e^{-3\varphi_j i/2}\})\right]\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\\ &+ o\left(\left(\frac{1}{\log r}\right)^2\right), \quad r\to 0, \quad j=1,2,3.\end{aligned}$$

Суммируя выписанные соотношения, приходим при $r\to 0$ к неравенству

$$\begin{aligned}&\exp\{2\pi 6^2 M(B,A)\}\\ &\leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^6 \prod_{j=1}^{3}\left(\exp\left\{2\pi 4^2 M(B_j^*,\{1,e^{3\varphi_j i/2},-1,e^{-3\varphi_j i/2}\})\right\}\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Ввиду условия теоремы множество B_j^* отделяет точки ± 1 от точек $e^{\pm 3\varphi_j i/2}$, $j=1,2,3$. Применяя второе неравенство следствия 2, заключаем, что

$$\begin{aligned}&\exp\{2\pi 6^2 M(B,A)\}\\ &\le \left(\frac{2}{3}\right)^6 \prod_{j=1}^{3}\left(\frac{1}{4}\left|1-e^{3\varphi_j i/2}\right|^2\left|1+e^{3\varphi_j i/2}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{2}{3}\right)^6\prod_{j=1}^{3}\sin\frac{3\varphi_j}{2}.\end{aligned}$$

С учетом равенства (15) получаем

$$J(B,A) \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^6 \prod_{j=1}^{3} \frac{\sin\frac{3\varphi_j}{2}}{\sin\frac{\varphi_j}{2}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\varphi_j}{2}\right)}. \tag{16}$$

Максимум произведения в правой части (16) равен кубу максимума функции

$$f(x) := \frac{\sin 3x}{\sin x \cdot \sin(\pi/3 - x)}$$

на промежутке $(0, \pi/3)$. Доопределим эту функцию в точках 0 и $\pi/3$ по непрерывности значением $2\sqrt{3}$. Ввиду симметрии функции f относительно $x = \pi/6$ достаточно рассмотреть ее на отрезке $[0, \pi/6]$. Легко видеть, что

$$(\log f)' = 3 \operatorname{ctg} 3x - \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg}(\pi/3 - x),$$

$$(\log f)'' = \frac{-9}{\sin^2 3x} + \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\sin^2(\pi/3 - x)}.$$

Покажем, что вторая производная меньше нуля на $[0, \pi/6]$. Складывая сперва первые два слагаемых в $(\log f)''$, а затем прибавляя третье, убеждаемся, что последний факт равносилен неравенству

$$(24 - 16\sin^2 x)(\sin^2(\pi/3 - x) + \sin^2 x) > 9.$$

Скобка слева не меньше 20 на $[0, \pi/6]$, а скобка справа $\geqslant \frac{1}{2}$. Таким образом, $(\log f)'' < 0$, и, следовательно, $(\log f)'$ убывает на отрезке $[0, \pi/6]$. Поскольку в точке $\pi/6$ $(\log f)' = 0$, то $(\log f)' \geqslant 0$ на $[0, \pi/6]$ и функция f возрастает на $[0, \pi/6]$. Осталось заметить, что $f(\pi/6) = 2^2$, и вместе с (16) это дает неравенство (14). Случай равенства проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* II. — Алгебра и анализ **9**, вып. 5 (1997), 1–50.
2. Г. В. Кузьмина, *Об одном экстремально-метрическом подходе к задачам об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 191–211.
3. Г. В. Кузьмина, *О симметричных конфигурациях в задачах об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **350** (2007), 160–172.
4. Е. Г. Емельянов, *О квадратичных дифференциалах в многосвязных областях, являющихся полными квадратами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 113–133.
5. Е. Г. Емельянов, *О квадратичных дифференциалах в многосвязных областях, являющихся полными квадратами.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **350** (2007), 40–51.
6. А. К. Бахтин, *Кусочно-разделяющее преобразование и экстремальные задачи со свободными полюсами.* — Докл. РАН **405**, No. 2 (2005), 151–153.

7. А. К. Бахтин, *Оценки некоторых функционалов для открытых множеств.* — Нелинейные уравнения **8**, No. 2 (2005), 147–153.
8. В. Н. Дубинин, *Метод симметризации в задачах о неналегающих областях.* — Мат. сб. **128**, No. 1 (1985), 110–123.
9. В.Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного*, Успехи мат. наук **49**, вып. 1 (1994), 3–76.
10. В. Н. Дубинин, *Приведенные модули открытых множеств в теории аналитических функций.* — Докл. РАН **363**, No 6 (1998), 731–734.
11. В. Н. Дубинин, *Обобщенные конденсаторы и асимптотика их емкостей при вырождении некоторых пластин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **302** (2003), 38–51.
12. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов, обобщения лемм Грётша и симметризация.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 73–100.
13. П. П. Куфарев, *К вопросу о конформных отображениях дополнительных областей.* — Докл. АН СССР **73** (1950), 881–884.
14. W. K.Hayman, *Multivalent functions.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1994.
15. Л. В. Ковалев, *Монотонность обобщенного приведенного модуля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 219–236.
16. В. Н. Дубинин, Н. В. Эйрих, *Обобщенный приведенный модуль.* — Дальневост. мат. ж. **3**, No. 2 (2002), 150–164.
17. Г. В. Кузьмина, *К задаче о максимуме призведения конформных радиусов неналегающих областей.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **100** (1980), 131–145.
18. В. Н. Дубинин, *О максимуме одного конформного инварианта.* Препринт ДВО АН СССР, Ин-т прикл. мат., Владивосток, 1990.
19. Г.В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **185** (1990), 72–95.

Dubinin V. N., Kirillova D. A. On extremal decomposition problems.

We adapt the capacity approach and symmetrization method to some extremal decomposition problems on the disk unit or an annulus. We consider the problems on the maximum product of the inner radii of pairwise disjoint domains and the maximum product of the Robin radii of such domains. The new invariants with respect to Möbius transformations of the Riemann sphere are introduced. In particular, for these invariants the problems on extremal decomposition with free poles on the unit circle are investigated.

Институт прикладной математики
ДВО РАН, Владивосток
E-mail: : dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 1 октября 2008 г.

Дальневосточная государственная
социально-гуманитарная академия, Биробиджан
E-mail: : dina_kir_03@mail.ru