Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

И. Н. Дёмшин, В. А. Шлык

ОБ ИНВАРИАНТНОСТИ КОМПАКТОВ, ПОРОЖДАЮЩИХ НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЬЦЕВЫЕ ОТКРЫТЫЕ МНОЖЕСТВА, ПРИ КВАЗИИЗОМЕТРИЯХ

Данная заметка продолжает исследования в [1]. А именно, вводятся p-нормальные кольцевые открытые множества (p-NROS), $1 < p < \infty$, и N_p-компакты, порождающие данные множества. Устанавливаются теоремы дробления и синтеза p-NROS и инвариантность N_p-компактов при квазиконформных отображениях ($p = n$) и квазиизометрических отображениях $f : G \to \mathbb{R}^n$ с соответствующей нормировкой.

§ 1. Основные определения и обозначения

Для множества F из n-мерного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ обозначим через $\overline{F}$ его замыкание в $\overline{\mathbb{R}}^n = \mathbb{R}^n \bigcup\{\infty\}$. Под кривой будем понимать образ невырожденного числового интервала при непрерывном его отображении в $\mathbb{R}^n$. Если Γ — семейство локально спрямляемых кривых γ, где γ содержится в открытом множестве $D \subset \mathbb{R}^n$, то через $\operatorname{adm}\Gamma = \operatorname{adm}(\Gamma, D)$ обозначим семейство всех борелевских функций $\rho : D \to [0, +\infty]$, для которых $\int\limits_\gamma \rho\, ds \geq 1$ для любых $\gamma \in \Gamma$.

Величину
$$m_p(\Gamma) = \inf_{\rho\in\operatorname{adm}\Gamma} \int\limits_D \rho^p\, dx$$
для $p \in (1 + \infty)$ назовём p-модулем семейства Γ. Борелевскую функцию $\rho_0 = \rho(x, \Gamma) : D \to [0, +\infty]$ назовём обобщённой экстремальной метрикой для Γ, если $\int\limits_D \rho_0^p\, dx = m_p(\Gamma)$ и существует семейство $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такое, что $m_p(\Gamma_0) = 0$ и $\int\limits_\gamma \rho_0\, ds \geq 1$ для всех $\gamma \in \Gamma \setminus \Gamma_0$.

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ–2810-2008.1) и РФФИ (грант 08-01-000 28) и ДВО РАН (грант 06-III-A-01-013).

Как обычно, $\mathcal{L}_n(\cdot)$ – n-мерная мера Лебега, $C^\infty(D)$ – класс бесконечно дифференцируемых функций в D $\big(C_0^\infty(D)$ – подкласс функций из $C^\infty(D)$ с компактным носителем в $D\big)$; $L_p^1(D)$ – пространство функций $u : D \to (-\infty, +\infty)$, локально интегрируемых в D и имеющих обобщённые частные производные, суммируемые в D со степенью p, с полунормой

$$\|u\| = \left(\int\limits_D |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Под конденсатором будем понимать тройку (F_0, F_1, D), где $F_0, F_1 \subset \overline{D}$ – непустые непересекающиеся компакты. Определим p-ёмкость конденсатора (F_0, F_1, D) как величину

$$C_p(F_0, F_1, D) = \inf \int\limits_D |\nabla u|^p \, dx,$$

где inf берётся по всем вещественнозначным функциям u таким, что

$$u\Big|_D \in C^\infty(D) \bigcap L_p^1(D),$$
$$u = j \quad \text{в некоторой окрестности компакта } F_j, \quad j = 0, 1.$$

Через $u_0 = u(x, F_0, F_1, D)$ обозначим экстремальную функцию для $C_p(F_0, F_1, D)$ (см. [1]).

Семейство всех локально спрямляемых кривых γ, $\gamma \subset D$, соединяющих F_0 и F_1, обозначим через $\Gamma(F_0, F_1, D)$, его p-модуль – через $m_p(F_0, F_1, D)$. Положим $\rho\big(x, \Gamma(F_0, F_1, D)\big) = \rho(x, F_0, F_1, D)$, $C(t) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = t\}$ для $t > 0$, $K(R) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $K(r, R) = \{x \in \mathbb{R}^n : r < |x| < R\}$, где $0 < r < R$.

Пусть l_a – луч, исходящий из точки $O = (0, \ldots, 0)$ и пересекающий окружность $C(1)$ в точке a. Обозначим через $\mathrm{Cone}_\alpha(l_a)$ внутренность прямого кругового конуса с вершиной в точке O, осью l_a и углом $\alpha \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ между образующей конуса и осью l_a.

Положим $\mathrm{Cone}_\alpha(l_a, r, R) = \mathrm{Cone}_\alpha(l_a) \bigcap K(r, R)$. Пусть E —компакт в $\mathbb{R}^n$ и $G(r, R) = K(r, R) \setminus E$, $E(r, R) = E \bigcap K(r, R)$, $\tilde{C}(t) = \partial G(r, R) \bigcap C(t)$ для $t > 0$.

Определение. *$G(r, R)$ назовём p-нормальным кольцевым открытым множеством (p-NROS), если*

$$m_p\big(C(r), C(R), K(r, R)\big) = m_p\big(\tilde{C}(r), \tilde{C}(R), G(r, R)\big).$$

Отметим, что если $G(r,R)$ — p-NROS, то $\tilde{C}(r)$, $\tilde{C}(R) \neq \varnothing$ и $\Gamma\big(\tilde{C}(r),\tilde{C}(R),G(r,R)\big) \neq \varnothing$. При этом, если $G(r,R)$ — область и ни одна из компонент связности множества $E(r,R)$ не соединяет $C(r)$ и $C(R)$, то $G(r,R)$ — p-нормальная кольцевая область с радиальными разрезами (см. [1]).

§2. Дробление и синтез p-NROS

Будем говорить, что множество $E(r,R)$ разбивает кольцо $K(r,R)$, если можно указать область $B \subset K(r,R)$, граница которой ∂B содержится в $E(r,R)\bigcup C(r)\bigcup C(R)$ и $B\bigcap\gamma = \varnothing$ для любых $\gamma \in \Gamma\big(\tilde{C}(r),\tilde{C}(R),G(r,R)\big)$. Ввиду того, что $\rho_0 = \rho\big(x, C(r), C(R), K(r,R)\big) > 0$ в $K(r,R)$ (см. [1, стр. 19, выражение (4)]) и $\rho_0 \in \operatorname{adm}\Gamma\big(\tilde{C}(r),\ \tilde{C}(R),\ G(r,R)\big)$, то, повторяя дословно рассуждения из доказательства теоремы 1 в [1], приходим к следующему результату.

Теорема 1. *Если множество $G(r,R)$ —p-NROS, то*

1. $\mathcal{L}_n\big(E(r,R)\big) = 0$;
2. *$E(r,R)$ не разбивает кольцо $K(r,R)$;*
3. *Через каждую точку $x_0 \in G(r,R)$ проходит некоторая кривая $\gamma \in \Gamma\big(\tilde{C}(r),\tilde{C}(R),G(r,R)\big)$;*
4. $\tilde{C}(r) = C(r)$, $\tilde{C}(R) = C(R)$.

Отметим, что равенства $\tilde{C}(r) = C(r)$, $\tilde{C}(R) = C(R)$ следуют из условия $\mathcal{L}_n\big(E(r,R)\big) = 0$.

Следствие 1. *Пусть $r < r_1 < R_1 < R$ и $G(r,R)$ – p-NROS. Тогда множество $\tilde{G}(r,R) = G(r,R)\bigcup K(r,r_1)\bigcup K(R_1,R)$ – p-нормальная кольцевая область с радиальными разрезами (см. [1]).*

Действительно, в силу утверждения 3) теоремы 1 $\tilde{G}(r,R)$ – область и по построению ни одна компонента связности множества $K(r,R)\setminus\tilde{G}(r,R)$ не соединяет $C(r)$, $C(R)$ и

$$\begin{aligned} m_p\big(C(r),C(R),K(r,R)\big) &\geq m_p\big(C(r),C(R),\tilde{G}(r,R)\big) \\ &\geq m_p\big(\tilde{C}(r),\tilde{C}(R),G(r,R)\big) = m_p\big(C(r),C(R),K(r,R)\big). \end{aligned}$$

Теорема 2. *Пусть для открытого множества $G(r,R)$ выполнено условие: $\mathcal{L}_n\big(E(r,R)\big) = 0$. $G(r,R)$ – p-NROS тогда и только тогда,* *когда любую функцию $f \in L^1_p\big(G(r,R)\big)$ можно продолжить до абсолютно непрерывной функции на $l_a \bigcap K(r,R)$ для всех $a \in C(1) \setminus C_1$, где площадь C_1 на $C(1)$ равна 0.*

Доказательство. Необходимость. Возьмём $j_0 \in \mathbb{N}$ таким, чтобы при $j \geq j_0$, $j \in \mathbb{N}$, выполнялись неравенства

$$r < r + \frac{1}{j} < R - \frac{1}{j} < R.$$

Введем функцию $\varphi \in C^\infty\big(K(r,R)\big)$, равную 1 на $K\big(r+\frac{1}{j}, R-\frac{1}{j}\big)$ и равную 0 на $K\big(r, r+\frac{1}{2j}\big) \bigcup K\big(R-\frac{1}{2j}, R\big)$. Если теперь $f \in L^1_p\big(G(r,R)\big)$, то

$$f \cdot \varphi \in L^1_p\Big(G(r,R) \bigcup K\big(r, r+\frac{1}{3j}\big) \bigcup K\big(R-\frac{1}{3j}, R\big)\Big).$$

По теореме 1 получим, что $G(r,R) \bigcup K\big(r, r+\frac{1}{2j}\big) \bigcup K\big(R-\frac{1}{2j}, R\big)$ — p-нормальная кольцевая область с радиальными разрезами (см. работу [1]). В силу теоремы 2 в [1], функция $f \cdot \varphi$ продолжается до абсолютно непрерывной функции на $l_a \bigcap K(r,R)$ для почти всех a (по площади на $C(1)$). Это даёт требуемую непрерывность функции $f = f \cdot \varphi$ на $K\big(r+\frac{1}{j}, R-\frac{1}{j}\big) \bigcap l_a$ для почти всех a. Отсюда, переходя к пределу при $j \to \infty$, устанавливаем необходимость условия теоремы 2.

Поскольку $\mathcal{L}_n\big(E(r,R)\big) = 0$, то $C(r) = \tilde{C}(r)$, $C(R) = \tilde{C}(R)$. Повторим теперь почти дословно рассуждения из доказательства достаточности условия теоремы 2 работы [1]. Они заключаются в том, что функция $\big|\nabla u\big(x, C(r), C(R), G(r,R)\big)\big|$ является обобщённой экстремальной метрикой для семейства $\Gamma = \big\{l_a \bigcap K(r,R), a \in C(1)\big\}$ в силу абсолютной непрерывности функции $u\big(x, C(r), C(R), G(r,R)\big)$ на почти всех γ из Γ. Таким путем установим справедливость теоремы 2.

Сформулированное функциональное свойство p-NROS с учётом приведённого выше доказательства теоремы 2 позволяет аналогичным образом получить ещё несколько результатов для p-NROS.

Следствие 2. *Пусть множество $G(r,R)$ – p-NROS. Тогда для $r < r_1 < R_1 < R$ множество $G(r_1,R_1)$ – p-NROS.*

Следствие 3. *Пусть множество $G(r,R)$ – p-NROS. Тогда для любого*

$\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *и любого луча* l_a, $a \in C(1)$,

$$m_p\Big(C(r) \bigcap \partial\big(\operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R)\big), C(R) \bigcap \partial\big(\operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R)\big),$$
$$\operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R)\Big) = m_p\Big(C(r) \bigcap \partial\big(\operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R)\big), C(R) \bigcap$$
$$\bigcap \partial\big(\operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R)\big), \operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R) \bigcap G(r, R)\Big). \quad (1)$$

Другими словами, при удалении множества $E(r, R)$ из $K(r, R) \bigcap \operatorname{Cone}_\alpha(l_\alpha, r, R)$ соответствующий p-модуль семейства кривых не изменяется. При этом множество $\operatorname{Cone}_\alpha(l_\alpha, r, R) \ \bigcap \ G(r, R)$ будем называть p-нормальной частью $p -$ NROS $G(r, R)$.

Следствие 4. *Пусть* $\mathcal{L}_n\big(E(r, R) \bigcap \operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R)\big) = 0$ *для* $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. *Равенство* (1) *имеет место тогда и только тогда, когда любую функцию* $f \in L_p^1\big(G(r, R) \bigcap \operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R)\big)$ *можно продолжить до абсолютно непрерывной функции на* $l_{a'} \bigcap \operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R)$ *для почти всех* $a' \in C(1)$ *(в смысле площади на* $C(1)$*), для которых* $l_{a'} \bigcap \operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R) \neq \varnothing$.

Следствие 5. *Пусть* $\mathcal{L}_n\big(E(r, R) \bigcap \operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R)\big) = 0$ *для* $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ *и выполняется равенство* (1). *Тогда* $E(r, R) \bigcap \operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R)$ *не разбивает* $\operatorname{Cone}_\alpha(l_a, r, R)$.

Следствие 6. *Пусть для каждой точки* $x_0 \in E(r, R)$ *можно указать кольцо* $K\big(r(x_0), R(x_0)\big)$ *такое, что* $r < r(x_0) < |x_0| < R(x_0) < R$ *и* $G\big(r(x_0), R(x_0)\big)$ – p-NROS. *Тогда* $G(r, R)$ – p-NROS.

Следствие 7. *Пусть для каждой точки* $x_0 \in E(r, R)$ *можно указать усечённый конус* $\operatorname{Cone}_{\alpha(x_0)}\big(l_a, r(x_0), R(x_0)\big)$ *такой, что* $0 < \alpha(x_0) < \frac{\pi}{2}$, $r < r(x_0) < |x_0| < R(x_0) < R$, $x_0 \in l_a$, *и справедливо равенство* (1) *(в котором* α, r, R *заменены соответственно на* $\alpha(x_0)$, $r(x_0)$, $R(x_0)$*). Тогда* $G(r, R)$ – p-NROS.

Заметим, что следствия 2, 3 показывают, что над p-NROS $G(r, R)$ можно осуществлять операцию дробления с помощью концентрических сфер и конических поверхностей на “нормальные” части. Наоборот, следствия 6 и 7 показывают, что из “нормальных” частей, образованных упомянутым выше способом, можно синтезировать p-NROS $G(r, R)$. Естественно, что вместо конических поверхностей можно использовать $(n - 1)$-мерные гиперплоскости, проходящие через точку $O = (0, \ldots, 0)$.

Также заметим, что если множество $G(r,R)$ – p-NROS и функция $u \in L^1_p\big(G(r.R)\big)$, то с учётом того условия, что $\int\limits_{\gamma} |\nabla u|\, dt < \infty$ для $\gamma \in \{l_a \bigcap G(r,R) : a \in C(1), l_a \bigcap G(r,R) \neq \varnothing\}$ для почти всех $a \in C(1)$, будем иметь продолжение функции u до абсолютно непрерывной функции в действительности на множестве $\overline{l_a \bigcap G(r,R)}$ для почти всех a из $C(1)$. Это замечание справедливо и для “нормальных” частей в следствии 4.

§3. N_p-компакты и задача об их инвариантности при квазиконформных и квазиизометрических отображениях

Определение. *Компакт E назовём N_p-компактом, если можно указать кольцо $K(r,R)$, $E \subset K(r,R)$, $0 < r < R$, такое, что множество $G(r,R) = K(r,R) \setminus E$ – p-NROS.*

Из приведённых выше следствий теоремы 2 сразу вытекает, что для любых $0 < r_1 < R_1$ множество $G(r_1,R_1)$ – p-NROS, $\mathcal{L}_n(E) = 0$.

Ниже рассматривается задача об инвариантности N_p-компакта E, расположенного в области $G \subset \mathbb{R}^n$, при отображении $f : G \to \mathbb{R}^n$, квазиконформном при $p = n$ или квазиизометрическим с приводимой ниже нормировкой. Для каждого $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ и l_a, $a \in C(1)$, $l_a \bigcap G \neq \emptyset$, точку $x \in G \bigcap \mathrm{Cone}_\alpha(l_a)$ и $y = f(x)$ можно записать в сферических координатах (см. [1, с. 22]) соответственно следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x = (t, \theta_1, \dots, \theta_n), \text{ где } |x| = t;\\
&y = (f_1, f_2, \dots, f_n), \quad f_1 = |y| \quad \text{и}\\
&f_1 = f(t, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}),\\
&f_k = f_k(\theta_1, \dots, \theta_{n-1}), \quad k = 2, \dots, n.
\end{aligned}$$

Теорема 3. *Если E – N_p-компакт, то $f(E)$ – N_p-компакт.*

Доказательство проведём для случая, когда $p = n$ и f – квазиконформное отображение. В остальных случаях оно проводится аналогично (по поводу определения квазиконформных и квазиизометрических отображений см., например, [2,3]).

Из нормировки отображения f сразу следует, что каждый прямолинейный отрезок $e \subset G$, $e \subset l_a$, переходит при отображении f в отрезок $f(e)$, расположенный на некотором луче $l_{\tilde a}$. В силу гомеоморфности f справедливо и обратное утверждение. Возьмём теперь какую-нибудь точку $y_0 = f(x_0)$, $x_0 \in E$, и выберем

$$\Pi_1 = \mathrm{Cone}_{\alpha_1}(l_{a_1}, r_1, R_1), \quad \Pi_2 = \mathrm{Cone}_{\alpha_2}(l_{a_2}, r_2, R_2),$$
$$\Pi_3 = \mathrm{Cone}_{\alpha_3}(l_{a_3}, r_3, R_3) \subset G$$

так, чтобы выполнялись условия

$$\overline{\Pi}_1, \overline{\Pi}_2 \subset f(G), \quad \overline{\Pi}_1 \subset \Pi_2, \quad x_0 \in l_{a_3},$$
$$y_0 \in l_{a_2} \bigcap \Pi_2, \quad f^{-1}(\Pi_1) \subset \Pi_3, \quad \overline{\Pi}_3 \subset f^{-1}(\Pi_2).$$

Зададим некоторую функцию $u \in L^1_n\big(\Pi_2 \setminus f(E)\big)$ и положим

$$\Gamma_j = \{\overline{l_a \bigcap \Pi_j} : a \in C(1), l_a \bigcap \Pi_j \neq \emptyset\}, \quad j = 1, 2.$$

Очевидно, по определению Γ_j каждому семейству $\tilde{\Gamma} \subset \Gamma_j$ n-модуля нуль соответствует множество $\tilde{A}$ точек $a \in C(1)$ площади нуль на $C(1)$, и наоборот.

Пусть $T_1 = f^{-1}(\Gamma_1)$ и T — совокупность всех отрезков из семейства $\{l_a \bigcap \overline{\Pi}_3 : a \in C(1)\}, l_a \bigcap \Pi_3 \neq \varnothing$, на каждом из которых либо $u \cdot f$ не продолжается до абсолютно непрерывной функции, либо функция f_1 из определения f не является таковой функцией, либо $\mathcal{L}_1\big((l_a \bigcap \Pi_3) \bigcap E\big) > 0$. Поскольку $u \cdot f \in L^1_n\big(f^{-1}(\Pi_2) \setminus E\big)$ (см. [2, с. 237]), то $m_n(T) = 0$. Учитывая квазиконформность функции f, получим также равенства $m_n\big(f(T)\big) = 0$, $\mathcal{L}_n\big(f(E)\big) = 0$ и площадь $\{a \in C(1) : l_a \bigcap f(\overline{\Pi}_3) \subset f(T)\}$ на $C(1)$ равна 0. Заметим теперь, что в силу квазиконформности функции f её координатная функция f_1 монотонна и абсолютно непрерывна на каждом отрезке из семейства $T_1 \setminus \{\gamma \bigcap f^{-1}(\overline{\Pi}_1) : \gamma \in T\}$ и на каждом из них $u \cdot f$ представляется с точностью до постоянной интегралом Лебега от $\frac{\partial u}{\partial f_1} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_1}$ с переменным верхним пределом. Тогда в этом интеграле Лебега можно осуществить замену переменной x_1 на f_1. Стало быть, функция u продолжается до абсолютно непрерывной функции (или является таковой) на почти всех отрезках из Γ_1.

Учитывая произвол в выборе $\overline{\Pi}_1 \subset \Pi_2$ и рассуждения из доказательства теоремы 2, получим, что функция u абсолютно непрерывна на почти всех отрезках из Γ_2. Наконец, чтобы завершить доказательство теоремы 3, используем произвол в выборе $y_0 \in f(E)$ и применим следствие 4 и следствие 7.

Отметим, что задачу об инвариантности компакта, порождающего прямоугольные нормальные области в случае $p = n = 2$ и линейного квазиконформного отображения $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ рассматривали К. Ойкава и Л. Сарио [4], для квазиконформных отображений $f : G \to \mathbb{R}^2$ с дополнительными ограничениями на частные производные координатных функций отображения f эту задачу исследовал М. Сакаи [5].

В заключение приведём опечатки в работе [1], допущенные по вине авторов. На стр. 18 в определении $C_p(F_0, F_1, D)$ нужно положить $j = 0, 1$ (вместо 1,2); формулу (3) на стр. 19 нужно заменить на

$$\rho(x, F_0, F_1, D) = \left|\nabla u(x, F_0, F_1, D)\right|.$$

В формулировке теоремы 2 вместо $L_n^1\big(G(r, R)\big)$ должно быть $L_p^1\big(G(r, R)\big)$.

Наконец, в примере в конце статьи [1] фразу "учитывая, что точки из $\mathrm{Cone}_{\frac{\pi}{2}}(2, 3)$ достижимы из $G(1, 3)$" нужно заменить на "учитывая, что точки из $\mathrm{Cone}_{\frac{\pi}{2}}(2, 3)$ недостижимы из $G(1, 3)$ за исключением точек из $\mathrm{Cone}_{\frac{\pi}{2}}(2, 3) \bigcap C(2)$"; фразу "$G(1, 3)$ – p-нормальная область в $\mathbb{R}^3$ для всех $p \in (1, +\infty)$" нужно заменить фразой "$G(1, 3)$ – 2-нормальная область в $\mathbb{R}^3$".

Литература

1. И. Н. Демшин, В. А. Шлык, *Метрические характеристики пространственных кольцевых областей с радиальными разрезами, нормальных в смысле Грётша.* — Зап. научн. семин. ПОМИ 350 (2007), 17–25.
2. В. М. Гольдштейн, Ю. Г. Решетняк, *Введение в теорию функций с обобщёнными производными и квазиконформные отображения.* М., 1983.
3. А. В. Сычёв, *Модули и пространственные квазиконформные отображения.* Новосибирск, 1983.
4. K. Oikawa, L. Sario, *Capacity functions.* Springer, Berlin, 1969.
5. M. Sakai, *On extremal sets of parallel slits.* — Hiroshima Math. J. **5**, No 3 (1975), 494–516.

Demshin I. N., Shlyk V. A. On the invariance of compacts generating normal ring open sets under quasiisometries.

The problem of breakage and synthesis of normal ring open sets is considered. The invariance of compacts generating these sets by quasiisometries and quasiconformal mappings is established under certain natural assumptions.

Дальневосточный
государственный университет,
Владивосток

Поступило 8 июля 2008 г.

E-mail: yurakl@imcs.dvgu.ru, shlyknv@yandex.ru