Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

Е. Г. Голузина

ОБ ОДНОЙ ТЕОРЕМЕ ИСКАЖЕНИЯ ДЛЯ ТИПИЧНО ВЕЩЕСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Введение

Пусть A – множество всех функций $f(z)$, регулярных в круге $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ и нормированных условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Пусть T – класс функций $f(z) \in A$, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im} f(z) > 0 \quad \text{при} \quad \operatorname{Im} z \neq 0.$$

Класс T – хорошо известный класс типично вещественных функций.

Пусть $f(z) \in A$, тогда

$$f(z) \in T \Leftrightarrow f(z) = \int\limits_{-1}^{1} k_t(z) d\alpha(t), \quad \alpha(t) \in M_1, \tag{1}$$

где $k_t(z) = z(1 - 2tz + z^2)^{-1}$, M_1 – класс функций $\alpha(t)$, неубывающих на отрезке $[-1, 1]$ и удовлетворяющих условию $\int\limits_{-1}^{1} d\alpha(t) = 1$.

Интегральное представление (1) было получено М. Робертсоном [1] и Г. М. Голузиным [2]. В [3] были выведены вариационные формулы для класса T. Эти результаты привели к решению задач типа теорем искажения в классе T и положили начало систематическому исследованию этого класса.

В последующем, экстремальным задачам в классе T был посвящен ряд работ, использовавших те или иные подходы и различных по содержанию и по степени общности.

Ряд результатов в классе T был получен при помощи общего подхода, разработанного в работе трех авторов [4]. В работе [4] результаты Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна были применены к задаче о системе значений функции и ее производных в классе регулярных в круге функций, представимых интегралом Стилтьеса.

Аналогичные задачи в классе T были решены автором. В частности, были найдены множества значений систем $\{f(z_0), f'(z_0)\}$ [6] и $\{f(z_0), f'(z_0), f(r)\}$ [7].

В настоящей работе исследована система

$$I(f) = \{f(z_0), f'(z_0), f(r_1), f(r_2), \dots, f(r_n)\}, \quad n \geqslant 2, \tag{2}$$

на классе T и найдено множество значений $f'(z_0)$ в классе функций из T с фиксированными значениями $f(z_0)$ и $f(r_j)$ ($z_0 \in U$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, $0 < r_j < 1$, $j = 1, 2, \dots, n$). Здесь дана алгебраическая характеристика множества значений $I(f)$ в терминах неотрицательных эрмитовых форм и описаны его граничные функции. При этом использован критерий разрешимости степенной проблемы моментов (см. [5, 8]).

§1

Обозначим через D множество значений системы (2) в классе T. Пусть

$$\zeta(z) = z + \frac{1}{z}, \quad \zeta_0 = \zeta(z_0), \quad w_0 = x_0 + iy_0 = f(z_0), \quad x_0, y_0 \in \mathbb{R},$$
$$x_{n+1} + iy_{n+1} = f'(z_0), \quad w_0' = -f'(z_0)/\zeta'(z_0), \quad x_{n+1}, y_{n+1} \in \mathbb{R},$$
$$\rho_j = \zeta(r_j), \quad x_j = f(r_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Введем далее следующие обозначения. Для $n = 2N$ положим

$$g_j = \prod_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^{n} (\rho_{j'} - \rho_j)^{-1}, \quad c = \prod_{j=1}^{n} (\rho_j - \zeta_0)^{-1},$$

$$h_j = (4 - \rho_j^2) g_j, \quad d = (4 - \zeta_0^2) c, \quad j = 1, 2, \dots, n;$$

$$a_{kl} = \sum_{j=1}^{n} g_j \rho_j^{k+l} x_j, \quad k, l = 0, 1, \dots, N, \quad k + l \neq 2N;$$

$$a_{NN} = \sum_{j=1}^{n} g_j \rho_j^{2N} x_j + 1;$$

$$a_{k(N+1)}=\sum_{j=1}^{n}g_j\rho_j^k\frac{x_j}{\zeta_0-\rho_j}+c\zeta_0^k w_0,$$
$$a_{(N+1)k}=\bar a_{k(N+1)}$$
$$a_{k(N+2)}=\bar a_{k(N+1)},\quad a_{(N+2)k}=\bar a_{k(N+2)},\quad k=0,1,\dots,N;$$

$$\begin{gathered}a_{(N+1)(N+1)}=a_{(N+2)(N+2)}=\sum_{j=1}^{n}g_j\frac{x_j}{|\zeta_0-\rho_j|^2}+2\operatorname{Re}\left[\frac{cw_0}{\bar\zeta_0-\zeta_0}\right],\\ a_{(N+1)(N+2)}=\sum_{j=1}^{n}g_j\frac{x_j-\overline{w}_0}{(\bar\zeta_0-\rho_j)^2}+\overline{cw_0'},\\ a_{(N+2)(N+1)}=\bar a_{(N+1)(N+2)};\end{gathered}\tag{3}$$

$$b_{kl}=\sum_{j=1}^{n}h_j\rho_j^{k+l}x_j,\quad k,l=0,1,\dots,N-1,\quad k+l\neq 2N-2;$$

$$b_{(N-1)(N-1)}=\sum_{j=1}^{n}h_j\rho_j^{2N-2}x_j-1;$$

$$b_{kN}=\sum_{j=1}^{n}h_j\rho_j^k\frac{x_j}{\zeta_0-\rho_j}+d\zeta_0^k w_0,\quad b_{Nk}=\bar b_{kN},$$
$$b_{k(N+1)}=\bar b_{kN},\quad b_{(N+1)k}=\bar b_{k(N+1)},\quad k=0,1,\dots,N-1;$$
$$\begin{gathered}b_{NN}=b_{(N+1)(N+1)}=\sum_{j=1}^{n}h_j\frac{x_j}{|\zeta_0-\rho_j|^2}+2\operatorname{Re}\left[\frac{dw_0}{\bar\zeta_0-\zeta_0}\right],\\ b_{N(N+1)}=\sum_{j=1}^{n}h_j\frac{x_j-\overline{w}_0}{(\bar\zeta_0-\rho_j)^2}+\overline{dw_0'},\\ b_{(N+1)N}=\bar b_{N(N+1)}.\end{gathered}\tag{4}$$

Для $n=2N+1$ положим

$$\varepsilon=\pm1,\quad h_j^{(\varepsilon)}=(2+\varepsilon\rho_j)\prod_{\substack{j'=1\\ j'\neq j}}^{n}(\rho_{j'}-\rho_j)^{-1},\quad j=1,2,\dots,n,$$

$$d^{(\varepsilon)}=(2+\varepsilon\zeta_0)\prod_{j=1}^{n}(\rho_j-\zeta_0)^{-1};$$

$$a_{kl}^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \rho_j^{k+l} x_j, \quad k, l = 0, 1, \dots, N, \quad k + l \neq 2N;$$

$$a_{NN}^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \rho_j^{2N} x_j - \varepsilon;$$

$$a_{k(N+1)}^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \rho_j^{k} \frac{x_j}{\zeta_0 - \rho_j} + d^{(\varepsilon)} \zeta_0^k w_0,$$

$$a_{(N+1)k}^{(\varepsilon)} = \overline{a}_{k(N+1)}^{(\varepsilon)},$$

$$a_{k(N+2)}^{(\varepsilon)} = \overline{a}_{k(N+1)}^{(\varepsilon)}, \quad a_{N+2)k}^{(\varepsilon)} = \overline{a}_{k(N+2)}^{(\varepsilon)}, \ k = 0, 1, \dots, N;$$

$$a_{(N+1)(N+1)}^{(\varepsilon)} = a_{(N+2)(N+2)}^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \frac{x_j}{|\zeta_0 - \rho_j|^2} + 2 \operatorname{Re} \left[\frac{d^{(\varepsilon)} w_0}{\bar{\zeta}_0 - \zeta_0} \right],$$

$$a_{(N+1)(N+2)}^{(\varepsilon)} = \sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \frac{x_j - \overline{w}_0}{(\bar{\zeta}_0 - \rho_j)^2} + \overline{d^{(\varepsilon)} w_0'}, \tag{5}$$

$$a_{(N+2)(N+1)}^{(\varepsilon)} = \overline{a}_{(N+1)(N+2)}^{(\varepsilon)}.$$

При введенных выше обозначениях имеет место

Теорема 1. 1. *Множество значений D системы $I(f)$ совпадает с множеством всех точек*

$$X = X(x_0, y_0, x_1, x_2, \dots x_n, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+4}, \tag{6}$$

в которых неотрицательны все главные миноры матриц A и B, где

$$A = (a_{kl})_0^{N+2}, \quad B = (b_{kl})_0^{N+1}, \quad \textit{если} \quad n = 2N,$$
$$A = (a_{kl}^{(1)})_0^{N+2}, \quad B = (a_{kl}^{(-1)})_0^{N+2}, \quad \textit{если} \quad n = 2N + 1.$$

2. *Для того, чтобы некоторая точка (6) была внутренней точкой множества D, необходимо и достаточно, чтобы при $n = 2N$ выполнялись неравенства*

$$\det[(a_{kl})_0^{N'}] > 0, \quad \det[(b_{kl})_0^{N''}] > 0,$$

$$N' = 0, 1, \ldots, N+2, \quad N'' = 0, 1, \ldots, N+1,$$

а при $n = 2N+1$ *– неравенства*

$$\det[(a_{kl}^{(\varepsilon)})_0^{N'}] > 0, \quad N' = 0, 1, \ldots, N+2, \quad \varepsilon = \pm 1.$$

3. *Каждой точке* $X \in \partial D$ *соответствует только одна функция класса* T, *и она имеет вид*

$$f_X(z) = \sum_{l=1}^{N+3} \lambda_l k_{t_l}(z), \tag{7}$$

где $\lambda_l \geqslant 0$, $\sum\limits_{l=1}^{N+3} \lambda_l = 1$, $t_j \neq t_{j'}$ *при* $j \neq j'$, *и если* $n = 2N$, *то*

или $-1 < t_l < 1, \quad l = 1, 2, \ldots, N+2, \quad \lambda_{N+3} = 0,$

или $t_1 = 1, \quad t_2 = -1, \quad -1 < t_l < 1, \quad l = 3, 4, \ldots, N+3,$ *а если* $n = 2N+1$, *то*

$$t_1 = \pm 1, \quad -1 < t_l < 1, \quad l = 2, 3, \ldots, N+3.$$

§2

Введем следующие обозначения.

В случае $n = 2N$

$$A = (a_{kl})_0^{N+2}, \quad A_{N+1} = (a_{kl})_0^{N+1}, \quad A_N = (a_{kl})_0^{N},$$

$$A_{N+1}^{(0)} = \begin{pmatrix} & a_{0(N+1)} \\ A_N & \vdots \\ & a_{N(N+1)} \\ a_{(N+2)0} \ldots a_{(N+2)N} & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = (b_{kl})_0^{N+1}, \ B_N = (b_{kl})_0^{N}, \ B_{N-1} = (b_{kl})_0^{N-1},$$

$$B_N^{(0)} = \begin{pmatrix} & b_{0N} \\ B_{N-1} & \vdots \\ & b_{(N-1)N} \\ b_{(N+1)0} \ldots b_{(N+1)(N-1)} & 0 \end{pmatrix}.$$

В случае $2N+1$

$$A^{(\varepsilon)}=(a_{kl}^{(\varepsilon)})_0^{N+2},\quad A_{N+1}^{(\varepsilon)}=(a_{kl}^{(\varepsilon)})_0^{N+1},\quad A_N^{(\varepsilon)}=(a_{kl}^{(\varepsilon)})_0^{N},$$

$$\widetilde{A}_{N+1}^{(\varepsilon)}=\begin{pmatrix} & a_{0(N+1)}^{(\varepsilon)}\\ A_N^{(\varepsilon)} & \vdots\\ & a_{N(N+1)}^{(\varepsilon)}\\ a_{(N+2)0}^{(\varepsilon)}\dots a_{(N+2)N}^{(\varepsilon)} & 0\end{pmatrix},\quad \varepsilon=\pm1.$$

Пусть

$$T_n(z_0)=\{f(z)\in T: f(r_j)=x_j,\quad f(z_0)=w_0,\quad j=1,2,\dots,n\},$$

где $\{x_j\}_1^n$ и w_0 – заданные числа такие, что выполняются неравенства

$$\det[(a_{kl})_0^{N'}]>0,\quad N'=0,1,\dots,N+1,$$

$$\det[(b_{kl})_0^{N''}]>0,\quad N''=0,1,\dots,N,$$

если $n=2N$, и неравенства

$$\det[(a_{kl}^{(\varepsilon)})_0^{N'}]>0,\quad N'=0,1,\dots,N+1,\quad \varepsilon=-1,1,$$

если $n=2N+1$.

Пусть $D'_{1,n}$ – множество значений $f'(z_0)$ на классе $T_n(z_0)$ ($n\geqslant 2$).

При введенных выше обозначениях имеет место

Следствие 1. *Если $n=2N$, то*

$$D'_{1,n}=\{w\in\mathbb{C}: |w-O_j|\leqslant R_j,\ j=1,2\},\tag{8}$$

где

$$O_1=\zeta'(z_0)\prod_{j=1}^n(\rho_j-\zeta_0)\Big[\sum_{j=1}^n g_j\frac{x_j-w_0}{(\zeta_0-\rho_j)^2}+\frac{\det A_{N+1}^{(0)}}{\det A_N}\Big],$$

$$R_1=\Big|\zeta'(z_0)\prod_{j=1}^n(\rho_j-\zeta_0)\Big|\frac{\det A_{N+1}}{\det A_N},$$

$$O_2=\frac{\zeta'(z_0)}{4-\zeta_0^2}\prod_{j=1}^n(\rho_j-\zeta_0)\Big[\sum_{j=1}^n h_j\frac{x_j-w_0}{(\zeta_0-\rho_j)^2}+\frac{\det B_N^{(0)}}{\det B_{N-1}}\Big],$$

$$R_2=\Big|\frac{\zeta'(z_0)}{4-\zeta_0^2}\prod_{j=1}^n(\rho_j-\zeta_0)\Big|\frac{\det B_N}{\det B_{N-1}}.$$

Если $n = 2N + 1$, *то*

$$D'_{1,n} = \{w \in \mathbb{C} : |w - O^{(\varepsilon)}| \leqslant R^{(\varepsilon)}, \quad \varepsilon = \pm 1\}, \tag{9}$$

где

$$O^{(\varepsilon)} = \frac{\zeta'(z_0)}{2+\varepsilon\zeta_0} \cdot \prod_{j=1}^{n}(\rho_j - \zeta_0)\left[\sum_{j=1}^{n} h_j^{(\varepsilon)} \frac{x_0 - w_0}{(\zeta_0 - \rho_j)^2} + \frac{\det \widetilde{A}_{N+1}^{(\varepsilon)}}{\det A_N^{(\varepsilon)}}\right],$$

$$R^{(\varepsilon)} = \left|\frac{\zeta'(z_0)}{2+\varepsilon\zeta_0} \cdot \prod_{j=1}^{n}(\rho_j - \zeta_0)\right| \frac{\det A_{N+1}^{(\varepsilon)}}{\det A_N^{(\varepsilon)}}.$$

§3. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Используя представление (1), получим для системы $I(f)$ следующее интегральное представление

$$\begin{gathered} f(z_0) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\zeta_0 - 2t}, \quad f'(z_0) = \int_{-1}^{1} \frac{-\zeta'(z_0)}{(\zeta_0 - 2t)^2} d\alpha(t), \\ f(r_j) = \int_{-1}^{1} \frac{d\alpha(t)}{\rho_j - 2t}, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad \alpha(t) \in M_1. \end{gathered} \tag{10}$$

Нетрудно видеть, что D – замкнутое выпуклое ограниченное множество в $\mathbb{R}^{n+4}$.

Определим неотрицательную на отрезке $[-1, 1]$ функцию $\varphi(t)$:

$$\varphi(t) \equiv \operatorname{Re}\left[\delta_0 + \sum_{j=1}^{n} \frac{\delta_j}{\rho_j - 2t} + \frac{\delta_{n+1}}{\zeta_0 - 2t} + \frac{\delta_{n+2}}{(\zeta_0 - 2t)^2}\right]$$

где $\delta_0 \neq 0$, $\{\delta_j\}_0^{n+2}$ – некоторые комплексные числа.

Представим $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = \frac{A_{n+4}(t)}{|\zeta_0 - 2t|^4 \prod\limits_{j=1}^{n}(\rho_j - 2t)}. \tag{11}$$

Здесь $A_{n+4}(t)$ – алгебраический многочлен от t степени $(n+4)$, неотрицательный на отрезке $[-1,1]$. По теореме Маркова–Лукача для $A_{n+4}(t)$ имеем представления

$$A_{n+4}(t)=\begin{cases}\Big(\sum\limits_{k=0}^{N+2}\beta_k t^k\Big)^2+(1-t^2)\Big(\sum\limits_{k=0}^{N+1}\gamma_k t^k\Big)^2 \text{ при } n=2N,\\ (1-t)\Big(\sum\limits_{k=0}^{N+2}\beta_k t^k\Big)^2+(1+t)\Big(\sum\limits_{k=0}^{N+2}\gamma_k t^k\Big)^2 \text{ при } n=2N+1.\end{cases} \tag{12}$$

(см. [8, с. 89]).

Рассмотрим случай $n=2N$.

Подставим (12) в (11) и запишем функцию $\varphi(t)$ следующим образом:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\rho_j-2t)}\Bigg[\Big|\sum_{k=0}^{N}\xi_k t^k+\frac{\xi_{N+1}}{\zeta_0-2t}+\frac{\xi_{N+2}}{\overline{\zeta}_0-2t}\Big|^2$$

$$+(1-t^2)\Big|\sum_{k=0}^{N-1}\eta_k t^k+\frac{\eta_N}{\zeta_0-2t}+\frac{\eta_{N+1}}{\overline{\zeta}_0-2t}\Big|^2\Bigg]$$

$$=\sum_{k,l=0}^{N}\overline{\xi}_k\xi_l\Big[\sum_{j=0}^{n}g_j\Big(\frac{\rho_j}{2}\Big)^{k+l}\frac{1}{\rho_j-2t}+g_{kl}\Big]$$

$$+\sum_{k=0}^{N}\Big(\overline{\xi}_k\xi_{N+1}+\xi_k\overline{\xi}_{N+2}\Big)\Big[\sum_{j=1}^{n}g_j\Big(\frac{\rho_j}{2}\Big)^k\frac{1}{\zeta_0-\rho_j}\cdot\frac{1}{\rho_j-2t}+\Big(\frac{\zeta_0}{2}\Big)^k\frac{c}{\zeta_0-2t}\Big]$$

$$+\Big(|\xi_{N+1}|^2+|\xi_{N+2}|^2\Big)\Big[\sum_{j=1}^{n}\frac{g_j}{|\zeta_0-\rho_j|^2}\cdot\frac{1}{\rho_j-2t}+2\operatorname{Re}\frac{c}{(\overline{\zeta}_0-\zeta_0)(\zeta_0-2t)}\Big]$$

$$+2\operatorname{Re}\Big\{\xi_{N+1}\overline{\xi}_{N+2}\Big[\sum_{j=1}^{n}\frac{g_j}{(\zeta_0-\rho_j)^2}\Big(\frac{1}{\rho_j-2t}-\frac{1}{\zeta_0-2t}\Big)+\frac{c}{(\zeta_0-2t)^2}\Big]\Big\}$$

$$+\sum_{k,l=0}^{N-1}\overline{\eta}_k\eta_l\Big[\sum_{j=1}^{n}h_j\Big(\frac{\rho_j}{2}\Big)^{k+l}\frac{1}{\rho_j-2t}+h_{kl}\Big]$$

$$+\sum_{k=0}^{N-1}(\overline{\eta}_k\eta_N+\eta_k\overline{\eta}_{N+1})\Big[\sum_{j=1}^{n}h_j\Big(\frac{\rho_j}{2}\Big)^k\frac{1}{(\zeta_0-\rho_j)(\rho_j-2t)}+\Big(\frac{\zeta_0}{2}\Big)^k\frac{d}{\zeta_0-2t}\Big]$$

$$+\Big(|\eta_N|^2+|\eta_{N+1}|^2\Big)\Big[\sum_{j=1}^{n}\frac{h_j}{|\zeta_0-\rho_j|^2}\frac{1}{\rho_j-2t}+2\operatorname{Re}\frac{d}{(\overline{\zeta}_0-\zeta_0)(\zeta_0-2t)}\Big]$$

$$+2\operatorname{Re}\Big\{\eta_N\overline{\eta}_{N+1}\Big[\sum_{j=1}^{n}\frac{h_j}{(\zeta_0-\rho_j)^2}\Big(\frac{1}{\rho_j-2t}-\frac{1}{\zeta_0-2t}\Big)+\frac{d}{(\zeta_0-2t)^2}\Big]\Big\},$$

где

$$g_{kl}=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad k+l<2N\\ (-1/2)^n \quad \text{при} \quad k+l=2N,\end{cases}$$

$$h_{kl}=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad k+l<2N-2\\ (-1)^{n+1}/2^n \quad \text{при} \quad k+l=2N-2,\end{cases}$$

$\{\xi_k\}$ и $\{\eta_k\}$ – комплексные числа, зависящие от $\{\beta_k\}$ и $\{\gamma_k\}$, соответственно.

В случае $n=2N+1$ подставим (12) в (11) и запишем функцию $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t)=\frac{1}{\prod\limits_{j=1}^{n}(\rho_j-2t)}\left[\sum_{\varepsilon=+1,-1}(1+t\varepsilon)\left|\sum_{k=0}^{N}\xi_k^{(\varepsilon)}t^k+\frac{\xi_{N+1}^{(\varepsilon)}}{\zeta_0-2t}+\frac{\xi_{N+2}^{(\varepsilon)}}{\overline{\zeta}_0-2t}\right|^2\right]$$

$$=\sum_{\varepsilon=+1,-1}\left\{\sum_{k,l=0}^{N}\overline{\xi}_k^{(\varepsilon)}\xi_l^{(\varepsilon)}\right.$$

$$\times\left[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{\rho_j}{2}\right)^{k+l}h_j^{(\varepsilon)}+h_{kl}^{(\varepsilon)}\right]$$

$$+\sum_{k=0}^{N}\left(\overline{\xi}_k^{(\varepsilon)}\xi_{N+1}^{(\varepsilon)}+\xi_{N+1}^{(\varepsilon)}+\xi_k^{(\varepsilon)}\overline{\xi}_{N+2}^{(\varepsilon)}\right)$$

$$\times\left[\sum_{j=1}^{n}h_j^{(\varepsilon)}\left(\frac{\rho_j}{2}\right)^k\frac{1}{\zeta_0-\rho_j}\cdot\frac{1}{\rho_j-2t}+\left(\frac{\zeta_0}{2}\right)^k\frac{d^{(\varepsilon)}}{\zeta_0-2t}\right]$$

$$+\left(|\xi_N^{(\varepsilon)}|^2+|\xi_{N+1}^{(\varepsilon)}|^2\right)\left[\sum_{j=1}^{n}\frac{h_j^{(\varepsilon)}}{|\zeta_0-\rho_j|^2}\cdot\frac{1}{\rho_j-2t}+2\,\mathrm{Re}\,\frac{d^{(\varepsilon)}}{(\overline{\zeta}_0-\zeta_0)(\zeta_0-2t)}\right]$$

$$\left.+2\,\mathrm{Re}\left[\xi_{N+1}^{(\varepsilon)}\overline{\xi}_{N+2}^{(\varepsilon)}\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{h_j^{(\varepsilon)}}{(\zeta_0-\rho_j)^2}\left(\frac{1}{\rho_j-2t}-\frac{1}{\zeta_0-2t}\right)+\frac{d^{(\varepsilon)}}{(\zeta_0-2t)^2}\right)\right]\right\},$$

где

$$h_{kl}^{(\varepsilon)}=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad k+l<2N\\ \varepsilon(-1)^n/2^n \quad \text{при} \quad k+l=2N,\end{cases}$$

$\{\xi_k^{(-1)}\}$ и $\{\xi_k^{(1)}\}$ – комплексные числа, зависящие от $\{\beta_k\}$ и $\{\gamma_k\}$, соответственно.

Как известно (см. [8, с. 84–85]), представление (10) имеет место тогда и только тогда, когда из справедливости неравенства $\varphi(t) \geqslant 0$ для всех $t \in [-1,1]$ вытекает неотрицательность эрмитовых форм H_1 и H_2, где

$$H_1 = \sum_{k,l=0}^{N+2} a_{kl}\xi_k\overline{\xi}_l, \quad H_2 = \sum_{k,l=0}^{N+2} b_{kl}\eta_k\overline{\eta}_l, \quad \text{если} \quad n = 2N,$$
$$H_1 = \sum_{k,l=0}^{N+2} a_{kl}^{(1)}\xi_k\overline{\xi}_l, \quad H_2 = \sum_{k,l=0}^{N+2} a_{kl}^{(-1)}\xi_k\overline{\xi}_l, \text{если}\, n = 2N+1.$$

Последнее утверждение равносильно неотрицательности всех главных миноров матриц A и B (см. [9, с. 272]). Утверждение 1 теоремы 1 доказано.

Доказательство утверждений 2 и 3 теоремы 1 аналогично доказательству соответствующих утверждений теоремы 1 в [10].

Доказательство следствия 1. В силу утверждения 2 теоремы 1, имеем (при $w = f'(z_0)$)

$$\operatorname{Int} D'_{1,n} = \{w \in \mathbb{C} : \det[(a_{kl})_0^{N+2}] > 0, \quad \det[(b_{kl})_0^{N+1}] > 0\}$$

при $n = 2N$ и

$$\operatorname{Int} D'_{1,n} = \left\{w \in \mathbb{C} : \det\left[(a_{kl}^{(\varepsilon)})_0^{N+2}\right] > 0, \quad \varepsilon = -1, +1\right\}$$

при $n = 2N+1$.

Заметим, что от w'_0 зависят только два элемента матриц A и B. Поэтому запишем определитель $\det A$ в следующем виде

$$\det A \equiv \det\left[(a_{kl})_0^{N+2}\right]$$
$$= -a_{(N+1)(N+2)} \det \begin{pmatrix} & a_{0(N+1)} \\ (a_{kl})_0^N & \vdots \\ & a_{N(N+1)} \\ a_{(N+2)0} \cdots a_{(N+2)N} & a_{(N+2)(N+1)} \end{pmatrix}$$

$$
+\det\begin{pmatrix} & a_{0(N+2)} \\ (a_{kl})_0^{N+1} & \vdots \\ & a_{N(N+2)} \\ & 0 \\ a_{(N+2)0}\dots a_{(N+2)(N+1)} & a_{(N+2)(N+2)} \end{pmatrix}
$$

$$
= -|a_{(N+1)(N+2)}|^2 \det[(a_{kl})_0^N]
$$

$$
-a_{(N+1)(N+2)}\det\begin{pmatrix} & a_{0(N+1)} \\ (a_{kl})_0^{N} & \vdots \\ & a_{N(N+1)} \\ a_{(N+2)0}\dots a_{(N+2)N} & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
-a_{(N+2)(N+1)}\det\begin{pmatrix} & a_{0(N+2)} \\ (a_{kl})_0^{N} & \vdots \\ & a_{N(N+2)} \\ a_{(N+1)0}\dots a_{(N+1)N} & 0 \end{pmatrix}
$$

$$
+\det\begin{pmatrix} & & a_{0(N+2)} \\ (a_{kl})_0^{N+1} & & \vdots \\ & & a_{N(N+2)} \\ & & 0 \\ a_{(N+2)0}\dots a_{(N+2)N} & 0 & a_{(N+2)(N+2)} \end{pmatrix} \qquad (13)
$$

Заметим, что

$$
a_{(N+2)(N+1)} = \bar{a}_{(N+1)(N+2)}, a_{(N+2)0} = a_{0(N+1)}, a_{(N+1)0} = a_{0(N+2)}.
$$

Следовательно, справедливо утверждение

$$
\det A > 0 \Leftrightarrow \left| a_{(N+1)(N+2)} + \frac{\det A_{N+1}^{(0)}}{\det A_N} \right|^2 < R^2
$$

где

$$R^2 = \left|\frac{\det A_{N+1}^{(0)}}{\det A_N}\right|^2$$

$$+ \frac{1}{\det A_N} \begin{pmatrix} & & & a_{0(N+2)} \\ & (a_{kl})_0^{N+1} & & \vdots \\ & & & a_{N(N+2)} \\ & & & 0 \\ a_{(N+2)0} \ldots a_{(N+2)N} & & 0 & a_{(N+2)(N+2)} \end{pmatrix}.$$

В силу теоремы Сильвестра (см. [9, с. 48]), получаем

$$\det[(a_{kl})_0^N] \det \begin{pmatrix} & & & a_{0(N+2)} \\ & (a_{kl})_0^{N+1} & & \vdots \\ & & & a_{N(N+2)} \\ & & & 0 \\ a_{(N+2)0} \ldots a_{(N+2)N} & & 0 & a_{(N+2)(N+2)} \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} A_{N+1} & A_{N+1}^{(0)} \\ \overline{A_{N+1}^{(0)}} & A_{N+1} \end{pmatrix} = \bigl(\det A_{N+1}\bigr)^2 - \bigl|\det A_{N+1}^{(0)}\bigr|^2.$$

Таким образом,

$$\det A > 0 \Leftrightarrow \left|a_{(N+1)(N+2)} + \frac{\det A_{N+1}^{(0)}}{\det A_N}\right|^2 < \left(\frac{\det A_{N+1}}{\det A_N}\right)^2.$$

Аналогичным образом доказывается утверждение

$$\det B > 0 \Leftrightarrow \left|b_{N(N+1)} + \frac{\det B_N^{(0)}}{\det B_{N-1}}\right|^2 < \left(\frac{\det B_N}{\det B_{N-1}}\right)^2.$$

В случае $n = 2N+1$ получим

$$\det A^{(\varepsilon)} > 0 \Leftrightarrow \left|a_{(N+1)(N+2)}^{(\varepsilon)} + \frac{\det \tilde{A}_{N+1}^{(\varepsilon)}}{\det A_N^{(\varepsilon)}}\right|^2 < \left(\frac{\det A_{N+1}^{(\varepsilon)}}{\det A_N^{(\varepsilon)}}\right)^2, \varepsilon = \pm 1.$$

Используем далее выражения (3), (4) и (5) для элементов $a_{(N+1)(N+2)}$, $b_{N(N+1)}$ и $a_{(N+1)(N+2)}^{(\varepsilon)}$ матриц A, B и $A^{(\varepsilon)}$ и заметим, что $D'_{1,n}$ есть замкнутое множество. В результате получим утверждения (8) и (9). Следствие 1 доказано.

Литература

1. M. S. Robertson, *On the coefficients of typically-real function.* — Bull. Amer. Math. Soc. **41**, No. 8 (1935), 565–572.
2. Г. М. Голузин, *О типично вещественных функциях.* — Мат. сб. **27(69)**, No. 2 (1950), 201–218.
3. Г. М. Голузин, *Об одном методе вариаций в теории аналитических функций.* — Учен. зап. ЛГУ, No. 144 (1952), 85–101.
4. В. А. Андреева, Н. А. Лебедев, А. В. Стовбун, *Об областях значений некоторых систем функционалов в некоторых классах регулярных функций.* — Вестн. ЛГУ, No. 7, сер. мат., мех, и астр., вып. 2 (1961), 8–22.
5. Н. Ахиезер, М. Крейн, *О некоторых вопросах теории моментов.* Харьков, 1938.
6. Е. Г. Голузина, *О множестве значений систем* $\{f(z_1),\ f'(z_1)\}$ *и* $\{f(z_1)\ f(z_2)\}$ *в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **254** (1998), 65–75.
7. Е. Г. Голузина, *О множествах значений систем* $\{f(z_1), f(z_2)\}, f'(z_2)\}$ *и* $\{f(z_1), f'(z_1), f''(z_1)\}$ *на классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 48–61.
8. М. Г. Крейн, А. А. Нудельман, *Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи.* М., 1973.
9. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц.* 3-е изд., М., 1967.
10. Е. Г. Голузина, *О множестве значений системы* $\{f(z_1), \dots f'(z_n)\}$ *в классе типично вещественных функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **314** (2004), 41–51.

Goluzina E. G. A distortion theorem for the class of typically real functions.

The author's investigations in the well known class T of typically real functions $f(z)$ in the disk $U = \{z : |z| < 1\}$ are prolonged. The region of values of the system $\{f(z_0), f(z_0), f(r_1), f(r_2), \dots, f(r_n)\}$ in the class T is investigated. Here $z_0 \in U$, $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, $0 < r_j < 1$ for $j = 1, \dots, n$, $n \geqslant 2$. As a corollary, the region of values of $f'(z_0)$ in the class of functions $f \in T$ with fixed values $f(z_0)$ and $f(r_j)$ $(j = 1, \dots, n)$ is determined. In the proof a criterion of decision power moment problem is used.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: goluzina@pdmi.ras.ru

Поступило 11 сентября 2008 г.