Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

Е. П. Голубева

О ПЛОСКОЙ ВЫПУКЛОЙ КРИВОЙ С БОЛЬШИМ ЧИСЛОМ ЦЕЛЫХ ТОЧЕК

В работе [1] Ярник полностью решил вопрос о максимальном количестве целых точек, которые могут лежать на строго выпуклой кривой большой длины l на плоскости. Оказалось, что оно равно $3(4\pi)^{-1/3}l^{2/3} + o(l^{2/3})$.

Эта кривая строится по заданному l и ее форма меняется при росте l.

В связи с этим возникает вторая естественная постановка задачи, состоящая в том, что мы фиксируем строго выпуклую кривую на плоскости и считаем на ней количество рациональных точек с заданным (большим) знаменателем M. Ясно, что этот вопрос является частным случаем первого и, следовательно, N_M – количество таких точек – есть величина $O(M^{2/3})$.

В работе [2] был поставлен вопрос о правильном порядке N_M, а в работе [3] доказано, что $N_M = o(M^{2/3})$.

Свиннертон–Дайер в [4] и Бомбьери–Пила в [5] (см. также [6]) показали, что величина N_M существенно зависит от гладкости исходной кривой: в работе [4] было показано, что если функция, задающая кривую, имеет третью непрерывную производную, отделенную от нуля, то $N_M = O_\varepsilon(M^{3/5+\varepsilon})$, где $\varepsilon > 0$ – произвольно.

В настоящей работе мы строим непрерывную монотонную строго выпуклую кривую такую, что для бесконечной последовательности M выполняется неравенство $N_M \geqslant M^{\log 2/\log 3}$. (Заметим, что $\log 2/\log 3 > 0.639$).

Функция, задающая эту кривую, имеет первую непрерывную производную. Вторая же производная равна ∞ во всех рациональных точках и равна 0 во всех точках, эквивалентных золотому сечению, т.е. в точках вида $0 < (a\omega+c)/(b\omega+d) < 1$, где $a, b, c, d > 0$, $ad-bc = 1$, $\omega = (1+\sqrt{5})/2$.

Алгоритм, задающий эту кривую, аналогичен тому, который применял Ярник. Разница состоит в том, что он использовал ряды Фарея, т.е. ряды последовательных средних гармонических рациональных чисел, из которых удалены все рациональные точки с большими знаменателями. Мы же используем все средние гармонические.

Сформулируем теперь основной результат настоящей работы.

Теорема. *Существуют непрерывные функции $p = p(t)$ и $q = q(t)$, заданные на промежутке $[0,1]$, такие, что $p(0) = q(0) = 1$, $p(1) = 1/2$, $q(1) = 1$ и*

1. *$p(q)$ – строго монотонно возрастает при $q \in [0,1]$;*
2. *график функции $p = p(q)$ является строго выпуклой кривой на промежутке $[0,1]$;*
3. *для любого натурального n на плоскости существует не менее 2^n рациональных точек вида $(a/3^n, b/3^n)$ таких, что $a/2 \cdot 3^n = p(b/2\cdot 3^n)$;*
4. *для всех $t \in (0,1)$ $dp/dq = t$;*
5. *$d^2p/dq^2 = \infty$ во всех рациональных точках, $d^2p/dq^2 = 0$ во всех точках вида $(a\omega + c)/(b\omega + d)$, где a, b, c, d – неотрицательные целые, $ad - bc = 1$, $\omega = (1+\sqrt{5})/2$.*

Следствие. *Для кривой с уравнением $p = p(q)$ и $M = 2\cdot 3^n$ имеем $N_M \geqslant M^{\log 2/\log 3}$.*

Замечание. Мы имеем $N_M \geqslant M^{\log 2/\log 3}$, а не точное равенство, поскольку существуют непримитивные точки, т.е. точки вида $(a/2\cdot 3^n, b/2\cdot 3^n)$, для которых $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$.

Далее в §1 мы строим σ_N – гармоническое множество уровня N. В §2 мы строим функции $p(t)$ и $q(t)$ и доказываем их непрерывность и монотонность, в §3 – выпуклость кривой $p = p(q)$, в §4 вычисляем dp/dq и в §5 – d^2p/dq^2 в тех точках, о которых говорилось в теореме.

§1. Построение гармонического множества уровня N

Построим последовательность множеств рациональных чисел следующим образом: положим

$$\sigma_0 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\}, \quad \sigma_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1}\right\}, \dots,$$

$$\sigma_N = \left\{\frac{0}{1}, \dots, \frac{1}{N+1}, \dots, \frac{a_i}{b_i}, \frac{a_{i+1}+a_i}{b_{i+1}+b_i}, \frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}, \dots, \frac{1}{1}\right\},$$

где a_i/b_i и a_{i+1}/b_{i+1} пробегают все последовательные пары чисел из σ_{N-1}. Как известно (см. [7]),

$$a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i = -1, \quad (a_i, b_i) = 1. \tag{1}$$

Лемма 1. *Имеем*

1. *для всех новых точек a/b из σ_N справедлива оценка $N+1 \leqslant b \leqslant F_{N+1}$, где F_N – число Фибоначчи, $F_0 = 1$, $F_1 = 1, \ldots, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$);*

2. *пусть a/b и c/d – соседние точки в σ_N, тогда*

$$\frac{1}{F_{N+1}F_N} \leqslant \left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| \leqslant \frac{1}{N+1};$$

3. *имеют место равенства*

$$\sum_{0<a/b\in\sigma_N} a = (3^N+1)/2, \qquad \sum_{0<a/b\in\sigma_N} = 3^N;$$

4. *обозначим через $N_0 = N_0(a/b)$ наименьший номер такой, что a/b принадлежит σ_N для всех $N \geqslant N_0$. Пусть $a/b = [\alpha_1, \ldots, \alpha_L]$ – разложение a/b в простую непрерывную дробь. Тогда $N_0 = \alpha_1 + \cdots + \alpha_L - 1$.*

Доказательство. Первое и третье утверждения легко проверяются индукцией по N. Второе следует из первого, поскольку в силу (1)

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right| = \frac{1}{bd}. \tag{2}$$

Докажем четвертое утверждение. Доказательство будем проводить индукцией по L-длине разложения a/b в непрерывную дробь.

При $L = 1$ $a/b = 1/(N+1)$ и утверждение справедливо.

Пусть оно доказано для всех рациональных чисел с длиной разложения, не превосходящей $L-1$. Обозначим через a_{-1}/b_{-1} и a/b точки из σ_{N_0-1}, порождающие a/b в σ_N. Они же являются соседними к a/b в σ_N. В силу (2)

$$\left|\frac{a}{b} - \frac{a_{-1}}{b_{-1}}\right| = \frac{1}{bb_{-1}}, \quad \left|\frac{a_1}{b_1} - \frac{a}{b}\right| = \frac{1}{bb_1}.$$

Пусть, для определенности, $b_{-1} \leqslant b_1$, тогда $b > 2b_{-1}$ и $|a/b - a_{-1}/b_{-1}| < 1/2b_{-1}^2$. В силу свойств непрерывных дробей a_{-1}/b_{-1} является подходящей дробью к a/b.

Пусть $N_0(a_{-1}/b_{-1}) = k$. Предположим, для определенности, что $a_{-1}/b_{-1} > a/b$. Пусть соседняя слева точка к a_{-1}/b_{-1} в σ_k есть a_0/b_0.

Рассмотрим соседние слева точки к a_{-1}/b_{-1} в $\sigma_{k+1},\ldots,\sigma_N$. Обозначим их через c_i/d_i $(0\leqslant i\leqslant N_0-k)$. Тогда $c_i/d_i=(a_0+ia_{-1})/(b_0+ib_{-1})$ и

$$\frac{a}{b}=\frac{c_{N_0-k}}{d_{N_0-k}}=\frac{a_0+(N_0-k)a_{-1}}{b_0+(N_0-k)b_{-1}}. \qquad (3)$$

Покажем, что a_0/b_0 является предыдущей подходящей дробью к a/b. Действительно,

$$\frac{a}{b}-\frac{a_0}{b_0}=\frac{ab_0-a_0b}{b_0b}=\frac{(a_0+(N_0-k)a_{-1})b_0-a_0(b_0+(N_0-k)b_{-1})}{b_0(b_0+(N_0-k)b_{-1})}$$
$$=\frac{N_0-k}{b_0(b_0+(N_0-k)b_{-1})}<\frac{1}{b_0b_{-1}}.$$

В силу известного критерия (см. [7]) a_0/b_0 действительно является подходящей дробью к a/b.

Как известно,

$$\frac{a}{b}=\frac{\alpha_La_{-1}+a_0}{\alpha_Lb_{-1}+b_0},$$

где α_L – последнее неполное частное.

Сравнивая это равенство с (3), видим, что $\alpha_L=N_0-k$, и последнее утверждение леммы доказано.

Замечание. Пусть для $(a,b)=1$, $1\leqslant a\leqslant b-1$ через $\alpha_i(a)$ обозначены неполные частные разложения a/b в непрерывную дробь, $a/b=[\alpha_1(a),\ldots,\alpha_L(a)]$, где $L=L(a)$ – длина разложения. Как показано в работе [8] (см. также [9]),

$$\sum_{\substack{a \pmod b\\(a,b)=1}}\sum_{k=1}^{L(a)}\alpha_k(a)\sim\frac{6}{\pi^2}b\log^2 b\quad(b\to\infty), \qquad (4)$$

так что в среднем при растущем b $N_0(a/b)$ имеет порядок $\log^2 b$.

С другой стороны, как показано в работе [10], для большого простого числа $b=p$

$$\sum_{a \pmod p}\sum_{k=1}^{L(a)}(\alpha_k(a))^{1-1/\log\log p}\sim\frac{12}{\pi^2}p\log p\log\log p.$$

Обозначим множество тех a, для которых $\alpha_k(a) \leqslant \log^{2+\varepsilon} p$ для всех k, $1 \leqslant k \leqslant L(a)$, через A_1, а всех остальных через A_2. Тогда в силу (4) $\#(A_2) = O_\varepsilon(p/\log^\varepsilon p)$ и $\#(A_1) = p + O_\varepsilon(p/\log^\varepsilon p)$.

Таким образом, для всех значений a, кроме $O_\varepsilon(p/\log^\varepsilon p)$ возможных исключений, имеем из (4)

$$c_1 \log p < N_0\big(\frac{a}{p}\big) < c_2 \log p \log\log p,$$

где $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ – постоянные.

§2. Построение функций распределения числителей и знаменателей рациональных дробей из σ_N

Пусть a/b – произвольное рациональное число из σ_N $(N \geqslant N_0(a/b))$. Введем две функции $P_N(a/b)$ и $Q_N(a/b)$ следующим образом:

$$P_N\big(\frac{a}{b}\big) = \sum_{\substack{0<a_i/b_i\leqslant a/b\\ a_i/b_i\in\sigma_N}} a_i, \quad Q_N(a/b) = \sum_{\substack{0<a_i/b_i\leqslant a/b\\ a_i/b_i\in\sigma_N}} b_i$$

Эти функции обладают следующими свойствами:

$$P_{N+1}(a/b) = 3P_N(a/b) - a, \tag{5}$$
$$Q_{N+1}(a/b) = 3Q_N(a/b) - b + 1. \tag{6}$$

Для доказательства заметим, что каждое a_i из σ_N, кроме значения a из a/b, превращается в $3a_i$ в σ_{N+1}, поскольку входит в три числителя: в a_i/b_i, в $(a_i+a_{i+1})/(b_i+b_{i+1})$ и в $(a_i+a_{i-1})/(b_i+b_{i-1})$. Последнее a из a/b участвует в сумме два раза: в a/b и в предпоследней точке.

Такое же рассуждение применимо и к Q_{N+1} с той разницей, что выделяется и самая левая точка $0/1$.

Вычислим значения P_{N+1} и Q_{N+1} в новых точках в σ_{N+1}. Пусть a_{-1}/b_{-1} – точка, соседняя слева к a/b в σ_{N+1}, тогда

$$P_{N+1}\left(\frac{a_{-1}+a}{b_{-1}+b}\right) = 3P_N\left(\frac{a_{-1}}{b_{-1}}\right) + a = 3P_N\left(\frac{a}{b}\right) - 2a, \tag{7}$$
$$Q_{N+1}\left(\frac{a_{-1}+a}{b_{-1}+b}\right) = 3Q_N\left(\frac{a_{-1}}{b_{-1}}\right) + b + 1 = 3Q_N\left(\frac{a}{b}\right) - 2b + 1. \tag{8}$$

Доказательство последних формул такое же как и формул (5), (6).

Обозначим

$$p_N\Big(\frac{a}{b}\Big)=\frac{P_N\big(\frac{a}{b}\big)}{3^N},\quad q_N\Big(\frac{a}{b}\Big)=\frac{Q_N\big(\frac{a}{b}\big)}{3^N} \tag{9}$$

В силу (5) и (6)

$$\begin{aligned}p_{N_0+n}\Big(\frac{a}{b}\Big)&=p_{N_0}\Big(\frac{a}{b}\Big)-\frac{a}{3^{N_0+1}}\Big(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}\Big)\\&=p_{N_0}\Big(\frac{a}{b}\Big)-\frac{a}{2\cdot 3^{N_0}}\Big(1-\frac{1}{3^n}\Big)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}q_{N_0+n}\Big(\frac{a}{b}\Big)&=q_{N_0}\Big(\frac{a}{b}\Big)-\frac{b-1}{3^{N_0+1}}\Big(1+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{3^{n-1}}\Big)\\&=p_{N_0}\Big(\frac{a}{b}\Big)-\frac{b-1}{2\cdot 3^{N_0}}\Big(1-\frac{1}{3^n}\Big).\end{aligned}$$

Положим

$$p\Big(\frac{a}{b}\Big)=\lim_{N\to\infty}p_N\Big(\frac{a}{b}\Big)=p_{N_0}\Big(\frac{a}{b}\Big)-\frac{a}{2\cdot 3^{N_0}}=p_N\Big(\frac{a}{b}\Big)-\frac{a}{2\cdot 3^N}\quad (N\geqslant N_0),$$

$$q\Big(\frac{a}{b}\Big)=\lim_{N\to\infty}q_N\Big(\frac{a}{b}\Big)=q_{N_0}\Big(\frac{a}{b}\Big)-\frac{b-1}{2\cdot 3^{N_0}}=q_N\Big(\frac{a}{b}\Big)-\frac{b-1}{2\cdot 3^N}\quad (N\geqslant N_0).$$

Покажем, что функции $p(a/b)$ и $q(a/b)$ являются строго монотонно возрастающими на множестве рациональных чисел из промежутка $(0,1)$. Пусть $a/b<c/d$ – две соседние точки из σ_N. В силу формул (7) и (8)

$$p\Big(\frac{a}{b}\Big)=p_N\Big(\frac{a}{b}\Big)-\frac{a}{2\cdot 3^N},\quad p\Big(\frac{c}{d}\Big)=p_N\Big(\frac{a}{b}\Big)+\frac{a}{2\cdot 3^N}.$$

Таким образом, $p(a/b)<p(c/d)$. То же справедливо и для функции q.

Пусть теперь $a/b<c/d$ – произвольная пара рациональных чисел. Возьмем N настолько большим, что $a/b\in\sigma_N$ и $c/d\in\sigma_N$. В силу приведенного выше неравенства $p(a/b)<p(c/d)$ и $q(a/b)<q(c/d)$.

Отсюда следует, что и $p=p(q)$ является строго монотонно возрастающей функцией.

Определим далее функции $p(t)$ и $q(t)$ для любого вещественного t из промежутка $(0,1)$. Пусть t – иррационально.

Положим

$$\underline{p}(t) = \sup_{a/b<t} p\Big(\frac{a}{b}\Big) \quad \text{и} \quad \bar{p}(t) = \inf_{a/b>t} p\Big(\frac{a}{b}\Big),$$

где a/b – рационально.

Поскольку для любых $a/b < c/d$ справедливо неравенство $p(a/b) < p(c/d)$, то $\underline{p}(t) \leqslant \bar{p}(t)$. Докажем, что имеет место равенство. Предположим, что

$$\bar{p}(t) - \underline{p}(t) = \varepsilon > 0. \tag{10}$$

Возьмем N настолько большим, что $F_N/3^N < \varepsilon/2$. Рассмотрим две соседние точки a_{-1}/b_{-1} и a/b из σ_N такие, что $a_{-1}/b_{-1} < t < a_1/b_1$. Тогда $p(a_1/b_1) - p(a_{-1}/b_{-1}) = (a + a_1)/2 \cdot 3^N$. В силу утверждения 1 леммы 1 имеем $a_1 \leqslant F_N$ и $a_{-1} \leqslant F_N$. Таким образом, $p(a_1/b_1) - p(a_{-1}/b_1) \leqslant F_N/3^N < \varepsilon/2$ и, значит, неравенство (10) невозможно.

Положим

$$p(t) = \underline{p}(t) = \bar{p}(t).$$

Аналогично,

$$\underline{q}(t) = \sup_{a/b<t} q\Big(\frac{a}{b}\Big), \quad \bar{q}(t) = \inf_{1>a/b>t} q\Big(\frac{a}{b}\Big),$$

где a/b – рациональные числа и

$$q(t) = \underline{q}(t) = \bar{q}(t).$$

Попутно мы доказали следующую лемму

Лемма 2. *Для любого t справа и слева найдутся рациональные точки a/b из σ_N такие, что*

$$\frac{1}{F_N F_{N+1}} \leqslant \Big|t - \frac{a}{b}\Big| \leqslant \frac{1}{N}, \ \Big|p(t) - p\Big(\frac{a}{b}\Big)\Big| \leqslant \frac{F_N}{3^N},$$

$$\Big|q(t) - q\Big(\frac{a}{b}\Big)\Big| \leqslant \frac{F_{N+1}}{3^N}.$$

Докажем, что функции $p(t)$ и $q(t)$ непрерывны на промежутке $[0,1]$.

Пусть $0 < t < 1$ – точка разрыва функции $p(t)$. Тогда существует строго монотонная последовательность $t_k \to t$ такая, что $p(t_k) \not\to p(t)$.

Пусть, для определенности, t_k монотонно возрастает. В силу результата леммы 2 мы можем считать, что t_k – рациональные числа.

Поскольку $t_k < t$, значения $p(t_k)$ монотонно возрастают и ограничены сверху величиной $p(t)$. Равенство $\lim\limits_{t_k \to t} p(t_k) = p < p(t)$ невозможно в силу результата леммы 2.

Точно так же доказывается непрерывность $q(t)$ и монотонное возрастание $p(t)$ и $q(t)$.

Отсюда следует, что $p = p(q)$ непрерывна и строго монотонно возрастает по q на промежутке $[0,1]$. (Последнее в силу того факта, что, очевидно, $q(0) = 0$, $q(1) = 1$).

§3. Доказательство строгой выпуклости кривой $p = p(q)$

Запишем условие выпуклости кривой $p = p(q)$ в виде

$$(p(t_2) - p(t_1))(q(t_3) - q(t_1)) < (p(t_3) - p(t_1))(q(t_2) - q(t_1)),$$

где $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$ – любые значения параметра.

Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда t_1, t_2 и t_3 являются рациональными последовательными точками из σ_N, где N – произвольно.

Пусть $t_i = a_i/b_i$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$. Подставим в условие выпуклости значения $p(t_i)$ из соотношений (5)–(6). Тогда оно примет вид

$$\left(p_N\left(\frac{a_2}{b_2}\right) - p_N\left(\frac{a_1}{b_1}\right) - \frac{a_2 - a_1}{2 \cdot 3^N}\right)\left(q_N\left(\frac{a_3}{b_3}\right) - q_N\left(\frac{a_1}{b_1}\right) - \frac{b_3 - b_1}{2 \cdot 3^N}\right)$$
$$< \left(p_N\left(\frac{a_3}{b_3}\right) - p_N\left(\frac{a_1}{b_1}\right) - \frac{a_3 - a_1}{2 \cdot 3^N}\right)\left(q_N\left(\frac{a_2}{b_2}\right) - q_N\left(\frac{a_1}{b_1}\right) - \frac{b_2 - b_1}{2 \cdot 3^N}\right).$$

Из (7) и (8), имеем

$$p_N\left(\frac{a_2}{b_2}\right) = p_N\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + \frac{a_2}{3^N}, \quad p_N\left(\frac{a_3}{b_3}\right) = p_N\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + \frac{a_2 + a_3}{3^N},$$
$$q_N\left(\frac{a_2}{b_2}\right) = q_N\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + \frac{b_2}{3^N}, \quad q_N\left(\frac{a_3}{b_3}\right) = q_N\left(\frac{a_1}{b_1}\right) + \frac{b_2 + b_3}{3^N}.$$

При подстановке этих значений в последнее неравенство получаем

$$\frac{a_1 + a_2}{2 \cdot 3^N} \cdot \frac{b_1 + 2b_2 + b_3}{2 \cdot 3^N} < \frac{a_1 + 2a_2 + a_3}{2 \cdot 3^N} \cdot \frac{b_1 + b_2}{2 \cdot 3^N}.$$

После преобразований приходим к неравенству

$$a_1 b_2 + a_2 b_3 + a_1 b_3 < a_2 b_1 + a_3 b_1 + a_3 b_2,$$

которое справедливо, поскольку $a_1 b_2 - a_2 b_1 = a_2 b_3 - a_3 b_2 - = 1$, $a_1 b_3 - a_3 b_1 \leqslant -1$.

§4. Вычисление производной dp/dq

Имеем
$$\frac{dp}{dq}(t) = \lim_{\delta\to 0}\frac{p(t+\delta)-p(t)}{q(t+\delta)-q(t)}.$$
Пусть сначала $\delta > 0$.

По определению функций $p(t)$ и $q(t)$ с учетом их свойств имеем
$$p(t+\delta)-p(t) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{3^N}\sum_{\substack{t<a/b\leqslant t+\delta\\ a/b\in\sigma_N}} a,\ \ q(t+\delta)-q(t) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{3^N}\sum_{\substack{t<a/b\leqslant t+\delta\\ a/b\in\sigma_N}} b.$$
Таким образом,
$$\frac{dp}{dq}(t) = \lim_{\delta\to 0}\lim_{N\to\infty}\frac{\sum\limits_{a/b} a}{\sum\limits_{a/b} b},$$
где в $\sum\limits_{a/b}$ суммирование ведется по точкам a/b таким, что $t < a/b \leqslant t+\delta$, $a/b \in \sigma_N$.

Далее, для каждой такой пары выполнено неравенство $tb < a \leqslant (t+\delta)b$. Таким образом,
$$t\sum_{\substack{t<a/b\leqslant t+\delta\\ a/b\in\sigma_N}} b \leqslant \sum_{\substack{t<a/b\leqslant t+\delta\\ a/b\in\sigma_N}} a \leqslant (t+\delta)\sum_{\substack{t<a/b\leqslant t+\delta\\ a/b\in\sigma_N}} b$$
и
$$t < \frac{p(t+\delta)-p(t)}{q(t+\delta)-q(t)} \leqslant t+\delta.$$
Следовательно,
$$\frac{dp}{dq}(t+o) = t.$$
Случай $\delta < 0$ совершенно аналогичен.

В результате мы имеем $dp/dq(t) = t$.

§5. Вычисление $d^2p/dq^2(t)$ в отдельных точках

Из результата предыдущего параграфа следует, что
$$\frac{d^2p}{dq^2}(t) = \lim_{\delta\to 0}\ \frac{\delta}{q(t+\delta)-q(t)}.$$

Таким образом, если dq/dt существует, то

$$\frac{d^2p}{dq^2}(t) = \frac{1}{\frac{dq}{dt}(t)} = \frac{t}{\frac{dp}{dt}(t)}.$$

Найдем dq/dt в тех точках, о которых говорилось в теореме.

Пусть сначала $t = a/b$ – рациональное число. Докажем, что $dq/dt(a/b) = 0$.

Пусть a_1/b_1 – точка, соседняя справа к a/b в σ_{N_0+1}, где $N_0 = N_0(a/b)$. Будем считать для определенности, что $\delta > 0$. Кроме того, мы можем считать, что $\delta \leqslant \lambda^{-1}(b^2+bb_1)^{-1}$, где λ – достаточно большая постоянная. Положим $k = [(1/\delta - bb_1)/b^2]$. Тогда

$$kb^2 + bb_1 \leqslant \frac{1}{\delta} < (k+1)b^2 + bb_1$$

и

$$\frac{q\left(\frac{ak+a_1}{bk+b_1}\right) - q\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(b(bk+b_1)\right)^{-1}} > \frac{q\left(\frac{a}{b}+\delta\right) - q\left(\frac{a}{b}\right)}{\delta}.$$

При доказательстве утверждения 4 леммы 1 мы показали, в частности, что $(ak+a_1)/(bk+b_1)$ является соседней справа точкой к a/b в σ_{N_0+k}.

Таким образом, $q((ak+a_1)/(bk+b_1)) - q(a/b) = O(k\cdot 3^{-k})$, где постоянная, входящая в O, зависит только от a и b.

Следовательно,

$$\frac{dq}{dt}\left(\frac{a+0}{b}\right) = \lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{3^k} = 0.$$

Аналогично рассматривается случай $\delta < 0$.

Пусть теперь $t = (a\omega+c)/(b\omega+d)$, где $\omega = (1+\sqrt{5})/2$, $ad-bc=1$.

Без ограничения общности мы можем считать, что $a/b < c/d$ – соседние точки в σ_{N_0}.

Действуя так же, как при вычислении $dq/dt(a/b)$, легко показать, что

$$\frac{dq}{dt}\left(\frac{a\omega+c}{d\omega+d}\right) \geqslant \lim_{k\to\infty}\lim_{n\to\infty}\frac{q\left(\frac{aF_{k+n}+cF_{k+n-1}}{bF_{k+n}+dF_{k+n-1}}\right) - q\left(\frac{aF_k+cF_{k-1}}{bF_k+dF_{k-1}}\right)}{\delta_{k,n}},$$

где k и n – четные,

$$\delta_{k,n} = \frac{aF_{k+n}+cF_{k+n-1}}{bF_{k+n}+dF_{k+n-1}} - \frac{aF_k+cF_{k-1}}{dF_k+dF_{k-1}} \leqslant \frac{F_n}{F_kF_{k+n}} = O\left(\frac{1}{F_k^2}\right).$$

Очевидно, что

$$q\left(\frac{aF_{k+1}+cF_{k+n-1}}{bF_{k+n}+dF_{k+n-1}}\right)-q\left(\frac{aF_k+cF_{k-1}}{bF_k+dF_{k-1}}\right)\geqslant\frac{bF_{k+2}+dF_{k+1}}{3^{k+2}}\geqslant\frac{b}{9}\frac{F_k}{3^k}.$$

Таким образом,

$$\frac{dq}{dt}\left(\frac{a\omega+c}{b\omega+d}\right)\geqslant C\lim_{k\to\infty}\frac{F_k^3}{3^k},$$

где $C>0$ – постоянная, зависящая от a, b, c, d.

Поскольку $\omega^3>3$, имеем $d^2p/dq^2((a\omega+b)/(c\omega+d))=0$.

Литература

1. V. Jarník, *Über die Gitterpunkte auf konvexen Kurven.* — Math. Z. **24** (1926), 500–518.
2. A. Plague, *A uniform version of Jarník theorem.* — Acta Arith. **87**, No. 3 (1999), 255–267.
3. Ф. В. Петров, *О количестве рациональных точек на строго выпуклой кривой.* — Функц. анализ и его прил., вып. 1, **40** (2006), 30–42.
4. H. P. F. Svinnerton–Dyer, *The number of lattice points on a convex curve.* — J. Number Theory **6** (1974), 128–135.
5. E. Bombieri, J. Pila, *The number of integral points on arcs and ovals.* — Duke Math. J. **59** (1989), 337–357.
6. M. N. Huxley, *Area, Lattice Points and Exponential Sums.* Oxford, 1996.
7. Б. А. Венков, *Элементарная теория чисел.* М.-Л., 1937.
8. В. Н. Попов, *Асимптотика суммы сумм непрерывных дробей чисел вида a/p.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **91** (1979), 81–93.
9. G. Myerson, *On semi-regular finite continued fractions.* — Arch. Math. **48**, No. 5 (1987), 420–425.
10. Е. П. Голубева, *О моментах элементов непрерывных дробей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **337** (2006), 13–22.

Golubeva E. P. On a plane convex curve with a large number of lattice points.

Let γ be a continuous convex curve and let N_M be the number of points belonging to γ of the form $(u/M, v/M)$, where u, v are integers.

A smooth curve γ such that there exists a sequence $\{M\}$ with the property $N_M > M^{\log 2/\log 3}(\log 2/\log 3 > 0.639)$ is constructed.

Государственный университет
телекоммуникаций им. М. А. Бонч-Бруевича

E-mail: elena_golubeva@mail.ru

Поступило 24 июля 2008 г.