Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 357, 2008 г.

Е. П. Голубева

ГРАНИЦА ПРЕДСТАВИМОСТИ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ТЕРНАРНЫМИ КВАДРАТИЧНЫМИ ФОРМАМИ И НЕОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВАРИНГА

§0. Введение

В настоящей работе мы усиливаем результаты работы [1], где было доказано, что уравнение

$$n = x^2 + y^2 + z^3 + u^3 + v^4 + w^{14} + t^{4k+1}, \tag{1}$$

где k – сколь угодно велико, имеет решения при целых неотрицательных значениях неизвестных, если n – произвольное достаточно большое целое число.

Ясно, что в уравнении (1) при больших k сумма обратных показателей степеней неизвестных меньше 2. Таким образом, это уравнение не удовлетворяет условиям основной теоремы из работы [2], где исследуется уравнение

$$n = x^2 + y^2 + z_1^{k_1} + \cdots + z_r^{k_r},$$

в котором показатели k_i удовлетворяют условию

$$1/k_1 + \cdots + 1/k_r > 1.$$

Следуя работе Ю. В. Линника [3], где была доказана разрешимость уравнения

$$n = x^2 + t^2 + z_1^3 + z_2^3 + z_3^3,$$

мы свели уравнение (1) к задаче о представлении больших чисел тернарными квадратичными формами. Изменения, внесенные в схему доказательства последней работы, позволили рассматривать произвольное число слагаемых.

Тернарная форма, которая при этом возникает, имеет большой дискриминант. Поэтому появляется необходимость оценить границу представимости больших чисел такой тернарной формой, для чего нужно оценить по уровню норму параболической формы φ веса $3/2$, входящей в соответствующий тета-ряд.

Оценки такого рода известны (см. [4, 5]), но они недостаточно точны для того, чтобы их можно было применить к рассматриваемой задаче.

В работе [1] для параболической формы φ почти простого уровня $24p$ была получена оценка

$$\|\varphi\| = O\big(p^{1/4+\varepsilon}\big), \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Поскольку в [1] не было дано полное доказательство этого результата, мы приводим его здесь (см. теорему 3 ниже).

Основными результатами настоящей работы являются теоремы 1 и 2 (и следствие из теоремы 1).

Усиление, полученное в теореме 1, по сравнению с уравнением (1) произошло благодаря тому, что в уравнении

$$k = x^2 + y^2 + 6pz^2,$$

к которому редуцируется уравнение (3), мы имеем некоторую свободу в выборе числа k и выбираем его так, что оно делится на большой квадрат.

Это дает возможность воспользоваться результатами, связанными с подъемом Шимуры, в силу которых оценки коэффициента Фурье параболической формы веса $3/2$ по квадратной части номера совпадают с соответствующей оценкой для веса 2.

Кроме того, в доказательстве теоремы 1 используется глубокий результат работы [6] (точнее, его усиление из [7]) о простых числах в арифметических прогрессиях с модулем, являющимся степенью простого числа.

Как уже упоминалось выше, известные оценки коэффициента Фурье с номером $n = tm^2$ параболической формы веса $3/2$ являются существенно различными по t (t-бесквадратно) и m^2. Если по t эта оценка имеет вид $O\big(t^{1/2-1/28+\varepsilon}\big)$ (см. [8, 9]), то для m^2 она гораздо лучше, а именно $O\big(m^{1/2+\varepsilon}\big)$, что отражается на результате теоремы 2.

Ранее для задачи о границе представимости чисел тернарными формами с большим дискриминантом были известны только оценки, в которых t и m^2 равноправны, либо те, в которых учитывалось понижение только по m^2 (см. [10]).

Таким образом, граница представимости получена, во-первых, за счет специфики вида фигурирующей в ней квадратичной формы, для которой в теореме 3 получен неулучшаемый результат и, во-вторых, за счет того, что в первоначальных работах [8, 9] результат хорошо адаптирован к рассматриваемой задаче.

В работах [11, 12] были получены более сильные результаты по номеру t для параболических форм полуцелого веса, но они не доказаны для веса $3/2$ и дают более слабый результат по уровню.

Сформулируем теперь основные результаты настоящей работы.

Теорема 1. *Пусть* $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$. *Уравнение*

$$n = x^2 + y^2 + u^3 + v^4 + w^4 + t^{16}, \tag{3}$$

имеет при достаточно большом n *решения при неотрицательных значениях всех переменных.*

Следствие. *Уравнение*

$$n = x^2 + y^2 + u^3 + v^3 + w^4 + t^{16} + s^{4k+1}$$

имеет неотрицательные решения для всех достаточно больших n *и* k.

Теорема 2. *Пусть* P *– простое и число* n *удовлетворяет следующим условиям:*

1. $(n, 6P) = 1$;
2. *сравнение*
$$n \equiv x^2 + y^2 + 6Pz^2 (\mathrm{mod}\ 16)$$
имеет решения;
3. $nm^{12} > P^{21+\varepsilon}$, *где* $n = tm^2$, $(t, m) = 1$, $\varepsilon > 0$ *произвольно мало.*

Тогда уравнение

$$n = x^2 + y^2 + 6Pz^2$$

имеет решения.

Теорема 3. *Пусть* $\theta(z)$ *– тета-ряд квадратичной формы* $x^2 + y^2 + 6pw^2$ *и* $E(z)$ *– ряд Эйзенштейна, входящий в* $\theta(z)$. *Пусть* $f(z) = \theta(z) - E(z)$, *тогда* $\|f\| = O\big(p^{1/4+\varepsilon}\big)$, *где* $\varepsilon > 0$ *произвольно мало.*

§1. Доказательство теоремы 1

Рассмотрим решения уравнения (3), для которых $u+v$ – четное число. Пусть $u+v=2A$. Тогда уравнение запишется в виде

$$n = x^2 + y^2 + 6Au^2 - 12A^2u + 8A^3 + w^4 + t^{16}. \tag{4}$$

Положим $z_1 = u - A$, тогда последнее уравнение примет вид

$$n = x^2 + y^2 + 6Az_1^2 + 2A^3 + w^4 + t^{16}.$$

(Позже мы выбираем A так, что $A \asymp n^{1/3}$.) Поскольку $n \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 5)$, сравнение $n \equiv t_0^{16} (\mathrm{mod}\ 5^{4\alpha})$ разрешимо при любом α.

Выберем α так, что $5^{4\alpha} \approx c_1 n^{1/16}$ с достаточно малой постоянной c_1. Положим $t = t_0 + 5^{4\alpha} t_1$, где $0 < t_0 < 5^{4\alpha}$. Тогда $n - t^{16} = 5^{4\alpha} n_1$, где $n_1 \asymp n^{15/16}$. Параметр t_1 можно выбрать так, что $n_1 \equiv (\mathrm{mod}\ 5)$.

Положим $x = 5^{2\alpha} x_1$, $y = 5^{2\alpha} y_1$, $A = 5^{4\alpha} B$, $w = 5^{\alpha} w_1$. Тогда уравнение (4) примет вид

$$n_1 = x_1^2 + y_1^2 + 6Bz_1^2 + 2 \cdot 5^{8\alpha} B^3 + w_1^4. \tag{5}$$

Заметим, что $B \asymp n^{13/48}$. Поэтому коэффициент выделенной тернарной квадратичной формы удовлетворяет условию $B \asymp n_1^{13/45}$.

Таким образом, за счет слагаемого t^{16} мы добились того, что в соответствующей тернарной квадратичной форме дискриминант стал меньшей степенью представляемого числа.

Повторим это рассуждение. Пусть w_0 – наименьшее положительное решение сравнения $n_1 \equiv w_0^4 (\mathrm{mod}\ 5^{2\alpha})$, $o < w_0 < 5^{2\alpha}$. Показатель β выберем так, что $5^{2\beta} \approx c_2 n_1^{1/4}$, где c_2 – достаточно малая постоянная. Положим $w_1 = w_0 + 5^{2\beta} t_2$. Тогда $n_1 - w_1^4 = 5^{2\beta} n_2$. Положим $x_1 = 5^{\beta} x_2$, $y_1 = 5^{\beta} y_2$, $B = 5^{2\beta} C$. Тогда уравнение (5) запишется в виде

$$n_2 = x_2^2 + y_2^2 + 6Cz_1^2 + 2 \cdot 5^{8\alpha} C^3. \tag{6}$$

При этом, $n_2 \asymp n^{15/16 - 15/64} = n^{45/64}$, $C \asymp n^{13/48 - 15/64} = n^{7/192}$. Следовательно, $C \asymp n_2^{7/135}$.

До сих пор мы следовали изложению работы [1]. Далее мы выбираем C так, что $n_2 - 2 \cdot 5^{8\alpha + 4\beta} C^3$ делится на большой квадрат.

Параметры t_1 и t_2 можно выбрать так, что $(n_2, 11) = 1$. Сравнение $n_2 \equiv 2 \cdot 5^{8\alpha+4\beta} C^3 (\mathrm{mod}\ 11)$ имеет решение, поскольку $\left(\frac{-3}{11}\right) = -1$.

Следовательно, сравнение $n_2 \equiv 2 \cdot 5^{8\alpha+4\beta} C^3 (\bmod\ 11^{2\gamma})$ имеет решение при любом γ.

Выберем γ так, что $11^{2\gamma} \approx c_3 n^{7/480}$, где c_3 – достаточно малая постоянная. Положим

$$C = C_0 + 11^{2\gamma} t_3, \tag{7}$$

тогда $n_2 - 2 \cdot 5^{8\alpha+4\beta} C^3 = 11^{2\gamma} n_3$ и $11^{2\gamma} n_3 \asymp n_2$.

После этой замены уравнение (6) приобретает вид

$$11^{2\gamma} n_3 = x_2^2 + y_2^2 + 6Cz_1^2.$$

(Напомним, что $C \asymp (11^{2\gamma} n_3)^{7/135}$.)

Чтобы последнее уравнение удовлетворяло условиям теоремы 2 мы выбираем $C = p$, где p – простое число, принадлежащее прогрессии (7).

Оценки наименьшего простого в прогресии, модуль которой состоит из степеней простых чисел, принадлежащих фиксированному множеству, были получены в работых [6, 7]. Из результата работы [14] следует, в частности, что p можно выбрать порядка $p \asymp (11^{2\gamma})^{2.5} \asymp n^{7/192}$.

Таким образом, исходное уравнение свелось к уравнению

$$11^{2\gamma} n_3 = x_2^2 + y_2^2 + 6pz_2^2, \tag{8,}$$

для которого легко проверить все условия теоремы 2. (Все конгруенциальные условия удовлетворяются за счет выбора промежуточных параметров, а основное условие 3 теоремы 2 выполнено за счет выбора α, β, γ.)

Следовательно, в силу теоремы 2 уравнение (8) имеет, как минимум, одно решение.

Нам осталось только проверить, что u и v можно взять неотрицательными. Для этого заметим, что в уравнении (8), очевидно, $6pz_1^2 \leqslant 11^{2\gamma} n_3$ (т.е. $z_1^2 \leqslant n/6A$).

Кроме того, простое p можно выбрать так, что $n/2 < n - 2A^3 < 4A^3$. Отсюда следует, что $z_1^2 \leqslant A_1^2$, и мы можем взять z_1 таким, что $0 \leqslant z_1 \leqslant A$.

Вспоминая, что $z_1 = A - u$, имеем $0 \leqslant u \leqslant A$. Поскольку $u + v = 2A$, то и $v > 0$.

§2. Доказательство теоремы 2

Тета-ряд тернарной квадратичной формы $x^2 + y^2 + 6Pz^2$ является модулярной формой веса 3/2, ступени $24P$ и известного квадратичного характера χ.

Пусть $S_{3/2}^{(1)}(24P, \chi)$ – пространство параболических форм веса 3/2, являющихся собственными функциями всех операторов Гекке $T(p^2)$, где $p \nmid 6P$, которые при подъеме Шимуры переходят в параболические формы веса 2 и $S_{3/2}^{(0)}(24P, \chi)$ – пространство, порожденное θ-рядами с одним квадратом (которое при подъеме Шимуры переходит в ряда Эйзенштейна). Пространства $S_{3/2}^{(1)}$ и $S_{3/2}^{(0)}$ ортогональны по метрике Петерсона.

Обозначим через K размерность $S_{3/2}^{(1)}$ и пусть $\varphi_k(z)$, где $1 \leqslant k \leqslant K$, – ортонормированный базис $S_{3/2}^{(1)}$.

Для любой модулярной формы $f(z)$ веса 3/2, характера χ и уровня $24P$ обозначим через $\widehat{f}(n)$ соответствующий коэффициент Фурье,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\, e(nz).$$

Пусть $\theta(z)$ – тета-ряд квадратичной формы $x^2 + y^2 + 6Pu^2$, тогда

$$\theta(z) = E(z) + a_1\varphi_1(z) + \cdots + a_k\varphi_k(z) + \varphi(z),$$

где $E(z)$ – ряд Эйзенштейна, входящий в $\theta(z)$, и $\varphi(z)$ принадлежит $S_{3/2}^{(0)}(24P, \chi)$.

Как известно, если n не является полным квадратом и $(n, 6P) = 1$, то $\widehat{\varphi}(n) = 0$. Кроме того, $\widehat{E}(n) > c_\varepsilon n^{1/2-\varepsilon}/P^{1/2}$, где c_ε – постоянная, зависящая (не эффективно) от ε.

Из результатов Шимуры о подъеме и Делиня о собственных числах операторов Гекке $T(m)$ для веса 2 сразу же следут, что $\widehat{\varphi}_i(n) = O\big(|\widehat{\varphi}_i(t)| m^{1/2+\varepsilon}\big)$, где $\varepsilon > 0$ – произвольно мало.

Таким образом,

$$\widehat{\theta}(n) = E(n) + a_1\widehat{\varphi}_1(n) + \cdots + a_k\widehat{\varphi}_k(n) =$$

$$= \widehat{E}(n) + O\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{K} a_k^2}\; m^{1/2+\varepsilon} \sqrt{\sum_{k=1}^{K} |\widehat{\varphi}_k(t)|^2}\right).$$

В силу результата работ [8, 9]

$$\sum_{k=1}^{k} |\widehat{\varphi}_k(t)|^2 = O\bigl(t^{1-1/14+\varepsilon}\bigr).$$

Пусть

$$f(z) = a_1\varphi_1(z) + \cdots + a_k\varphi_k(z),$$

тогда $f(z)$ ортогональна $\varphi(z)$ и

$$\|\theta(z) - E(z)\| = \|f(z) + \varphi(z)\| \geqslant \|f(z)\|.$$

В силу результата теоремы 3,

$$\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_k^2} = \|f(z)\| = O\bigl(P^{1/4+\varepsilon}\bigr).$$

Поэтому

$$\widehat{\theta}(n) = \widehat{E}(n) + O\bigl(P^{1/4+\varepsilon} m^{1/2+\varepsilon} t^{1/2-1/28+\varepsilon}\bigr),$$

откуда следует утверждение теоремы.

§3. Доказательство теоремы 3

Выберем фундаментальную область для группы $\Gamma_0(24p)$ так, что она имеет параболические вершины в точках

$$\frac{1}{pa}, \quad \text{где} \quad a \mid 24, \quad a \neq 24; \quad \infty \tag{9}$$

и

$$\frac{1}{a}, \quad \text{где} \quad a \mid 24; \quad 0. \tag{10}$$

Мы имеем

$$\|f\|^2 = \sum_b \iint\limits_{D_b} |f(\tau)|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}},$$

где $\tau = x + iy$, D_b – часть фундаментальной области, имеющей параболическую вершину b.

Рассмотрим сначала D_∞,

$$\iint\limits_{D_\infty} |f(\tau)|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}} \leqslant \int\limits_0^1 dx \int\limits_{1/2}^{\infty} \left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n e(n\tau)\right|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}} =$$

$$= \int_{1/2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 \, e^{-4\pi n y} \frac{dy}{\sqrt{y}},$$

где

$$f(\tau) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n e(n\tau).$$

Мы имеем $f_n = \theta_n - E_n$, где

$$\theta_n = \sum_{n=n_1^2+n_2^2+6pn_3^2} 1$$

и E_n является коэффициентом Фурье соответствующего ряда Эйзенштейна–Зигеля.

Поскольку n_3 принимает $O\big(n^{1/2}/p^{1/2}\big)$ возможных значений и при фиксированном n_3 сумма $n_1^2 + n_2^2$ принимает $O(n^{\varepsilon})$ возможных значений, имеем

$$\theta_n = O\big(n^{1/2+\varepsilon}/p^{1/2} + n^{\varepsilon}\big),$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольно.

Как известно, значение E_n удовлетворяет той же оценке. Таким образом,

$$\iint\limits_{D_\infty} |f(\tau)|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}} = O\bigg(\int_{1/2}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\frac{n^{1+\varepsilon}}{p} + n^{\varepsilon}\Big) e^{-4\pi n y} \, dy = O(p^{\varepsilon}).$$

Во всех остальных точках вида (9) мы имеем ту же оценку

$$\iint\limits_{D_b} |f(\tau)|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}} = O(p^{\varepsilon}).$$

Ниже мы продемонстрируем это на примере точки $b = 1/p$.

Пусть теперь $b = 0$. Имеем

$$\iint\limits_{D_0} |f(\tau)|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}} = \iint\limits_{\alpha^{-1}(D_0)} |f \circ \alpha|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}},$$

где α – преобразование вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -24p & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad f \circ \alpha = Cf(\alpha(\tau))(-24p\tau)^{-3/2}(24p)^{3/4}, \quad |C| = 1.$$

Преобразование α нормализует группу $\Gamma_0(24p)$, поскольку при любом β из $\Gamma_0(24p)$ мы имеем

$$\alpha^{-1}\beta\alpha = \frac{1}{24p}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 24p & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ 24pc & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -24p & 0 \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} d & c \\ 24pb & a \end{pmatrix} \in \Gamma_0(24p).$$

Таким образом, $f \circ \alpha$ является параболической формой для группы $\Gamma_0(24p)$.

С другой стороны,

$$\theta(\alpha(\tau)) = \theta_3^2(2\alpha(\tau))\theta_3(12p\alpha(\tau)),$$

где

$$\theta_3(\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i n^2 \tau}.$$

Как известно,

$$\theta_3\Big(-\frac{1}{\tau}\Big) = (i\tau)^{1/2}\theta_3(\tau).$$

Следовательно,

$$\theta\Big(-\frac{1}{24p\tau}\Big) = c_1\frac{(p\tau)^{3/2}}{p^{1/2}}\widehat{\theta}(\tau),$$

где $\widehat{\theta}(\tau)$ является тета-рядом квадратичной формы $6pn_1^2 + 6pn_2^2 + n_3^2$. Здесь и далее c_1, $c_2, \ldots$ – абсолютные постоянные.

Таким образом,

$$\theta \circ \alpha = c_1 p^{1/4}\widehat{\theta}(\tau)$$

и

$$E \circ \alpha = c_1 p^{1/4}\widehat{E}(\tau),$$

где $\widehat{E}(\tau)$ является рядом Эйзенштейга–Зигеля квадратичной формы $6pn_1^2 + 6pn_2^2 + n_3^2$.

Поэтому

$$\iint\limits_{D_0} |f(\tau)|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}} = O\biggl(p^{1/2} \iint\limits_{\alpha^{-1}(D_0)} |\widehat{\theta}(\tau) - \widehat{E}(\tau)|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}}\biggr).$$

Ширина точки O равна $24p$ (см. [13]), поэтому $\alpha^{-1}(D_0)$ состоит из $24p$ копий фундаментальной области полной модулярной группы, уменьшенной в $24p$ раз. Последнее утверждение справедливо, поскольку

$$\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{24p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$\iint\limits_{D_0} |f(\tau)|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}} = O\biggl(p^{1/2} \int\limits_0^1 dx \int\limits_{1/48p}^{\infty} \Bigl|\sum_{n=1}^{\infty} (\widehat{\theta}_n - \widehat{E}_n) e(n\tau)\Bigr|^2 \frac{dy}{\sqrt{y}}\biggr).$$

Последний интеграл равен

$$O\biggl(\int\limits_{1/48p}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\theta}_n|^2 e^{-4\pi ny} \frac{dy}{\sqrt{y}}\biggr) + O\biggl(\int\limits_{1/48p}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{E}_n|^2 e^{-4\pi ny} \frac{dy}{\sqrt{y}}\biggr).$$

Легко видеть, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{\theta}_n|^2 \int\limits_{1/48p}^{\infty} e^{-4\pi ny} \frac{dy}{\sqrt{y}} = O\biggl(\sum_{n \leqslant p \log^2 p} \frac{|\widehat{\theta}_n|^2}{\sqrt{n}}\biggr) + O(1).$$

Кроме того, при $n < 6p$, очевидно, если $n = n_3^2$, то $\widehat{\theta}_n = 1$, в противном случае $\widehat{\theta}_n = 0$. При $6p \leqslant n < p \log^2 p$ коэффициент $\widehat{\theta}_n = O(n^{1+\varepsilon}/p)$ и

$$\sum_{6p \leqslant n < p \log^2 p} \frac{|\theta_n|^2}{\sqrt{n}} = O(p^{\varepsilon}).$$

Таким образом,

$$\sum_{n \leqslant p \log^2 p} \frac{|\theta_n|^2}{\sqrt{n}} = O(p^{\varepsilon}).$$

Поскольку $\widehat{E}_n = O(n^{1/2+\varepsilon}/p)$ имеем

$$\int\limits_{1/48p}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |\widehat{E}_n|^2\, e^{-4\pi n y} \frac{dy}{\sqrt{y}} = O(p^{\varepsilon}).$$

Окончательно,

$$\iint\limits_{D_0} |f(\tau)|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}} = O\big(p^{1/2+\varepsilon}\big).$$

Для остальных параболических вершин b из (10) оценка будет такой же, как и для $b = 0$.

Рассмотрим теперь точку $b = 1/p$. Рассмотрим преобразование

$$\alpha = \begin{pmatrix} 24 & 1 \\ 24p\xi & 24\rho \end{pmatrix} \quad \text{где} \quad 24\rho - p\xi = 1, \quad (p,\xi) = 1, \quad |\alpha| = 24.$$

Легко видеть, что α^{-1} переводит точку $1/p\xi$, которая эквивалентна $1/p$, в ∞. Преобразование α нормализует группу $\Gamma_0(24p)$.

Повторяя рассуждения, которые мы проводили для точки $b = 0$, имеем

$$\iint\limits_{D_{1/p}} |f(\tau)|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}} = \iint\limits_{D_{1/p\xi}} |f(\tau)|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}} = \iint\limits_{\alpha^{-1}(D_{1/p\xi})} |f \circ \alpha|^2 \frac{dxdy}{\sqrt{y}},$$

где

$$f \circ \alpha = C f(\alpha(\tau))(24p\xi\tau + 24\rho)^{-3/2}(24)^{3/4}, \quad |C| = 1.$$

Вычислим $\theta(\alpha(\tau)) = \theta_3^2(2\alpha(\tau))\theta_3(12p\alpha(\tau))$. Из свойств θ_3 следует, что

$$\theta_3^2(2\alpha(\tau)) = \theta_3^2\Big(\frac{24\tau+1}{12\rho\xi\tau+12\rho}\Big) = c_2 \frac{12\rho\xi\tau+12\rho}{24\tau+1}\theta_3^2\Big(-\frac{12\rho\xi\tau+12\rho}{24\tau+1}\Big) =$$

$$c_2 \frac{12p\xi\tau+12\rho}{24\tau+1}\theta_3^2\Big(-12\rho + \frac{12\tau}{24\tau+1}\Big) = c_2 \frac{12p\xi\tau+12\rho}{24\tau+1}\theta_3^2\Big(\frac{12\tau}{24\tau+1}\Big) =$$

$$c_3 \frac{p\xi\tau+\rho}{\tau}\theta_3^2\Big(-2-\frac{1}{12\tau}\Big) = c_4(p\xi\tau+\rho)\theta_3^2(12\tau). \tag{11}$$

Вычислим теперь $\theta_3(12p\alpha(\tau))$:

$$\theta_3(12p\alpha(\tau)) = \theta_3\Big(\frac{24p\tau + p}{2p\xi\tau + 2\rho}\Big) = c_5\frac{(24p\xi\tau + 24\rho)^{1/2}}{(24p\tau + p)^{1/2}}\theta_3^2\Big(-\frac{2p\xi\tau + 2\rho}{24p\tau + p}\Big).$$

Для определенности, возьмем p вида $p = 24k+1$. Тогда $\xi = 24r - 1$. Преобразуем выражение, стоящее в последних скобках,

$$-\frac{2p\xi\tau + 2\rho}{24p\tau + p} = -\frac{2p(24r-1)\tau + 2\rho}{24p\tau + p} = -2r - \frac{-2k - 2p\tau}{24p\tau + p}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\theta_3(12p\alpha(\tau)) &= c_6\frac{(24p\xi\tau + 24\rho)^{1/2}}{(p\tau + k)^{1/2}}\theta_3\Big(-\frac{24p\tau + p}{2p\tau + 2k}\Big) = \\ &= c_6\frac{(24p\xi\tau + 24\rho)^{1/2}}{(p\tau + k)^{1/2}}\theta_3\Big(-12 - \frac{p - 24k}{2p\tau + 2k}\Big) = \\ &= c_7(24p\xi\tau + 24\rho)^{1/2}\theta_3(2p\tau). \qquad (12)\end{aligned}$$

Собирая вместе (11) и (12), имеем

$$\theta\Big(\frac{24\tau + 1}{24p\xi\tau + 24\rho}\Big) = c_8(24p\xi\tau + 24\rho)^{3/2}\widehat{\theta}(\tau),$$

где $\widehat{\theta}(\tau)$ – тета-ряд квадратичной формы $6x^2 + 6y^2 + pz^2$.

Действуя так же, как и при $b = \infty$, имеем оценку

$$\iint\limits_{D_{1/p}} |f(\tau)|^2\frac{dxdy}{\sqrt{y}} = O\big(p^{\varepsilon}\big).$$

Выберем теперь одну точку из (10). Например, $b = 1/4$. Нормализатором в этом случае является преобразование

$$\alpha = \begin{pmatrix} 3p & 1 \\ 12\lambda p & 3\nu p \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad 3p\nu - 4\lambda = 1, \quad |\alpha| = 3p.$$

Для определенности, мы сначала рассмотрим случай

$$p = 1 + 8k, \quad \nu = 8r - 1. \qquad (13)$$

Таким образом,

$$f\circ\alpha = Cf(\alpha(\tau))(12\lambda p\tau+3p\nu)^{-3/2}(3p)^{3/4}, \quad |C|=1,$$

и мы имеем

$$\iint\limits_{D_{1/4}} |f(\tau)|^2\frac{dxdy}{\sqrt{y}} = \iint\limits_{\alpha^{-1}(D_{1/4})} |f\circ\alpha|^2\frac{dxdy}{\sqrt{y}}.$$

Рассмотрим $\theta(\alpha(\tau))$,

$$\theta(\alpha(\tau)) = \theta_3^2(2\alpha(\tau))\theta_3(12p\alpha(\tau)).$$

Имеем

$$\theta(\alpha(\tau)) = \theta_3^2\left(\frac{2(3p\tau+1)}{12p\lambda\tau+3p\nu}\right)\theta_3\left(\frac{4(3p\tau+1)}{4\lambda\tau+\nu}\right). \tag{14}$$

Для первого множителя после очевидных преобразований получаем

$$\theta_3^2\left(\frac{2(3p\tau+1)}{12p\lambda\tau+3p\nu}\right) = c_9\frac{12p\lambda\tau+3p\nu}{3p\tau+1}\theta_3^2\left(-\frac{12p\lambda\tau+3p\nu}{2(3p\tau+1)}\right).$$

Поскольку

$$-\frac{12p\lambda\tau+3p\nu}{2(3p\tau+1)} = -\frac{2\lambda(2(3p\tau+1))+3p\nu-4\lambda}{2(3p\tau+1)} = -2\lambda-\frac{1}{2(3p\tau+1)},$$

получаем

$$\theta_3^2\left(\frac{2(3p\tau+1)}{12p\lambda\tau+3p\nu}\right) = c_{10}(12\lambda p\tau+3p\nu)\theta_3^2(2(3p\tau+1)) =$$
$$= c_{10}(12\lambda p\tau+3p\nu)\theta_3^2(6p\tau). \tag{15}$$

Преобразуем теперь второй множитель из (14),

$$\theta_3\left(\frac{12p\tau+4}{4\lambda\tau+\nu}\right) = c_{11}p^{-1/2}\frac{(12p\lambda\tau+3p\nu)^{1/2}}{(12p\tau+4)^{1/2}}\theta_3\left(-\frac{4\lambda\tau+\nu}{12p\tau+4}\right).$$

Поскольку $4\lambda = 3p\nu-1$, имеем в силу (13)

$$\frac{4\lambda\tau+\nu}{12p\tau+4} = \frac{(3p\nu-1)\tau+\nu}{12p\tau+4} = \frac{3p(8r-1)\tau-\tau+\nu}{12p\tau+4} = 2r-\frac{3p\tau+\tau+1}{12p\tau+4}.$$

Таким образом,

$$\theta_3\left(\frac{12p\tau+4}{4\lambda\tau+\nu}\right)=c_{12}p^{-1/2}\frac{(12p\lambda\tau+3p\nu)^{1/2}}{(3p\tau+\tau+1)^{1/2}}\theta_3\left(-\frac{12p\tau+4}{3p\tau+\tau+1}\right).$$

Поскольку

$$\frac{12p\tau+4}{3p\tau+\tau+1}=4-\frac{4\tau}{3p\tau+\tau+1},$$

получаем

$$\theta_3\left(\frac{12p\tau+4}{4\lambda\tau+\nu}\right)=c_{13}p^{-1/2}\frac{(12p\lambda\tau+3p\nu)^{1/2}}{\tau^{1/2}}\theta_3\left(-\frac{3p\tau+\tau+1}{4\tau}\right)=$$
$$=c_{13}p^{-1/2}\frac{(12p\lambda\tau+3p\nu)^{1/2}}{\tau^{1/2}}\theta_3\Big(-1-\frac{1}{4\tau}\Big).$$

Так как

$$\theta_3\Big(-1-\frac{1}{4\tau}\Big)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-\pi i n^2(-1-\frac{1}{4\tau})}=$$
$$=\theta_3\Big(-\frac{1}{\tau}\Big)-\theta_3\Big(-\frac{1}{4\tau}\Big)+\theta_3\Big(-\frac{1}{\tau}\Big)=2\theta_3\Big(-\frac{1}{\tau}\Big)-\theta_3\Big(-\frac{1}{4\tau}\Big),$$

имеем

$$\theta_3\left(\frac{12p\tau+4}{4\lambda\tau+\nu}\right)=c_{14}p^{-1/2}(12p\lambda\tau+3p\nu)^{1/2}\theta_3(\tau)+$$
$$+c_{15}p^{-1/2}(12p\lambda\tau+3p\nu)^{1/2}\theta_3(4\tau)$$

С учетом равенства (15) получаем

$$\theta(\alpha(\tau))=c_{16}p^{-1/2}(12p\lambda\tau+3p\nu)^{3/2}\theta_3^2(6p\tau)\theta_3(\tau)+$$
$$+c_{17}p^{-1/2}(12p\lambda\tau+3p\nu)^{3/2}\theta_3^2(6p\tau)\theta_3(4\tau).$$

Последнее соотношение совершенно аналогично тому, которое мы имели для точки $b=0$. Действуя так же, как в этом случае, получаем оценку

$$\iint\limits_{D_{1/4}}|f(\tau)|^2\frac{dxdy}{\sqrt{y}}=O\big(p^{1/2+\varepsilon}\big).$$

Пусть теперь по-прежнему $b = 1/4$, но вместо условий (13) мы имеем

$$p = 8k + 3, \quad \text{тогда} \quad \nu = 8r + 1. \tag{16}$$

При вычислении $\theta_3^2(2\alpha(\tau))$ мы не использовали условие (13), так что равенство (15) остается в силе.

При вычислении $\theta_3(12p\alpha(\tau))$ имеем по аналогии с предыдущим случаем

$$\frac{4\lambda\tau+\nu}{12p\tau+4} = \frac{3p(8r+1)\tau-\tau+\nu}{12p\tau+4} = 2r + \frac{3p\tau-\tau+1}{12p\tau+4}.$$

Таким образом,

$$\theta_3\left(\frac{12p\tau+4}{4\lambda\tau+\nu}\right) = c_{18}p^{-1/2}\frac{(12p\lambda\tau+3\nu p)^{1/2}}{(3p\tau-\tau+1)^{1/2}}\theta_3\left(-\frac{12p\tau+4}{3p\tau-\tau+1}\right).$$

Поскольку

$$\frac{12p\tau+4}{3p\tau-\tau+1} = 4 + \frac{4\tau}{3p\tau-\tau+1},$$

получаем

$$\theta_3\left(\frac{12p\tau+4}{4\lambda\tau+\nu}\right) = c_{19}p^{-1/2}\frac{(12p\lambda\tau+3\nu p)^{1/2}}{\tau^{1/2}}\theta_3\left(-\frac{3p\tau-\tau+1}{4\tau}\right) =$$
$$= c_{19}p^{-1/2}\frac{(12p\lambda\tau+3\nu p)^{1/2}}{\tau^{1/2}}\theta_3\left(-\frac{1}{4\tau}\right).$$

Следовательно, в этом случае мы имеем

$$\theta_3\left(\frac{12p\tau+4}{4\lambda\tau+\nu}\right) = c_{20}p^{-1/2}(12p\lambda\tau+3p\nu)^{1/2}\theta_3(4\tau)$$

и

$$\theta(\alpha(\tau)) = c_{21}p^{-1/2}(12p\lambda\tau+3p\nu)^{3/2}\theta_3^2(6p\tau)\theta_3(4\tau).$$

В заключение приведем нормализующие преобразования α для всех остальных двенадцати точек b.

Разложения в непрерывные дроби для $2\alpha(\tau)$ и $12p\alpha(\tau)$ производятся аналогично рассмотренным случаям.

Имеем:

$$b = 1/2, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 12p & 1 \\ 24p\nu & 12p\xi \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = 24p(6p\xi - \nu) = 24p;$$

$$b = 1/8, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 3p & 1 \\ 24p\lambda & 3p\nu \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = 3p(3p\nu - 8\lambda) = 3p;$$

$$b = 1/3, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 8p & 1 \\ 24p\xi & 8p\nu \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = 8p(8p\nu - 3\xi) = 8p;$$

$$b = 1/6, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 4p & 1 \\ 24p\xi & 4p\nu \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = 8p(2p\nu - 3\xi) = 8p;$$

$$b = 1/12, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 2p & 1 \\ 24p\xi & 2p\nu \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = 4p(p\nu - 6\xi) = 4p;$$

$$b = 1/24, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} p & 1 \\ 24p\xi & p\nu \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = p(p\nu - 24\xi) = p;$$

$$b = 1/2p, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 12 & 1 \\ 24\xi & 12\nu \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = 24(6p\nu - p\xi) = 24;$$

$$b = 1/4p, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 24p\xi & 6\nu \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = 12(3\nu - 2p\xi) = 12;$$

$$b = 1/8p, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 24p\xi & 3\nu \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = 3(3\nu - 8p\xi) = 3;$$

$$b = 1/3p, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 24p\xi & 8\nu \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = 8(8\nu - 3p\xi) = 8;$$

$$b = 1/6p, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 24p\xi & 4\nu \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = 8(2\nu - 3p\xi) = 8;$$

$$b = 1/12p, \qquad \alpha = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 24p\lambda & 2\nu \end{pmatrix}, \qquad |\alpha| = 4(\nu - 6p\lambda) = 4.$$

Литература

1. Е. П. Голубева, *О неоднородных уравнениях Варинга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 65–68.
2. C. Hooley, *On a new approach to various problems of Waring's type.* Recent progress in analytic number theory. Vol. I (Durham, 1979). London, 1981, 127–191.
3. Yu. V. Linnik, *Additive problems involving squares, cubes, and almost primes.* — Acta Arithm. **21** (1972), 413–422.
4. W. Duke, R. Schulze-Pillot, *Representation of integers by positive ternary quadratic forms and equidistribution of lattive points on ellipsoids.* — Invent. Math. **99** (1990), 49–57.

5. V. Blomer, *Uniform bounds for Fourier coefficients of theta-series with arithmetic applications.* — Acta Arithm. **114(1)** (2004), 1–21.
6. M. B. Barban, Yu. V. Linnik, N. G. Tschudakov, *On prime numbers in an arithmetic progression with a prime-power difference.* — Acta Arithm. **9** (1964), 375–390.
7. P. X. Gallagher, *Primes in progressions to prime-power modulus.* — Invent. Math. **16** (1972), 191–201.
8. H. Iwaniec, *Fourier coefficients of modular forms of half-integral weight.* — Invent. Math. **87** (1987), 385–401.
9. W. Duke, *Hyperbolic distribution problems and half-integral weight Maass forms.* — Invent. Math. **99** (1990), 49–57.
10. Е. П. Голубева, *Применение подъема Шимуры к задаче о представлении больших чисел тернарными квадратичными формами.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **144** (1985), 27–37.
11. J. B. Conray, H. Iwaniec, *The cubic moment of central values of automorphic L-functions.* — Ann. of Math. **151** (2000), 1175–1216.
12. В. А. Быковский, *Формула следа для скалярного произведения ряджов Гекке и ее приложения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **226** (1996), 14–36.
13. H. Iwaniec, *Topics in classical automorphic forms.* AMS, Providence 1997.

Golubeva E. P. A bound for the representability of large numbers by ternary quadratic forms and nonhomogeneous Waring equations.

It is proved that equation $n = x^2 + y^2 + 6pz^2$ (p is a large fixed prime) is solvable if natural congruencial conditions are satisfied and $nm^{12} > p^{21}$.

As a consequence the solvability of the equation $n = x^2 + y^2 + u^3 + v^3 + z^4 + w^{16} + t^{4k+1}$ is proved for all sufficiently large n.

Государственный
университет
телекоммуникаций
им. М. А. Бонч-Бруевича

Поступило 9 сентября 2008 г.

E-mail: elena_golubeva@mail.ru