Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 356, 2008 г.

О. Ю. Иванова

ПОРЯДКИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ОБРАЗУЮЩИХ K-ГРУППЫ СТАНДАРТНОГО ДВУМЕРНОГО ЛОКАЛЬНОГО ПОЛЯ

Введение. Для двумерного локального поля K рассматривается подгруппа факторгруппы второй милноровской группы по подгруппе бесконечно делимых элементов, порожденная элементами $\{a,b\}$, такими, что $a-1$ принадлежит максимальному идеалу K. При этом предполагается, что K обладает следующими свойствами: $\operatorname{char} K = 0$, $\operatorname{char} \overline{K} = p$, поле вычетов поля $\overline{K}$ конечно, K содержит первообразный корень p-й степени из единицы, и $e(K/k) = 1$, где k – максимальное алгебраическое подрасширение расширения $K/\mathbb{Q}_p$. В [4], §1, описана система образующих рассматриваемой подгруппы: она состоит из элементов вида $\{1+[\theta]\pi^i t^j, t\}$ при $p \nmid i$, вида $\{1+[\theta]\pi^i t^j, \pi\}$ при $p \mid i$, $p \nmid j$, а также $\{1+[\theta](\zeta_p-1)^p, t\}$ и $\{1+[\theta](\zeta_p-1)^p, \pi\}$, где π, t – локальные параметры K, и $[\theta]$ – представитель элемента из $K^{(0)}$. В [2], §10, §11 были получены оценки на порядки этих образующих в случаях $K = \mathbb{Q}_p\{\{t\}\}$, $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)\{\{t\}\}$ и в случае произвольного абсолютно неразветвленного поля K.

Пусть K – произвольное поле, удовлетворяющее описанным условиям, и π – униформизирующая K, принадлежащая k. Тогда элемент $\{1+[\theta]t^j, \pi\}$ при $\theta \neq 0$, $j \neq 0$ не является элементом кручения по [2], предложение 2.5, а элемент $\{u,t\}$ при $u \in U_k$ является элементом кручения тогда и только тогда, когда $u^n = 1$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, причем его порядок равен минимальному такому n по [2], теорема 9.2. Остальные образующие являются элементами кручения по [2], следствие 7.1 и предложение 7.9. Наша цель – получить оценки на их порядки.

В §2 доказана лемма, позволяющая получать оценки снизу для порядков с помощью норм из круговых расширений поля K. А именно, доказано, что порядок образующей $\{1+[\theta]\pi^i t^j, t\}$ или $\{1+[\theta]\pi^i t^j, \pi\}$ не меньше p^n, если для любого $\eta \in K^{(0)}$ в поле, полученном из K присоединением корня p^n-й степени из единицы, есть элемент, норма которого сравнима по модулю $(K^*)^p$ с элементом, близким к

$1 + [\eta]\pi^{\frac{pe_K}{p-1}-i}t^{-j}$. В §3 строятся подходящие элементы из круговых расширений и получаются оценки снизу на порядки образующих.

В §5 получены соотношения между порядками образующих. Доказано, что множество порядков ограничено снизу, и минимальное значение порядка M_0 достигается на образующей $\{1+\pi^{\frac{pe_K}{p-1}}t^{-1}, \pi\}$. Кроме того, получена оценка сверху для отношения порядка произвольной образующей к M_0 и доказано, что для любого $n \in \mathbb{N}_0$ существует бесконечно много образующих, порядки которых равны $p^n M_0$.

В §4 и §6 рассматривается случай, когда $K = K_0(\sqrt[l]{\zeta_{p^n} - 1})$, где $p \nmid l$ и K_0 – абсолютно неразветвленное поле. В этом случае получены более сильные оценки снизу, чем в §3, и с помощью методов из [2], §7, получены оценки сверху.

1. Определения и обозначения

Пусть p – фиксированное простое число, $p > 2$.

Через $v_p(x)$ обозначим p-адическое нормирование p-адического числа x.

Через ζ_m будем обозначать первообразный корень m-й степени из единицы, и через μ_{p^n} – множество всех корней p^n-й степени из единицы, $\mu_{p^\infty} = \bigcup\limits_n \mu_{p^n}$.

Множество $\mathbb{Z}^2$ предполагаем лексикографически упорядоченным в следующем смысле: $(a, b) < (c, d)$, если $b < d$ или $b = d$, $a < c$.

Для локального поля f обозначим через v_f его нормирование, через $\overline{f}$ – его поле вычетов, и, если $\operatorname{char} \overline{f} = p$, положим $e_f = v_f(p)$. Через O_f и U_f обозначим кольцо целых и группу единиц f.

Пусть F – двумерное локальное поле. Будем обозначать $F^{(1)} = \overline{F}$, $F^{(0)} = \overline{F^{(1)}}$. Для всех рассматриваемых двумерных полей F предполагаем, что $\operatorname{char} F = 0$, $\operatorname{char} \overline{F} = p$, поле $F^{(0)}$ конечно, и F содержит первообразный корень p-й степени из единицы. Введем обозначения:

$\overline{v}_F = (v_F^{(1)}, v_F^{(2)}) : F \to \mathbb{Z}^2$ – нормирование ранга 2 поля F, нормирование $v_F^{(2)}$ будем также обозначать через v_F;

O_F – кольцо целых F;

$U_F = O_F^*$ – группа единиц F;

$\mathfrak{M}_F$ – максимальный идеал O_F;

$V_F = \{1 + a \mid \overline{v}_F(a) > 0\}$;

$U_F(n_1, n_2) = \{1 + a \mid \overline{v}_F(a) \geqslant (n_1, n_2)\}$;

$U_F(n) = \{1 + a \mid v_F^{(2)}(a) \geqslant n\}$;

$\mathfrak{R}_F$ – каноническая подгруппа F^*, состоящая из представителей ненулевых элементов $F^{(0)}$;

$[\theta]$ – элемент $\mathfrak{R}_F$, который представляет элемент θ из $F^{(0)}$.

Нормированию $\overline{v}_F$ соответствуют локальные параметры. Элемент π, такой, что $\overline{v}_F(\pi) = (0,1)$, будем называть униформизирующей F, а элемент t, такой, что $\overline{v}_F(t) = (1,0)$, – вторым локальным параметром F.

Определение 1.1. *Подполем констант двумерного поля F называется максимальное поле $f \subset F$, являющееся алгебраическим расширением $\mathbb{Q}_p$.*

Определение 1.2. *Двумерное поле F называется стандартным, если $e(F/f) = 1$, где f – подполе констант F.*

По [10] стандартное двумерное поле F изоморфно $f\{\{t\}\}$, где t – произвольный второй локальный параметр F.

Определение 1.3. *Пусть F – дискретно нормированное поле, $\operatorname{char} \overline{F} = p$, и L/F – циклическое расширение степени p. Скачком ветвления расширения L/F называется*

$$h(L/F) = v_L\Big(\frac{\sigma\pi_L}{\pi_L} - 1\Big),$$

где π_L – униформизирующая L, и σ – образующая $\operatorname{Gal}(L/F)$.

Определение 1.4. *Пусть L/F – конечное сепарабельное расширение полных дискретно нормированных полей. Глубиной ветвления расширения L/F называется*

$$d(L/F) = \frac{1}{e_L} \min\{v_L(\operatorname{Tr}_{L/F} a/a) \mid a \in L^*\}.$$

Если L/F – циклическое расширение степени p двумерных полей, то, по [7], лемма 2–10, его скачок ветвления и глубина ветвления связаны соотношением $d(L/F) = \frac{p-1}{e_L} h(L/F)$.

Пусть F – дискретно нормированное поле. Обозначим через K_2F вторую милноровскую K-группу поля F, и через VK_2F – подгруппу K_2F, порожденную элементами $\{u, a\}$, где $u \in V_F$. Положим

$$VK_2'F = VK_2F/\cap_{s\geqslant 1} sVK_2F,$$

и через $U(1)K_2'F$ будем обозначать подгруппу $VK_2'F$, порожденную элементами $\{a,b\}$, где $a \in U_F(1)$.

При $n \geqslant 1$ обозначим n-ю группу Мики двумерного поля F через $M_{n,F}$, то есть

$$M_{n,F} = (\mathrm{N}_{F(\zeta_{p^n})/F}\, F(\zeta_{p^n})^*)(F^*)^p.$$

Далее предполагаем:
K – стандартное двумерное поле;
k – подполе констант K;
$e = e_K$, $M_n = M_{n,K}$;
π, t – локальные параметры K, причем $\pi \in k$;

$$I = \Big\{(i,j,\theta) \mid i,j \in \mathbb{Z},\ i > 0,$$
$$(j,i) < (0, \frac{pe}{p-1}),\ p \nmid (i,j),\ \theta \in K^{(0)},\ \theta \neq 0\Big\};$$

при $(i,j,\theta) \in I$ положим

$$x_{i,j,\theta} = \begin{cases} \{1+[\theta]\pi^i t^j, \pi\}, & p \mid i \\ \{1+[\theta]\pi^i t^j, t\}, & p \nmid i \end{cases}.$$

2. Оценки снизу и группы Мики

Лемма 2.1. *Пусть $n \in \mathbb{N}$ и L/K – циклическое расширение степени p. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *существует циклическое расширение K_n/K поля K степени p^n, содержащее L;*

2) *$L = K(\sqrt[p]{a})$ для некоторого $a \in M_n$.*

Доказательство. См. [8], §1, следствие к предложению 3. $\square$

Определим отображение взаимности

$$\Psi_K : K_2'K \to \mathrm{Gal}(K^{ab}/K),$$

следуя [5].

Пусть K^{ur} – композит всех неразветвленных расширений K, и φ_K – автоморфизм Фробениуса поля K, то есть образующая группы $\mathrm{Gal}(K^{ur}/K)$, которая отображается на образующую φ группы

$\mathrm{Gal}(K^{(0)\,sep}/K^{(0)})$. Для конечного расширения Галуа L/K построим изоморфизм

$$\Upsilon_{L/K} : \mathrm{Gal}(L/K)^{ab} \to K_2'K/\,\mathrm{N}_{L/K}\,K_2'L.$$

Пусть $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$, и L^{ur} – композит всех неразветвленных расширений L. Обозначим через $\tilde{\sigma}$ элемент $\mathrm{Gal}(L^{ur}/K)$, такой, что $\tilde{\sigma}|_L = \sigma$ и $\tilde{\sigma}|_{K^{ur}} = \varphi_K^n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$; обозначим через K_σ поле неподвижных элементов $\tilde{\sigma}$, и выберем локальные параметры π_σ, t_σ поля K_σ. Тогда отображение

$$\sigma \mapsto \mathrm{N}_{K_\sigma/K}\{\pi_\sigma, t_\sigma\} \mod K_2'K/\,\mathrm{N}_{L/K}\,K_2'L$$

корректно определено, и $\Upsilon_{L/K}$ – изоморфизм, индуцированный этим отображением. Отображением взаимности Ψ_K называется отображение, индуцированное гомоморфизмами, обратными к $\Upsilon_{L/K}$.

Определим символ Востокова, следуя [9], а именно, определим его как спаривание

$$(\ ,\ )_V : K_2'K/pK_2'K \times K^*/K^{*p} \to \mu_p,$$

удовлетворяющее условию $(\alpha,\beta)_V = (\sqrt[p]{\beta})^{\Psi_K(\alpha)-1}$. Из этого определения следует, что, если $(\alpha,\beta)_V \neq 1$, то отображение $\Psi_K(\alpha)$ действует нетривиально на $K(\sqrt[p]{\beta})$.

Лемма 2.2. *Для любого $\theta \in K^{(0)} \setminus \{0\}$ существует $\eta_\theta \in K^{(0)}$, такой, что*

$$(1+[\theta]\pi^i t^j, 1+[\eta_\theta]\pi^{\frac{pe}{p-1}-i}t^{-j}, t)_V \neq 1,$$

если $p \nmid i$, $0 < (j,i) < (0, \frac{pe}{p-1})$, и

$$(1+[\theta]\pi^i t^j, 1+[\eta_\theta]\pi^{\frac{pe}{p-1}-i}t^{-j}, \pi)_V \neq 1,$$

если $p \nmid j$, $0 < (j,i) < (0, \frac{pe}{p-1})$.

Доказательство. См. [9], §3. □

Лемма 2.3. *Пусть $a_1, a_2 \in O_K$ и i_1, j_1, i_2, j_2 таковы, что $(j_1, i_1) > 0$ и $(j_1+j_2, i_1+i_2) > (0, \frac{pe}{p-1})$. Тогда*

$$\{1+\pi^{i_1}t^{j_1}a_1, 1+\pi^{i_2}t^{j_2}a_2\} \in pK_2'K.$$

Доказательство. Утверждение следует из равенства

$$\{1+\pi^{i_1}t^{j_1}a_1, 1+\pi^{i_2}t^{j_2}a_2\} = \left\{\pi^{i_1}t^{j_1}a_1(1+\pi^{i_2}t^{j_2}a_2), 1+\frac{\pi^{i_1+i_2}t^{j_1+j_2}a_1a_2}{1+\pi^{i_1}t^{j_1}a_1}\right\}$$

и того, что $1+\pi^{\frac{pe}{p-1}}\mathfrak{M}_K \subset V_K^p$. □

Лемма 2.4. *Пусть* $(i, j, \theta) \in I$, $n \in \mathbb{N}$, *и для любого* $\eta \in K^{(0)} \setminus \{0\}$ *существует* $w_\eta \in M_n$, *такой, что*

$$w_\eta \equiv 1 + [\eta]\pi^{\frac{pe}{p-1}-i}t^{-j} \mod \pi^{\frac{pe}{p-1}-i}t^{-j}\mathfrak{M}_K.$$

Тогда имеем $p^{n-1}x_{i,j,\theta} \neq 0$ *в* $VK_2'K$.

Доказательство. Пусть η_θ такой, как в лемме 2.2, и $w = w_{\eta_\theta}$. Тогда $w = (1 + [\eta_\theta]\pi^{\frac{pe}{p-1}-i}t^{-j})w'$, где $w' = 1 + \pi^{i'}t^{j'}u$ для некоторых $u \in U_K$, и i', j' таких, что $(j + j', i + i') > (0, \frac{pe}{p-1})$. По лемме 2.2 имеем

$$(x_{i,j,\theta}, 1 + [\eta_\theta]\pi^{\frac{pe}{p-1}-i}t^{-j})_V \neq 1,$$

а по лемме 2.3 имеем $(x_{i,j,\theta}, w')_V = 1$, следовательно, $(x_{i,j,\theta}, w)_V \neq 1$.

По лемме 2.1 для $L = K(\sqrt[p]{w})$ существует циклическое расширение M/K степени p^n, содержащее L/K. Отображение $\Psi_K(x_{i,j,\theta})$ действует нетривиально на L, следовательно, образ $\Psi_K(x_{i,j,\theta})$ в $\mathrm{Gal}(M/K)$ порождает эту группу. В частности, $\Psi_K(x_{i,j,\theta})^{p^{n-1}} \neq 1$, и $p^{n-1}x_{i,j,\theta} \neq 0$. □

3. Подходящие элементы из групп Мики

Сформулируем несколько вспомогательных лемм.

Лемма 3.1. *Пусть* $F \subset E$ *– полные дискретно нормированные поля с униформизирующими* π_F, π_E *соответственно,* $\mathrm{char}\,\overline{F} = p$, *и* E/F *– вполне разветвленное циклическое расширение степени* p. *Для* $i \in \mathbb{N}_0$ *положим*

$$f(i) = h(E/F) + 1 + \Big[\frac{i - 1 - h(E/F)}{p}\Big].$$

Тогда

$$\mathrm{Tr}_{E/F}(\pi_E^i O_E) = \pi_F^{f(i)} O_F.$$

Доказательство. См. [6], глава 3, предложение 1.4. □

Лемма 3.2. *Пусть* E/F *– циклическое расширение степени* p *дискретно нормированных полей, и* $a \in O_E$. *Тогда*

$$\mathrm{N}_{E/F}(1 + a) = 1 + \mathrm{N}_{E/F}(a) + \mathrm{Tr}_{E/F}(a) + \mathrm{Tr}_{E/F}(b),$$

для некоторого $b \in O_E$, *такого, что* $v_E(b) \geqslant 2v_E(a)$.

Доказательство. См. [6], глава 3, лемма 1.1. □

Лемма 3.3. *Пусть F – полное дискретно нормированное поле, $\operatorname{char} F = 0$, $\operatorname{char} \overline{F} = p$, $\mu_{p^\infty} \cap F = \mu_{p^i}$, $e(F(\zeta_{p^{i+2}})/F) = p^2$, $d(F(\zeta_{p^{i+2}})/F) \geqslant \frac{p}{p-1}$. Пусть $F_j = F(\zeta_{p^{i+j}})$ при $j > 0$, униформизирующие π_j полей F_j таковы, что $\mathrm{N}_{F_{j+1}/F_j}(\pi_{j+1}) = \pi_j$. Тогда для любых $u_\nu \in U_F$ выполнено*

$$\mathrm{N}_{F_j/F}\Big(1 + \sum_{\nu > 0} u_\nu \pi_j^\nu\Big) \equiv \mathrm{N}_{F_1/F}\Big(1 + \sum_{\nu > 0} u_\nu^{p^{j-1}} \pi_1^\nu\Big) \mod U_F\Big(\frac{pe_F}{p-1} + 1\Big).$$

Доказательство. См. [1], лемма 1.1 и лемма 1.3. □

Найдем подходящие элементы из групп Мики в случае, когда у поля K нет нетривиальных неразветвленных круговых расширений.

Лемма 3.4. *Предположим, что расширение $K(\zeta_{p^{n+1}})/K$ вполне разветвлено, где n таково, что $\mu_{p^\infty} \cap K = \mu_{p^n}$. Пусть $h = h(K(\zeta_{p^{n+1}})/K)$, $m, i \in \mathbb{N}_0$, $a \in U_K$. Тогда*

1) *если $0 \leqslant i < h$, то существует $u \in M_{m+n}$, такой, что*

$$u \equiv 1 + a^{p^m} \pi^i \mod U_K(i+1);$$

2) *если $h < i < \frac{pe}{p-1}$, то существует $u \in M_{m+n+1}$, такой, что*

$$u \equiv 1 + a^{p^m} \pi^i \mod U_K(i+1).$$

Доказательство. При $r \geqslant n$ положим $K_r = K(\zeta_{p^r})$. Тогда $K_n = K$, расширения K_r/K вполне разветвлены, и следовательно, $K_r^{(0)} = K^{(0)}$ для любого r. Обозначим K_{n+1} через L.

При $n \leqslant r \leqslant m + n + 1$ выберем униформизирующие π_r полей K_r так, что

$$\mathrm{N}_{K_{r+1}/K_r}(\pi_{r+1}) = \pi_r, \qquad \pi_n \pi^{-1} \in U_K(1).$$

Это можно сделать: пусть π'_{m+n+1} – произвольная униформизирующая поля K_{m+n+1}, принадлежащая его подполю констант, и $\theta \in K^{(0)}$ таков, что

$$\pi^{-1}[\theta]\, \mathrm{N}_{K_{m+n+1}/K}\, \pi'_{m+n+1} \in U_K(1);$$

тогда в качестве π_r можно взять $[\theta^{1/p^{r-n}}]\, \mathrm{N}_{K_{m+n+1}/K_r}\, \pi'_{m+n+1}$.

Заметим, что поле K удовлетворяет условию леммы 3.3. Действительно, по [7], лемма 2–16 имеем

$$d(K_{r+1}/K_r) \geqslant 1 - \frac{(p-1)v_{K_r}(\zeta_{p^r}-1)}{pe_{K_r}} \geqslant 1 - \frac{1}{p^r},$$

и, по [7], лемма 2–4 имеем

$$\begin{aligned} d(K_{n+2}/K) &= d(K_{n+2}/K_{n+1}) + d(K_{n+1}/K) \\ &\geqslant \Big(1 - \frac{1}{p^n}\Big) + \Big(1 - \frac{1}{p^{n+1}}\Big) \geqslant 2 - \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} > \frac{p}{p-1}. \end{aligned}$$

Кроме того, имеем $h \geqslant \frac{e_L d(L/K)}{p-1} \geqslant p-1$.

1) Докажем, что в качестве u подойдет $\mathrm{N}_{K_{m+n}/K}(1+a\pi_{m+n}^i)$. По лемме 3.3 имеем

$$\mathrm{N}_{K_{m+n}/K}(1+a\pi_{m+n}^i) \equiv \mathrm{N}_{L/K}(1+a^{p^{m-1}}\pi_{n+1}^i) \mod U_K\Big(\frac{pe}{p-1}+1\Big).$$

Для любого $j \geqslant i$ выполнено

$$h + 1 + \Big[\frac{j-h-1}{p}\Big] \geqslant \min\{j+1, h\} > i,$$

следовательно, по лемме 3.1 имеем $\mathrm{Tr}_{L/K}(\pi_{n+1}^j O_L) \subset \pi_n^{i+1} O_K$. Таким образом, по лемме 3.2

$$\mathrm{N}_{L/K}(1+a^{p^{m-1}}\pi_{n+1}^i) \equiv 1 + a^{p^m}\pi_n^i \equiv 1 + a^{p^m}\pi^i \mod U_K(i+1).$$

2) Положим $i_0 = pi - (p-1)h$, и обозначим через k' подполе констант L. Имеем $i_0 > i$ и

$$h + 1 + \Big[\frac{i_0 - 1 - h}{p}\Big] = h + 1 + \Big[\frac{pi - ph - 1}{p}\Big] = i.$$

По лемме 3.1 существует $b \in k'$, такой, что $\mathrm{Tr}_{k'/k}(b) = \pi^i$, $v_L(b) = i_0$. Пусть $b = \sum_{\nu \geqslant i_0} [\theta_\nu]\pi_{n+1}^\nu$, где $\theta_\nu \in K^{(0)}$. Положим

$$b' = \sum_{\nu \geqslant i_0} [\theta_\nu^{1/p^m}]\pi_{m+n+1}^\nu,$$

и докажем, что в качестве u можно взять $\mathrm{N}_{K_{m+n+1}/K}(1+ab')$. По лемме 3.3 имеем

$$\mathrm{N}_{K_{m+n+1}/K}(1+ab') \equiv \mathrm{N}_{L/K}(1+a^{p^m}b) \mod U_K\Big(\frac{pe}{p-1}+1\Big).$$

Кроме того, $i_0 > i \geqslant h+1 \geqslant p$, и, следовательно,

$$h+1+\Big[\frac{2i_0-1-h}{p}\Big] > h+1+\Big[\frac{i_0-1-h}{p}\Big] = i.$$

Применяя леммы 3.1 и 3.2 получаем, что

$$\mathrm{N}_{L/K}(1+a^{p^m}b) \equiv 1+a^{p^m}\operatorname{Tr}_{L/K}(b) \equiv 1+a^{p^m}\pi^i \mod U_K(i+1).$$

$\square$

Получим оценки снизу на порядки образующих.

Теорема 3.5. *Пусть*

$$n = \max\{r \mid e(K(\zeta_{p^r})/K) = 1\}, \qquad h = h(K(\zeta_{p^{n+1}})/K(\zeta_{p^n})).$$

Положим

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} n+v_p(j), & \frac{pe}{p-1}-h < i \leqslant \frac{pe}{p-1}, j \neq 0 \\ n+v_p(j)+1, & 0 < i < \frac{pe}{p-1}-h, j \neq 0 \\ n, & i = \frac{pe}{p-1}-h \end{cases}.$$

Тогда элементы $x_{i,0,\theta}$ при $(i,0,\theta) \in I$, $i \neq \frac{pe}{p-1}-h$ не являются элементами кручения, а при $(i,j,\theta) \in I$, таких, что $j \neq 0$ или $i = \frac{pe}{p-1}-h$, в $VK_2'K$ выполнено $p^{\lambda_{i,j}-1}x_{i,j,\theta} \neq 0$.

Доказательство. Положим $c = \frac{pe}{p-1}$. По лемме 2.4 достаточно для любых $(i,j,\eta) \in I$ таких, что $j \neq 0$ или $i = c-h$, найти $w_{i,j,\eta} \in M_{\lambda_{i,j}}$, такой, что

$$w_{i,j,\eta} \equiv 1+[\eta]\pi^{c-i}t^{-j} \mod \pi^{c-i}t^{-j}\mathfrak{M}_K,$$

и для любых $r \in \mathbb{N}$ и i,η таких, что $(i,0,\eta) \in I$, $i \neq c-h$, найти $w_{i,0,\eta,r} \in M_r$, такой, что

$$w_{i,0,\eta,r} \equiv 1+[\eta]\pi^{c-i} \mod \pi^{c-i}\mathfrak{M}.$$

Положим $k' = k(\zeta_{p^n})$, $K' = k'\{\{t\}\}$. Расширение k'/k неразветвлено, следовательно, существует $\beta \in \overline{k}'$, такой, что

$$\operatorname{Tr}_{k'/k}[\beta] \equiv 1 \mod \pi O_k.$$

Пусть $j \neq 0$, и $j = p^m j'$, где $m = v_p(j)$. Применим лемму 3.4 к полю K'. Если $c - h < i \leqslant c$, то $0 \leqslant c - i < h$, и, следовательно, существует $u \in M_{n,K'}$ такой, что

$$u \equiv 1 + ([\beta^{1/p^m} \eta^{1/p^m}] t^{-j'})^{p^m} \pi^{c-i} \equiv 1 + [\beta\eta]\pi^{c-i} t^{-j} \mod U_{K'}(c-i+1).$$

Имеем

$$\operatorname{N}_{K'/K} u \equiv 1 + [\eta]\pi^{c-i} t^{-j} \operatorname{Tr}_{K'/K}[\beta] \equiv 1 + [\eta]\pi^{c-i} t^{-j} \mod U_K(c-i+1),$$

и $\operatorname{N}_{K'/K} u \in M_{m+n} = M_{\lambda_{i,j}}$, его можно взять в качестве $w_{i,j,\eta}$.

При $0 < i < c - h$ утверждение аналогично следует из второго утверждения леммы 3.4.

При $i = c - h$ имеем

$$\operatorname{N}_{K'/K}(1 + [\beta\eta]\pi^{c-i} t^{-j}) \equiv 1 + [\eta]\pi^{c-i} t^{-j} \mod U_K(c-i+1),$$

$$\operatorname{N}_{K'/K}(1 + [\beta\eta]\pi^{c-i} t^{-j}) \in \operatorname{N}_{K'/K} K'^* \subset M_n = M_{\lambda_{i,j}}.$$

При $j = 0$, $i \neq c - h$ утверждение следует из леммы 3.4, примененной к полю K' и $a = [\beta^{1/p^{r-n}} \eta^{1/p^{r-n}}]$, если $c - h < i \leqslant c$, и к $a = [\beta^{1/p^{r-n-1}} \eta^{1/p^{r-n-1}}]$, если $0 < i < c - h$. $\square$

Заметим, что условия $K(\zeta_{p^r}) = K$ и $e(K(\zeta_{p^r})/K) = 1$ не совпадают. Более того, мы докажем, что существуют круговые неразветвленные расширения стандартных полей сколь угодно большой степени.

Лемма 3.6. *Пусть последовательность элементов $\theta_i \in \mathbb{F}_p^{alg}$ такова, что*

$$\theta_0 = 1, \quad \theta_{i+1}^p - \theta_{i+1} = \theta_i \text{ при } i \geqslant 0.$$

Тогда для любого n существует $N = N(n)$, такое, что $\mathbb{F}_p(\theta_N) = \mathbb{F}_{p^n}$.

Доказательство. Докажем утверждение индукцией по n. При $n = 1$ можно взять $N(1) = 0$. Докажем переход от n к $n + 1$.

Пусть $N = N(n)$ – минимальное число, такое, что $\mathbb{F}_{p^n} = \mathbb{F}_p(\theta_N)$. Если не все θ_i принадлежат $\mathbb{F}_{p^n}$, то в качестве $N(n+1)$ подойдет

$$N' = \min\{i \mid \theta_i \notin \mathbb{F}_{p^n}\}.$$

Действительно, $\mathbb{F}_{p^n}(\theta_{N'})/\mathbb{F}_{p^n}$ – расширение степени p, и, следовательно,

$$|\mathbb{F}_{p^n}(\theta_{N'})| = p^{n+1}.$$

Предположим, что $\theta_i \in \mathbb{F}_{p^n}$ для любого i. Так как поле $\mathbb{F}_{p^n}$ конечно, то существуют i_1, i_2, такие, что $i_1 < i_2$, и $\theta_{i_1} = \theta_{i_2}$. Пусть i_1, i_2 – минимальная такая пара, тогда $i_1 = 0$, иначе

$$\theta_{i_1-1} = \theta_{i_1}^p - \theta_{i_1} = \theta_{i_2}^p - \theta_{i_2} = \theta_{i_2-1}.$$

Следовательно, $\theta_0 = 1$ является корнем многочлена $P(x) - 1$, где P – i_2-я композиция многочлена $x^p - x$. Но $P(1) = 0$, противоречие. $\square$

Пример 3.7. Для данных $n_1 \leqslant n_0$ приведем пример стандартного двумерного поля K_0, такого, что $\mu_{p^\infty} \cap K_0 = \mu_{p^{n_1}}$, и расширение $K_0(\zeta_{p^{n_0}})/K_0$ неразветвлено.

Зафиксируем множество корней из единицы ζ_{p^i} при $i \geqslant n_1$, таких, что $\zeta_{p^{i+1}}^p = \zeta_{p^i}$ для любого i. В обозначениях леммы 3.6 положим

$$N = N(n_0 - n_1 + 1), \quad \alpha = \frac{\zeta_{p^{n_1+N}}}{1 + [\theta_N](\zeta_p - 1)^p} \in \mathbb{Q}_p^{alg}, \quad k_0 = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^{n_1}}, \alpha).$$

Докажем, что $k_0\{\{t\}\}$ подойдет в качестве K_0.

Пусть $l_i = k_0(\zeta_{p^{n_1+i}})$. Тогда для любого $i \leqslant N$ выполнено

$$\zeta_{p^{n_1+i}} \equiv \alpha^{p^{N-i}}(1 + [\theta_i](\zeta_p - 1)^p) \mod U_{l_i}\Big(\frac{pe_{l_i}}{p-1} + 1\Big).$$

Следовательно,

$$l_{i+1} = l_i(\zeta_{p^{n_1+i+1}}) = l_i\Big(\sqrt[p]{1 + [\theta_i](\zeta_p - 1)^p}\Big) = l_i([\theta_{i+1}]),$$

и либо $l_{i+1} = l_i$, либо l_{i+1}/l_i – неразветвленное расширение. При этом расширение

$$\overline{l_N}/\overline{k}_0 = \mathbb{F}_p([\theta_N])/\mathbb{F}_p = \mathbb{F}_{p^{n_0-n_1+1}}/\mathbb{F}_p$$

имеет степень $p^{n_0-n_1}$, и, следовательно, $l_N\{\{t\}\}/k_0\{\{t\}\}$ является неразветвленным расширением степени $p^{n_0-n_1}$.

4. Ручное расширение локального кругового поля: оценки снизу

В этом параграфе предполагаем, что $K = K_0(\sqrt[l]{\zeta_{p^n} - 1})$, где $p \nmid l$ и K_0 – абсолютно неразветвленное поле. Кроме того, считаем, что $\pi = \sqrt[l]{\zeta_{p^n} - 1}$.

Положим $K_r = K(\zeta_{p^r})$ при $r \geqslant n$. Выберем униформизирующие π_r полей K_r так, что $\pi_n = \pi$, $\mathrm{N}_{K_r/K_{r-1}}(\pi_r) = \pi_{r-1}$ и $\pi_{n+1} = \sqrt[l]{\zeta_{p^{n+1}} - 1}$ для подходящего $\zeta_{p^{n+1}}$. Тогда $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$. Пусть $L = K_{n+1}$, $\pi_L = \pi_{n+1}$, $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{L/K}$, $\mathrm{Tr} = \mathrm{Tr}_{L/K}$, $h = h(L/K)$. По [7], лемма 2–16, имеем $h = p^n l - l$. Число $\frac{pe}{p-1} = p^n l$ обозначим через c.

В этих предположениях имеет место следующий аналог леммы 3.1.

Лемма 4.1. *Пусть* $i, \mu, \nu \in \mathbb{Z}$, $0 \leqslant \nu \leqslant p-1$, $i = \nu l + \mu p$, *и*

$$f(i) = p^n l + p^{n-1} l - l + 1 + \Big[\frac{i-l-1}{p}\Big].$$

Тогда

$$\mathrm{Tr}(\pi_L^i) \equiv (-1)^{\nu+1} \pi^{\mu+e} \mod \pi^{f(i)} O_K.$$

Доказательство. Пусть $\zeta_p = \zeta_{p^n}^{p^{n-1}}$, и при $1 \leqslant s \leqslant p-1$ элемент $\sigma_s \in \mathrm{Gal}(L/K)$ таков, что $\sigma_s(\zeta_{p^{n+1}}) = \zeta_{p^{n+1}} \zeta_p^s$. Докажем, что

$$\frac{\sigma_s(\pi_L)}{\pi_L} \equiv 1 + \frac{s}{l} \pi_L^h (1 + \pi_L^l) \mod \pi_L^{2h} O_L. \tag{1}$$

Пусть $\frac{\sigma_s(\pi_L)}{\pi_L} = 1 + u\pi_L^h$, тогда $u \in U_L$, и

$$\Big(\frac{\sigma_s(\pi_L)}{\pi_L}\Big)^l \equiv 1 + lu\pi_L^h \mod \pi_L^{2h} O_L.$$

С другой стороны,

$$\Big(\frac{\sigma_s(\pi_L)}{\pi_L}\Big)^l = \frac{\zeta_{p^{n+1}} \zeta_p^s - 1}{\zeta_{p^{n+1}} - 1} = \frac{(\zeta_{p^{n+1}} - 1) + \zeta_{p^{n+1}}(\zeta_p^s - 1)}{\zeta_{p^{n+1}} - 1} =$$
$$= 1 + \zeta_{p^{n+1}} \frac{\zeta_p^s - 1}{\zeta_{p^{n+1}} - 1} = 1 + (\pi_L^l + 1) \frac{(\pi_L^l + 1)^{p^n s} - 1}{\pi_L^l},$$

причем

$$(\pi_L^l + 1)^{p^n s} \equiv 1 + C_{p^n s}^{p^n} \pi_L^{lp^n} \equiv 1 + s\pi_L^{lp^n} \mod \pi_L^{lp^n + h} O_L,$$

так как $e_L + l > lp^n + h$ и $lp^n > h$. Таким образом,

$$1 + lu\pi_L^h \equiv \Big(\frac{\sigma_s(\pi_L)}{\pi_L}\Big)^l \equiv 1 + s\pi_L^h(1+\pi_L^l) \mod \pi_L^{2h}O_L.$$

Вычитая 1 и деля на $l\pi_L^h$, получаем, что

$$u \equiv \frac{s}{l}(1+\pi_L^l) \mod \pi_L^h O_L,$$

что доказывает (1).

По (1) имеем

$$\frac{\mathrm{N}(\pi_L)}{\pi_L^p} \equiv \prod_{s=1}^{p-1}\Big(1+\frac{s}{l}\pi_L^h(1+\pi_L^l)\Big) \equiv 1+\frac{1}{l}\pi_L^h(1+\pi_L^l)\sum_{s=1}^{p-1} s \equiv 1 \mod \pi_L^{2h}O_L,$$

следовательно,

$$\pi_L^p\pi^{-1} \in U_L(2h). \tag{2}$$

Имеем

$$\mathrm{Tr}(\pi_L^i) = \mathrm{Tr}(\pi^\mu\pi_L^{\nu l}(\pi_L^p\pi^{-1})^\mu) = \pi^\mu(\mathrm{Tr}(\pi_L^{\nu l}) + \mathrm{Tr}\,A),$$

где $v(A) \geqslant \nu l + 2h$ по (2). По лемме 3.1 получаем

$$v(\mathrm{Tr}\,A) \geqslant h+1+\Big[\frac{\nu l + 2h - h - 1}{p}\Big] = p^n l + p^{n-1}l - l + 1 + \Big[\frac{\nu l - l - 1}{p}\Big].$$

Следовательно,

$$v(\pi^\mu\,\mathrm{Tr}\,A) \geqslant p^n l + p^{n-1}l - l + 1 + \Big[\frac{\nu l + \mu p - l - 1}{p}\Big] = f(i),$$

и

$$\mathrm{Tr}(\pi_L^i) \equiv \pi^\mu\,\mathrm{Tr}(\pi_L^{\nu l}) \mod \pi^{f(i)}O_K.$$

При этом

$$\mathrm{Tr}(\pi_L^{\nu l}) = \mathrm{Tr}((\zeta_{p^{n+1}} - 1)^\nu) = \sum_{s=0}^{p-1}(\zeta_{p^{n+1}}\zeta_p^s - 1)^\nu =$$

$$= \sum_{j=1}^{\nu}(-1)^{\nu-j}C_\nu^j\zeta_{p^{n+1}}^j\sum_{s=0}^{p-1}\zeta_p^{sj} + (-1)^\nu p = (-1)^\nu p,$$

следовательно,

$$\mathrm{Tr}(\pi_L^i) \equiv (-1)^\nu\pi^\mu p \equiv (-1)^{\nu+1}\pi^{\mu+e} \mod \pi^{f(i)}O_K.$$

□

Следствие 4.2. *При $i > l$ имеем*

$$\mathrm{Tr}(\pi_L^i) \equiv (-1)^{\nu+1}\pi^{\mu+e} \mod \pi^{c+1}O_K.$$

Построим подходящие элементы из групп Мики.

Лемма 4.3. *Пусть $i, r \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $i > c - \frac{l}{p^{r-1}}$, и $a \in U_K$. Тогда*

$$1 + a^{p^m}\pi^i \in M_{m+n+r}.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $m = 0, r = 1$. Докажем, что если $i > c - l$, то для любого $a \in U_K$ выполнено

$$1 + a\pi^i \in \mathrm{N}\, U_L \cdot U_K(c+1).$$

При $i \geqslant c+1$ утверждение верно, проверим, что если оно верно для всех $i' > i$, то верно для i при $i \leqslant c$.

Положим $i_0 = (i-e)p + l(p-1)$, тогда $i_0 > i$ так как $i > c - l$. По лемме 3.2 получаем, что

$$\mathrm{N}(1 - a\pi_L^{i_0}) = 1 - a^p\pi^{i_0} - a\,\mathrm{Tr}(\pi_L^{i_0}) + \mathrm{Tr}\, A,$$

где $v_L(A) \geqslant 2i_0$, и, по лемме 3.1,

$$\begin{aligned} v(\mathrm{Tr}\, A) &\geqslant h + 1 + \left[\frac{2i_0 - h - 1}{p}\right] \\ &\geqslant p^n l - l + 1 + \left[\frac{pi + p(c-l) - 2pe + 2l(p-1) - p^n l + l - 1}{p}\right] \\ &\geqslant p^n l - l + 1 + i + p^n l - l - 2(p^n l - p^{n-1} l) + 2l - p^{n-1} l + \left[\frac{-l-1}{p}\right] > i. \end{aligned}$$

Кроме того, по следствию 4.2

$$\mathrm{Tr}(\pi_L^{i_0}) \equiv -\pi^i \mod \pi^{c+1}O_K.$$

Таким образом,

$$1 + a\pi^i = (1 + a'\pi^{i'})\,\mathrm{N}(1 - a\pi_L^{i_0})$$

для некоторых $a \in U_K$, $i' > i$. По предположению имеем

$$1 + a'\pi^{i'} \in \mathrm{N}\, U_L \cdot U_K(c+1).$$

Теперь докажем утверждение для $r = 1$ и произвольного m. Так как $2i > c$, $i + e > c$ и

$$U_K(c+1) \subset (K^*)^p \subset M_{m+n+1},$$

можно считать, что $a^{p^m} = [\theta]t^{jp^m}$ для некоторого $\theta \in K^{(0)}$. Применим доказанное утверждение к $a_0 = [\theta]t^j$. Пусть $\eta_{\mu,\nu} \in K^{(0)}$ таковы, что

$$\mathrm{N}(1 + \sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} [\eta_{\mu,\nu}]t^{\nu}\pi_L^{\mu}) \equiv 1 + [\theta]t^j\pi^i \mod U_K(c+1).$$

Применяя лемму 3.3 и заменяя t на t^{p^m} получаем, что

$$\mathrm{N}_{K_{m+n+1}/K}\Big(1 + \sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} [\eta_{\mu,\nu}^{1/p^m}]t^{\nu}\pi_{m+n+1}^{\mu}\Big)$$
$$\equiv \mathrm{N}\Big(1 + \sum_{(\mu,\nu)\in\mathbb{Z}^2} [\eta_{\mu,\nu}]t^{\nu p^m}\pi_L^{\mu}\Big) \equiv 1 + [\theta]t^{jp^m}\pi^i \mod U_K(c+1).$$

Таким образом,

$$1 + a^{p^m}\pi^i \in U_K(c+1) \cdot \mathrm{N}_{K_{m+n+1}/K}\, U_{K_{m+n+1}} \subset$$
$$\subset (K^*)^p \cdot \mathrm{N}_{K_{m+n+1}/K}\, U_{K_{m+n+1}} \subset M_{m+n+1}.$$

Наконец докажем утверждение для произвольного r. Пусть $i_1, \dots, i_r$ таковы, что $i_r = i$, и $i_{s+1} = \frac{i_s}{p} + e$ при $1 \leqslant s \leqslant r-1$. Тогда для любого s выполнено $i_s > c - \frac{l}{p^{s-1}}$. Положим $w_s = 1 + a^{p^{r+m-s}}\pi^{i_s}$. Из доказанного утверждения следует, что $w_1 \in M_{m+n+r}$, поэтому достаточно проверить, что $w_{s+1}w_s^{-1} \in M_{m+n+r}$ для любого s. Пусть $b = a^{p^{r+m-s-1}}$, тогда

$$(1 + b^p\pi^{i_s})(1 - b\pi^{i_s/p})^p$$
$$= 1 - pb\pi^{i_s/p} - b^{2p}\pi^{2i_s} + \sum_{\nu=2}^{p-1} C_p^{\nu}(-b\pi^{i_s/p})^{\nu} + b^p\pi^{i_s}\sum_{\nu=1}^{p-1} C_p^{\nu}(-b\pi^{i_s/p})^{\nu}.$$

Числа $2i_s$ и $e + \frac{2i_s}{p}$ больше c, следовательно,

$$(1 + b^p\pi^{i_s})(1 - b\pi^{i_s/p})^p \equiv 1 - pb\pi^{i_s/p} \equiv 1 + b\pi^{i_{s+1}} \mod U_K(c+1).$$

Таким образом,

$$w_{s+1}w_s^{-1} \in (1 - b\pi^{i_s/p})^p \cdot U_K(c+1) \subset (K^*)^p \subset M_{m+n+r}.$$

□

Лемма 4.4. *Для любых* $m \in \mathbb{N}_0$, $a \in U_K$ *существует* $u \in M_{m+n+1}$, *такой, что*

$$u \equiv 1 + (a^{p^m} - a^{p^{m+1}})\pi^{c-l} \mod U_K(c-l+1).$$

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 4.3, имеем

$$\begin{aligned}&\mathrm{N}_{K_{m+n+1}/K}(1 - a\pi_{m+n+1}^{c-l})\\&\qquad\equiv 1 - a^{p^{m+1}}\pi^{c-l} - a^{p^m}\,\mathrm{Tr}(\pi_L^{c-l}) + \mathrm{Tr}\,A \mod U_K(c+1),\end{aligned}$$

где $v_L(A) \geqslant 2(c-l)$. По лемме 3.1 имеем

$$v(\mathrm{Tr}(A)) \geqslant h+1+\left[\frac{2(c-l)-h-1}{p}\right] = p^n l + p^{n-1}l - l + 1 + \left[\frac{-l-1}{p}\right] > c-l.$$

Кроме того, имеем

$$c - l = (p^{n-1}l - l)p + (p-1)l = (c-l-e)p + (p-1)l,$$

и, следовательно, по следствию 4.2 выполнено

$$\mathrm{Tr}(\pi_L^{c-l}) \equiv -\pi^{c-l} \mod \pi^{c+1}O_K.$$

Таким образом,

$$\mathrm{N}_{K_{m+n+1}/K}(1 - a\pi_{m+n+1}^{c-l}) \equiv 1 - a^{p^{m+1}}\pi^{c-l} + a^{p^m}\pi^{c-l} \mod U_K(c-l+1),$$

и $\mathrm{N}_{K_{m+n+1}/K}(1 - a\pi_{m+n+1}^{c-l})$ можно взять в качестве u. □

Леммы 4.3 и 4.4 дают оценки сверху для порядков образующих.

Теорема 4.5. 1) *Положим*

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} v_p(j) + n + r, & \frac{l}{p^r} < i < \frac{l}{p^{r-1}},\ r \in \mathbb{N} \\ v_p(j) + n + 1, & i = l, j < 0 \\ v_p(j) + n, & (0,l) < (j,i) < (0, \frac{pe}{p-1}) \end{cases}.$$

Тогда при $(i,j,\theta) \in I$, $j \neq 0$ *порядок элемента* $x_{i,j,\theta}$ *в* $VK_2'K$ *не меньше* $p^{\lambda_{i,j}}$.

2) *Порядок кручения* $x_{l,0,1}$ *равен* p^n, *а при* $(i,\theta) \neq (l,1)$ *элемент* $x_{i,0,\theta}$ *не является элементом кручения.*

Доказательство. 1) При $i > l$, $\frac{l}{p} < i < l$ и при $i = l, j > 0, p \nmid j$ утверждение следует из теоремы 3.5. Рассмотрим остальные случаи. Как и в доказательстве теоремы 3.5, применим лемму 2.4. Достаточно для рассматриваемых i, j и $\eta \in K^{(0)} \setminus \{0\}$ найти $w_{i,j,\eta} \in M_{\lambda_{i,j}}$, такой, что

$$w_{i,j,\eta} \equiv 1 + [\eta]\pi^{c-i}t^{-j} \mod \pi^{c-i}t^{-j}\mathfrak{M}_K.$$

Пусть $j = p^m j'$, где $m = v_p(j)$. При $i \neq l$ утверждение следует из леммы 4.3, примененной к $c - i$, m и $a = [\eta^{1/p^m}]t^{-j'}$. При $i = l$, $j < 0$ для $a = [\eta^{1/p^m}]t^{-j'}$ выполнено

$$1 + (a^{p^m} - a^{p^{m+1}})\pi^{c-i} \equiv 1 + [\eta]t^{-j}\pi^{c-i} \mod \pi^{c-i}t^{-j}\mathfrak{M}_K,$$

а при $i = l$, $j > 0$, $m \geqslant 1$ для $a = -[\eta^{1/p^m}]t^{-j'}$ выполнено

$$1 + (a^{p^{m-1}} - a^{p^m})\pi^{c-i} \equiv 1 + [\eta]t^{-j}\pi^{c-i} \mod \pi^{c-i}t^{-j}\mathfrak{M}_K.$$

Применяя лемму 4.4, получаем утверждение при $i = l$, $j \neq 0$.

2) При $i \neq l$ утверждение следует из теоремы 3.5.

По [2], теорема 9.2, отображение

$$U_k/T(U_k) \to U(1)K_2'K/T(U(1)K_2'K), \qquad u \mapsto \{u,t\},$$

где $T(U_k), T(U(1)K_2'K)$ – кручения $U_k, U(1)K_2'K$, инъективно. При $\theta \neq 1$ имеем

$$1 + [\theta]\pi^l = 1 + [\theta](\zeta_{p^n} - 1) \notin T(U_k),$$

следовательно, $x_{l,0,\theta}$ не является элементом кручения в $U(1)K_2'K$ и $VK_2'K$. □

5. Соотношения между порядками образующих

В этом параграфе для двумерного поля F будем обозначать через $\operatorname{ord}_F x$ порядок элемента $x \in VK_2'F$ в этой группе.

При $0 < (j,i) < (0, \frac{pe}{p-1})$, $p \nmid (i,j)$, $i > 0$, $j \neq 0$ положим

$$x_{i,j} = \begin{cases} \{1+\pi^i t^j, \pi\}, & p \mid i \\ \{1+\pi^i t^j, t\}, & p \nmid i \end{cases}, \qquad r_{i,j} = \operatorname{ord}_K x_{i,j}.$$

Лемма 5.1. *Числа* $r_{i,j}$ *обладают следующими свойствами.*

1) *Для любого* $\theta \in K^{(0)}$, $\theta \neq 0$ *выполнено* $\operatorname{ord}_K x_{i,j,\theta} = r_{i,j}$.
2) *Значение* $r_{i,j}$ *зависит только от* i, $v_p(j)$, *и* $\operatorname{sgn}(j)$.

Доказательство. Для любых двух локальных параметров t, t' отображение $t \mapsto t'$ определяет изоморфизм полей $k\{\{t\}\}$ и $k\{\{t'\}\}$, следовательно, $\operatorname{ord}_K\{1+[\theta]\pi^i t^j, \pi\}$ и $\operatorname{ord}_K\{1+[\theta]\pi^i t^j, t\}$ не зависят от выбора t. Докажем, что $\operatorname{ord}_K x_{i,j,\theta}$ при $\theta \neq 0$ зависит только от i, $v_p(j)$, $\operatorname{sgn}(j)$ и θ. Пусть $j = \varepsilon p^m q$, где $m = v_p(j)$, $\varepsilon = \operatorname{sgn}(j)$. Положим $t_1 = t^q$ и $K_1 = k\{\{t_1\}\}$. Тогда поля K и K_1 изоморфны, и, следовательно, при $p \nmid i$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_K x_{i,\varepsilon p^m,\theta} &= \operatorname{ord}_K\{1+[\theta]\pi^i t^{\varepsilon p^m}, t\} = \operatorname{ord}_{K_1}\{1+[\theta]\pi^i t_1^{\varepsilon p^m}, t_1\}\\ &= \operatorname{ord}_{K_1}\{1+[\theta]\pi^i t^j, t^q\},\end{aligned}$$

а при $p \mid i$, $p \nmid j$ имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_K x_{i,\varepsilon,\theta} &= \operatorname{ord}_K\{1+[\theta]\pi^i t^{\varepsilon}, \pi\}\\ &= \operatorname{ord}_{K_1}\{1+[\theta]\pi^i t_1^{\varepsilon}, \pi\} = \operatorname{ord}_{K_1}\{1+[\theta]\pi^i t^j, \pi\}.\end{aligned}$$

Так как $p \nmid q = |K : K_1|$, то отображение $VK_2'K_1 \to VK_2'K$, индуцированное вложением $K_1 \hookrightarrow K$, сохраняет порядки элементов, и

$$\begin{aligned}\operatorname{ord}_{K_1}\{1+[\theta]\pi^i t^j, t^q\} &= \operatorname{ord}_K\{1+[\theta]\pi^i t^j, t^q\}\\ &= \operatorname{ord}_K(q\{1+[\theta]\pi^i t^j, t\}) = \operatorname{ord}_K\{1+[\theta]\pi^i t^j, t\},\\ \operatorname{ord}_{K_1}\{1+[\theta]\pi^i t^j, \pi\} &= \operatorname{ord}_K\{1+[\theta]\pi^i t^j, \pi\}.\end{aligned}$$

Таким образом, доказано второе свойство, а первое достаточно проверить при $j = \pm p^m$. Для таких j в $K^{(0)}$ существует элемент $\theta^{1/j}$, и $t' = [\theta^{1/j}]t$ является вторым локальным параметром K, следовательно, при $p \nmid i$ имеем

$$\operatorname{ord}_K\{1+[\theta]\pi^i t^j, t\} = \operatorname{ord}_K\{1+[\theta]\pi^i t^j, [\theta^{1/j}]t\} = \operatorname{ord}_K\{1+\pi^i t'^j, t'\} = r_{i,j},$$

а при $p \mid i$ имеем

$$\operatorname{ord}_K\{1+[\theta]\pi^i t^j, \pi\} = \operatorname{ord}_K\{1+\pi^i t'^j, \pi\} = r_{i,j}.$$

□

Для любых $i > 0$, $j \neq 0$ положим

$$y_{i,j} = \{1 + \pi^i t^j, \pi\}, \qquad s_{i,j} = \mathrm{ord}_K\, y_{i,j}.$$

При $0 < (j,i) < (0, \frac{pe}{p-1})$, $p \nmid j$, имеем $s_{i,j} = r_{i,j}$, так как при $p \mid i$ выполнено $y_{i,j} = x_{i,j}$, а при $p \nmid i$ выполнено

$$s_{i,j} = \mathrm{ord}_K\{1 + \pi^i t^j, \pi\} = \mathrm{ord}_K\Big(-\frac{j}{i}\{1 + \pi^i t^j, t\}\Big) = r_{i,j}.$$

Докажем некоторые свойства $s_{i,\varepsilon}$ при $\varepsilon = \pm 1$.

Лемма 5.2. 1) *Имеем* $s_{i+1,-1} \leqslant s_{i,1} \leqslant s_{i,-1}$ *для любого* i. *В частности, последовательности* $\{s_{i,1}\}$ *и* $\{s_{i,-1}\}$ *нестрого убывают по* i.

2) *При* $i < \frac{e}{p-1}$, $\varepsilon = \pm 1$ *имеем* $\frac{1}{p} s_{i,\varepsilon} \leqslant s_{pi,\varepsilon}$.

При $i > \frac{e}{p-1}$, $\varepsilon = \pm 1$ *имеем* $\frac{1}{p} s_{i,\varepsilon} = s_{i+e,\varepsilon}$.

Кроме того, $\frac{1}{p} s_{\frac{e}{p-1},-1} \leqslant s_{\frac{pe}{p-1},-1}$ *и* $\frac{1}{p} s_{\frac{e}{p-1},1} = s_{\frac{pe}{p-1},1}$.

Доказательство. 1) Для любого $a \in K$, такого, что $\overline{v}_K(a) = 0$, и $\varepsilon = \pm 1$ выполнено

$$\mathrm{ord}_K\{1 + a\pi^i t^\varepsilon, \pi\} = s_{i,\varepsilon}, \tag{3}$$

так как $t' = at$ и $t'' = a^{-1}t$ являются вторыми локальными параметрами K. Имеем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ord}_K\{1 + \pi^i t(1 + \pi t^{-2}), \pi\} = \mathrm{ord}_K\{1 + \pi^i t, \pi\} = s_{i,1},\\
&s_{i,1} \geqslant \mathrm{ord}_K(\{1 + \pi^i t(1 + \pi t^{-2}), \pi\} - \{1 + \pi^i t, \pi\}) =\\
&= \mathrm{ord}_K\Big\{\frac{1 + \pi^i t(1 + \pi t^{-2})}{1 + \pi^i t}, \pi\Big\} = \mathrm{ord}_K\Big\{1 + \frac{1}{1 + \pi^i t}\pi^{i+1} t^{-1}, \pi\Big\} = s_{i+1,-1},
\end{aligned}$$

что доказывает первое неравенство. Второе аналогично следует из равенств

$$\begin{aligned}
&\mathrm{ord}_K\{1 + \pi^i t^{-1}(1 + t^2), \pi\} = \mathrm{ord}_K\{1 + \pi^i t^{-1}, \pi\} = s_{i,-1},\\
&\mathrm{ord}_K\Big\{1 + \frac{1}{1 + \pi^i t^{-1}}\pi^i t, \pi\Big\} = s_{i,1}.
\end{aligned}$$

2) Если $i < \frac{e}{p-1}$, $\varepsilon = \pm 1$ или $i = \frac{e}{p-1}$, $\varepsilon = -1$, то

$$p y_{i,\varepsilon} = \{1 + a\pi^{pi} t^{p\varepsilon}, \pi\}$$

для некоторого $a \in V_K$. По теореме 3.5 имеем $y_{i,\varepsilon} \neq 0$, следовательно, порядок левой части равен $\frac{1}{p} s_{i,\varepsilon}$. Положим $t_1 = t^p a^\varepsilon$, и $K_1 = k\{\{t_1\}\}$. Тогда

$$\operatorname{ord}_K \{1 + a\pi^{pi} t^{p\varepsilon}, \pi\} \leqslant \operatorname{ord}_{K_1} \{1 + \pi^{pi} t_1^\varepsilon, \pi\} = s_{pi,\varepsilon}.$$

Если $i > \frac{e}{p-1}$, $\varepsilon = \pm 1$ или $i = \frac{e}{p-1}$, $\varepsilon = 1$, то

$$py_{i,\varepsilon} = \{1 + a\pi^{i+e} t^\varepsilon, \pi\},$$

где $a \in K$ таков, что $\overline{v}_K(a) = 0$. Порядок левой части равен $\frac{1}{p} s_{i,\varepsilon}$, а порядок правой части равен $s_{i+e,\varepsilon}$ по (3). □

Докажем теорему о свойствах порядков образующих.

Теорема 5.3. *Числа $r_{i,j}$ обладают следующими свойствами.*

1) *Для $p \nmid i$, $j \neq 0$ выполнено $r_{i,j} \leqslant r_{i,jp} \leqslant pr_{i,j}$.*

2) *Множество значений $r_{i,j}$ ограничено снизу, причем минимальное значение $r_{i,j}$ достигается при $(i,j) = (\frac{pe}{p-1}, -1)$.*

Обозначим минимальное значение $r_{i,j}$ через M_0.

3) *Пусть $d(i)$ – минимальное целое число, такое, что $p^{d(i)} i \geqslant \frac{pe}{p-1}$, тогда $r_{i,j} \leqslant M_0 p^{d(i)+v_p(j)}$.*

4) *Для любого $r \geqslant M_0$, являющегося степенью p, существует бесконечно много пар (i,j), таких, что $r_{i,j} = r$.*

Доказательство. Положим $c = \frac{pe}{p-1}$.

1) Положим $t_1 = t^p$ и $K_1 = k\{\{t_1\}\}$. Из того, что $K_1 \subset K$, следует, что

$$\operatorname{ord}_{K_1} x_{i,jp} \geqslant \operatorname{ord}_K x_{i,jp}, \tag{4}$$

По теореме 3.5 имеем $\operatorname{ord}_K x_{i,jp} > 1$, поэтому $\operatorname{ord}_{K_1} x_{i,jp} > 1$, и, следовательно,

$$\frac{1}{p} \operatorname{ord}_{K_1} x_{i,jp} = \frac{1}{p} \operatorname{ord}_{K_1} \{1 + \pi^i t_1^j, t\} = \operatorname{ord}_{K_1} \{1 + \pi^i t_1^j, t_1\} = r_{i,j}.$$

Применяя еще раз (4), получаем $r_{i,jp} \leqslant pr_{i,j}$. Докажем оставшееся неравенство. Имеем

$$\begin{aligned}\mathrm{N}_{K/K_1}\, px_{i,jp} &= \mathrm{N}_{K/K_1} \{1 + \pi^i t^{jp}, t^p\} \\ &= \mathrm{N}_{K/K_1} \{1 + \pi^i t_1^j, t_1\} = p\{1 + \pi^i t_1^j, t_1\},\end{aligned}$$

следовательно, применяя снова теорему 3.5 получаем

$$\frac{1}{p}r_{i,jp} = \mathrm{ord}_K\, px_{i,jp} \geqslant \mathrm{ord}_{K_1}\, p\{1+\pi^i t_1^j, t_1\} = \mathrm{ord}_K\, p\{1+\pi^i t^j, t\} = \frac{1}{p}r_{i,j}.$$

2) Из леммы 5.2(1) следует, что при $\varepsilon = \pm 1$, $(i,\varepsilon) \leqslant (c,-1)$ минимум $r_{i,\varepsilon} = s_{i,\varepsilon}$ достигается при $(i,\varepsilon) = (c,-1)$. При этом, если $p \nmid i$, то из леммы 5.1 и первого свойства следует, что

$$r_{i,j} = r_{i,\mathrm{sgn}(j)p^{v_p(j)}} \geqslant r_{i,\mathrm{sgn}(j)} \geqslant r_{c,-1},$$

а если $p \mid i$, $p \nmid j$, то

$$r_{i,j} = r_{i,\mathrm{sgn}(j)} \geqslant r_{c,-1}.$$

3) Рассмотрим сначала случай $j=-1$. Имеем $r_{i,-1} = s_{i,-1}$, поэтому достаточно доказать, что $s_{i,-1} \leqslant p^{d(i)} s_{c,-1}$. При $i = c$ утверждение верно. Предположим, что $i < c$. Тогда $d(i) \geqslant 1$ и $\frac{e}{p-1} \leqslant p^{d(i)-1} i < c$. Положим $i' = p^{d(i)-1} i$, тогда по лемме 5.2(2) выполнено $s_{i,-1} \leqslant p^{d(i)-1} s_{i',-1}$. Применяя еще раз лемму 5.2 и неравенство $i' + e \geqslant c$, получаем

$$s_{i',-1} = ps_{i'+e,-1} \leqslant ps_{c,-1}.$$

Из леммы 5.2(1), следует, что

$$r_{i,1} = s_{i,1} \leqslant s_{i,-1} = r_{i,-1},$$

поэтому утверждение верно для $j = 1$. Случай $p \nmid j$ получается из случая $j = \pm 1$ применением леммы 5.1, а случай $p \mid j$, $p \nmid i$ получается из случая $p \nmid j$ применением неравенства

$$r_{i,p^m q} \leqslant p^m r_{i,q} \quad \text{при} \quad p \nmid i,\ p \nmid q, \tag{5}$$

которое следует из первого утверждения теоремы.

4) По теореме 3.5 существует i_0, такое, что $p \nmid i_0$, и для любого j выполнено $r_{i_0,j} \geqslant p^{v_p(j)}$. Следовательно, при достаточно большом m имеем

$$r_{i_0,-p^m} \geqslant p^m \geqslant r.$$

Из леммы 5.2 следует, что для

$$i' = \begin{cases} pi_0, & i_0 \leqslant \frac{e}{p-1} \\ i_0 + e, & i_0 > \frac{e}{p-1} \end{cases}$$

выполнено

$$r_{i_0+1,-1} \leqslant r_{i_0,-1} \leqslant pr_{i',-1} \leqslant pr_{i_0+1,-1},$$

так как $i' \geqslant i_0 + 1$. Таким образом

$$r_{i_0,-p^m} \geqslant r_{i_0,-p^{m-1}} \geqslant \cdots \geqslant r_{i_0,-p} \geqslant r_{i_0,-1} \geqslant r_{i_0+1,-1} \geqslant \cdots \geqslant r_{c,-1},$$

причем соседние числа либо равны, либо отличаются в p раз. Следовательно, среди них есть число, равное r, пусть это r_{i_1,j_1}. Тогда для любого $p \nmid q$ выполнено $r_{i_1,qj_1} = r$. □

Для получения оценок сверху на порядки образующих нам понадобится лемма, аналогичная третьему утверждению теоремы.

Лемма 5.4. *Пусть* $0 < i_0 < \frac{pe}{p-1}$, $r = r_{i_0,-1}$ *и* $i > 0$, $(j,i) < (0, \frac{pe}{p-1})$, $p \nmid (i,j)$. *Тогда, если* $d \geqslant 0$, $p^d i \geqslant i_0$, *то* $r_{i,j} \leqslant p^{d+v_p(j)} r$.

Доказательство. Докажем утверждение для $j = \pm 1$. Имеем $r_{i,j} = s_{i,j}$, $r = s_{i_0,-1}$. Положим $i_1 = p^d i$, тогда $i_1 \geqslant i_0$. Применяя лемму 5.2 получаем, что

$$s_{i,j} \leqslant p^d s_{i_1,j} \leqslant p^d s_{i_0,j} \leqslant p^d s_{i_0,-1}.$$

Утверждение для произвольного j следует из леммы 5.1 и (5). □

Мы доказали, что последовательности $s_{i,1}$ и $s_{i,-1}$ нестрого убывают по i. Для любого j, не кратного p, последовательность $s_{i,j}$ также убывает, так как $s_{i,j} = s_{i,\operatorname{sgn}(j)}$. Для произвольного j верно более слабое утверждение.

Предложение 5.5. *Для любого* j *положим* $I(j) = \frac{pe}{p-1} + e(v_p(j) - 1)$. *Тогда при* $d > I(j)$, $(j,i) > (0, I(j))$ *выполнено* $s_{i+d,j} \leqslant s_{i,j}$.

Доказательство. Имеем $U_K(0,d), U_K(j,i) \subset V_K^{p^{v_p(j)}} = V_K^j$, следовательно, существуют $t_1, t_2 \in K$, такие, что

$$t_1^j = (1+\pi^d)t^j, \qquad t_2^j = \Big(\frac{1}{1+\pi^i t^j}\Big)t^j.$$

Такие элементы t_1, t_2 являются вторыми локальными параметрами K. Имеем

$$\begin{aligned}
s_{i,j} &= \operatorname{ord}_K\{1+\pi^i t_1^j, \pi\} = \operatorname{ord}_K\{1+\pi^i(1+\pi^d)t^j, \pi\} \\
&= \operatorname{ord}_K\{1+\pi^i t^j + \pi^{i+d} t^j, \pi\}, \\
s_{i,j} &\geqslant \operatorname{ord}_K\Big\{\frac{1+\pi^i t^j + \pi^{i+d}t^j}{1+\pi^i t^j}, \pi\Big\} = \operatorname{ord}_K\Big\{1 + \frac{1}{1+\pi^i t^j}\pi^{i+d}t^j, \pi\Big\} \\
&= \operatorname{ord}_K\{1+\pi^{i+d}t_2^j, \pi\} = s_{i+d,j}. \qquad \square
\end{aligned}$$

В случае, когда у K есть униформизирующая вида $\pi = \sqrt[l]{\zeta_{p^n} - 1}$ при $p \nmid l$, можно заменить d на l. Для доказательства нам понадобится следующая теорема из диссертации И. Б. Жукова [3]:

Теорема 5.6. *Пусть F – двумерное поле, и E/F – конечное круговое p-расширение. Тогда отображение*

$$i_{E/F} : VK_2'F \to VK_2'E,$$

индуцированное вложением $F \hookrightarrow E$, инъективно.

Мы не приводим доказательство, потому что оно слишком длинное, и не будем пользоваться следующим предложением.

Предложение 5.7. *Если $\pi = \sqrt[l]{\zeta_{p^n} - 1}$ при $p \nmid l$, и $j > 0$, $i > I(j)$, где $I(j)$ такое, как в предложении 5.5, то $s_{i+l,j} \leqslant s_{i,j}$.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 5.5. Так же, как в лемме 5.1, проверяется, что $s_{i,j} = s_{i,qj}$ при $q > 0$, $p \nmid q$, поэтому можно считать, что $j = p^m$. Достаточно проверить, что

$$\operatorname{ord}_K\{1 + \pi^i t^j + \pi^{i+l} t^j, \pi\} = s_{i,j}.$$

Положим $L = K(\zeta_{p^{n+m}})$, где $\zeta_{p^{n+m}}^{p^m} = \zeta_{p^n}$. Тогда поле L стандартно, и $t, \zeta_{p^{n+m}} t$ являются его вторыми локальными параметрами. По теореме 5.6 отображение $VK_2'K \to VK_2'L$, индуцированное вложением $K \hookrightarrow L$, сохраняет порядки элементов. Имеем

$$\begin{aligned} s_{i,j} &= \operatorname{ord}_K\{1 + \pi^i t^j, \pi\} = \operatorname{ord}_L\{1 + \pi^i t^j, \pi\} \\ &= \operatorname{ord}_L\{1 + \pi^i (\zeta_{p^{n+m}} t)^j, \pi\} = \operatorname{ord}_L\{1 + \zeta_{p^n} \pi^i t^j, \pi\} \\ &= \operatorname{ord}_K\{1 + (1 + \pi^l)\pi^i t^j, \pi\}. \end{aligned}$$

□

6. Ручное расширение локального кругового поля: оценки сверху

Как и в §4, предполагаем, что поле K получается из абсолютно неразветвленного поля присоединением элемента $\sqrt[l]{\zeta_{p^n} - 1}$, где $p \nmid l$, и $\pi = \sqrt[l]{\zeta_{p^n} - 1}$. Получим оценку сверху на порядки образующих, следуя схеме доказательства предложения 7.9 из [2]. Положим

$$d = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ (p+1)p^{n-2}, & n > 1. \end{cases}$$

Теорема 6.1. *Пусть* $k_0 = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$, $K_0 = k_0\{\{t\}\}$, $\pi_0 = \zeta_{p^n} - 1$. *Тогда в* $VK_2'K_0$ *выполнено*

$$p^n\{1 + \pi_0^{d+1}t^{-1}, \pi_0\} = 0.$$

Доказательство. Выберем ε так, что

$$\frac{p+1}{p^2-p} < \varepsilon < \frac{d}{e_{k_0}} + \frac{1}{(p-1)e_{k_0}}. \tag{6}$$

Это можно сделать, так как при $n = 1$ выполнено

$$\frac{d}{e_{k_0}} + \frac{1}{(p-1)e_{k_0}} = \frac{p}{(p-1)^2} > \frac{p+1}{p^2-p},$$

а при $n > 1$ выполнено $\frac{p+1}{p^2-p} = \frac{d}{e_{k_0}}$. При любом n имеем

$$\frac{d}{e_{k_0}} < \varepsilon < 1. \tag{7}$$

Построим функцию $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ по следующему правилу. Положим

$$g_i = \begin{cases} \varepsilon, & i = 0 \\ p\varepsilon - 1, & i = 1 \\ pg_{i-1} - 2, & i \geqslant 2 \end{cases},$$

и для $x = \sum_{i=0}^N a_i p^i$, где $0 \leqslant a_i \leqslant p-1$, положим $f(x) = v_p(x) + \sum_{i=0}^N a_i g_i$.

Лемма 6.2. *Функция* f *обладает следующими свойствами:*

a) $f(x + x') \leqslant f(x) + f(x')$ *для любых* x, x';
b) $f(xy) \leqslant y(f(x) - v_p(x)) + v_p(x) - v_p(y)$ *для любого* x *и* $y \leqslant p^{v_p(x)}$;
c) $f(x) - v_p(x) \to \infty$ *при* $x \to \infty$;
d) $f(x) - v_p(x) \geqslant \min\{2\varepsilon, p\varepsilon - 1\}$ *при* $x \geqslant 2$;
e) $f(x) \leqslant x\varepsilon - [x/p]$, *причем при* $1 \leqslant x \leqslant p$ *достигается равенство.*

Доказательство. Для $x = \sum_{i=0}^N a_i p^i$, где $0 \leqslant a_i \leqslant p-1$, положим $g(x) = \sum_{i=0}^N a_i g_i$. Тогда $f(x) = g(x) + v_p(x)$. Докажем, что

$$g(x + x') \leqslant g(x) + g(x') \quad \text{для любых} \quad x, x'. \tag{8}$$

Действительно, для $0 \leqslant a_i, a_i' \leqslant p-1$ имеем

$$g\Big(\sum_{i=0}^{N} a_i p^i\Big) + g\Big(\sum_{i=0}^{N} a_i' p^i\Big) = \sum_{i=0}^{N} (a_i + a_i')g_i \geqslant g\Big(\sum_{i=0}^{N} (a_i + a_i')p^i\Big),$$

так как $pg_i > g_{i+1}$.

a) Пусть

$$x = \sum_{i=0}^{N} a_i p^i, \qquad x' = \sum_{i=0}^{N} a_i' p^i, \qquad 0 \leqslant a_i, a_i' \leqslant p-1,$$

$$s = \min\{v_p(x), v_p(x')\}, \qquad s_0 = v_p(x+x').$$

Если $s = s_0$, то утверждение следует из (8).

Пусть $s_0 > s$. Тогда $v_p(x) = v_p(x') = s$, и

$$x + x' = \sum_{i=s_0}^{N} a_i p^i + \sum_{i=s_0}^{N} a_i' p^i + p^{s_0}.$$

Следовательно,

$$f(x+x') = g(x+x') + s_0 \leqslant g\Big(\sum_{i=s_0}^{N} a_i p^i\Big) + g\Big(\sum_{i=s_0}^{N} a_i' p^i\Big) + g(p^{s_0}) + s_0.$$

Получаем, что достаточно доказать, что

$$g(p^{s_0}) + s_0 \leqslant g\Big(\sum_{i=s}^{s_0-1} a_i p^i\Big) + g\Big(\sum_{i=s}^{s_0-1} a_i' p^i\Big) + 2s,$$

то есть

$$g_{s_0} + s_0 \leqslant \sum_{i=s}^{s_0-1} (p-1)g_i + g_s + 2s,$$

а это неравенство доказывается индукцией по s_0 при фиксированном s.

b) Это свойство равносильно тому, что $g(xy) \leqslant yg(x) - 2v_p(y)$. В случае $p \nmid y$ это неравенство следует из (8). В случае $y = p$, $v_p(x) \geqslant 1$ проверяется непосредственно по определению g_i. Кроме того, если неравенство верно для y и y' при всех x, то оно верно и для yy', что завершает доказательство.

c,d) Из (6) имеем $g_1 > \frac{2}{p-1}$, следовательно, последовательность g_i возрастает, и $g_i \to \infty$ при $i \to \infty$. Свойство c) следует из того, что для $x \geqslant p^i$, выполнено $f(x) - v_p(x) \geqslant g_i$.

Кроме того, если $2 \leqslant x \leqslant p-1$, то

$$f(x) - v_p(x) = f(x) \geqslant 2\varepsilon,$$

а если $p^i \leqslant x < p^{i+1}$, где $i \geqslant 1$, то

$$f(x) - v_p(x) \geqslant g_i \geqslant g_1 = p\varepsilon - 1,$$

что доказывает d).

e) При $1 \leqslant i \leqslant p$ утверждение следует непосредственно из определения, а случай $i > p$ получается применением свойства a). □

Для $j \geqslant 1$ положим

$$\mathbb{P}(j) = \{\{u, \pi_0\} \mid u \in U_{K_0}(j)\},$$
$$\mathbb{T}(j) = \Big\{\Big\{1 + \sum_{i \geqslant j} a_i t^{-i}, t\Big\} \mid a_i \in O_{k_0}, v_{k_0}(a_i) \geqslant f(i) e_{k_0}\Big\}.$$

Элементы из $\mathbb{T}(j)$ – корректно определенные элементы $VK_2'K_0$, так как выполнено $v_{k_0}(a_i) \to \infty$ при $i \to \infty$.

Лемма 6.3. *Множество $\mathbb{T}(j)$ является подгруппой $VK_2'K_0$.*

Доказательство. Пусть $u = 1 + \sum_{i \geqslant j} a_i t^{-i}$, $w = 1 + \sum_{i \geqslant j} b_i t^{-i}$, $a_i, b_i \in O_{k_0}$, $v_{k_0}(a_i), v_{k_0}(b_i) \geqslant f(i) e_{k_0}$. Тогда

$$uw = 1 + \sum_{i \geqslant j} (a_i + b_i) t^{-i} + \sum_{i_1, i_2 \geqslant j} a_{i_1} b_{i_2} t^{-i_1 - i_2}.$$

По свойству a) из предыдущей леммы имеем

$$v_{k_0}(a_{i_1} b_{i_2}) \geqslant f(i_1) e_{k_0} + f(i_2) e_{k_0} \geqslant f(i_1 + i_2) e_{k_0}.$$

Таким образом,

$$\{u, t\} + \{w, t\} = \{uw, t\} \in \mathbb{T}(j).$$

Аналогично, $-\{u, t\} = \{u^{-1}, t\} \in \mathbb{T}(j)$. □

Лемма 6.4. *Для любого i выполнено*

$$\mathbb{T}(i) \subset \mathbb{T}(i+1) + \mathbb{P}(f(i)e_{k_0} - v_p(i)e_{k_0}).$$

Доказательство. Положим $r = v_p(i)$, и докажем, что $\mathbb{T}(i)/\mathbb{T}(i+1)$ порождается классами символов $p^r\{1+[\theta]\pi_0^s t^{-i}, t\}$, где $s \geqslant f(i)e_{k_0} - re_{k_0}$, $\theta \in K_0^{(0)}$. Действительно,

$$p^r\{1+[\theta]\pi_0^s t^{-i}, t\} = \Big\{1 + \sum_{\nu=1}^{p^r} C_{p^r}^{\nu}[\theta^{\nu}]\pi_0^{s\nu}t^{-i\nu}, t\Big\}.$$

Так как $v_{k_0}(C_{p^r}^{\nu}) \geqslant (r - v_p(\nu))e_{k_0}$, то, по свойству b) из леммы 6.2, примененному к $x = i$, $y = \nu$, имеем

$$v_{k_0}(C_{p^r}^{\nu}[\theta^{\nu}]\pi_0^{s\nu}) \geqslant \nu(f(i) - r)e_{k_0} + (r - v_p(\nu))e_{k_0} \geqslant f(i\nu)e_{k_0}.$$

Таким образом, элементы

$$p^r\{1+[\theta]\pi_0^s t^{-i}, t\} \equiv \{1+[\theta]p^r\pi_0^s t^{-i}, t\} \mod \mathbb{T}(i+1)$$

порождают $\mathbb{T}(i)/\mathbb{T}(i+1)$. Для завершения доказательства леммы осталось заметить, что

$$\begin{aligned} p^r\{1+[\theta]\pi_0^s t^{-i}, t\} &= -\frac{p^r}{i}\{1+[\theta]\pi_0^s t^{-i}, t^{-i}\} \\ &= \frac{p^r}{i}\{1+[\theta]\pi_0^s t^{-i}, \pi_0^s\} \in \mathbb{P}(f(i)e_{k_0} - v_p(i)e_{k_0}). \end{aligned}$$

□

Лемма 6.5. *Имеем* $\mathbb{T}(2) \subset \mathbb{P}(d+2)$.

Доказательство. Пусть M – наименьшее целое число, такое, что

$$M \geqslant \min_{i \geqslant 2}(f(i)e_{k_0} - v_p(i)e_{k_0}).$$

Тогда из предыдущей леммы и свойства c) леммы 6.2 следует, что $\mathbb{T}(2) \subset \mathbb{P}(M)$. Докажем, что $M \geqslant d+2$.

Пусть $n = 1$. Так как

$$\frac{d}{e_{k_0}} + \frac{1}{(p-1)e_{k_0}} = \frac{p}{(p-1)^2} < \frac{1}{p-2},$$

то по (6) имеем $p\varepsilon - 1 < 2\varepsilon$. Применяя свойство d) леммы 6.2 и (6), получаем, что при $i \geqslant 2$ выполнено

$$f(i)e_{k_0} - v_p(i)e_{k_0} \geqslant (p\varepsilon - 1)(p-1) > \Big(\frac{p+1}{p-1} - 1\Big)(p-1) = 2.$$

Таким образом, $M \geqslant 3 = d + 2$.

Пусть $n > 1$. Из (7) имеем

$$2\varepsilon e_{k_0} > 2d \geqslant d + 2,$$

и

$$\begin{aligned}(p\varepsilon - 1)e_{k_0} > pd - e_{k_0} &= p^{n-1}(p+1) - p^{n-1}(p-1)\\ &= 2p^{n-1} \geqslant (p+1)p^{n-2} + 2 = d + 2.\end{aligned}$$

Применяя свойство d) леммы 6.2, получаем, что $M \geqslant d + 2$. $\square$

Докажем, что существует $u_0 \in V_{K_0}$, такой, что

$$u_0 \equiv 1 - \pi_0^{d+1}t^{-1} \mod U_{K_0}(d+2)$$

и $p^n\{u_0, \pi_0\} = 0$ в $VK_2'K_0$. Положим $u_1 = 1 - \frac{\pi_0^{d+1}t^{-1}}{1-\pi_0^d t^{-1}}$, тогда

$$\begin{aligned}\{u_1, \pi_0\} &= \{u_1, \pi_0^{d+1}t^{-1}\} - \{u_1, (1+\pi_0)\pi_0^d t^{-1}\} + \{u_1, 1+\pi_0\}\\ &= \{u_1, 1 - \pi_0^d t^{-1}\} - \{1+\pi_0, 1-\pi_0^d t^{-1}\} + \{u_1, 1+\pi_0\}.\end{aligned}$$

Так как $(1+\pi_0)^{p^n} = \zeta_{p^n}^{p^n} = 1$, то

$$\begin{aligned}p^n\{u_1, \pi_0\} &= p^n\Big\{1 - \frac{\pi_0^{d+1}t^{-1}}{1-\pi_0^d t^{-1}}, 1 - \pi_0^d t^{-1}\Big\}\\ &= p^n\Big\{\pi_0^{d+1}t^{-1}, 1 + \frac{{\pi_0}^{2d+1}t^{-2}}{1 - \pi_0^d t^{-1} - \pi_0^{d+1}t^{-1}}\Big\}.\end{aligned}$$

Обозначим $1 + \frac{{\pi_0}^{2d+1}t^{-2}}{1-\pi_0^d t^{-1} - \pi_0^{d+1}t^{-1}}$ через u_2, тогда

$$\{\pi_0, u_2\} \in \mathbb{P}(2d+1) \subset \mathbb{P}(d+2).$$

Рассмотрим $\{t, u_2\}$. При разложении u_2 в сумму $u_2 = \sum_{i\geqslant 2} a_i t^{-i}$, $a_i \in O_{k_0}$ выполнено $v_{k_0}(a_i) \geqslant di+1$. По свойству e) из леммы 6.2 и (6) при $2 \leqslant i \leqslant p-1$ имеем

$$f(i)e_{k_0} = i\varepsilon e_{k_0} < \Big(\frac{d}{e_{k_0}} + \frac{1}{(p-1)e_{k_0}}\Big) ie_{k_0} \leqslant \Big(\frac{d}{e_{k_0}} + \frac{1}{ie_{k_0}}\Big) ie_{k_0} = di+1,$$

а при $i \geqslant p$ имеем

$$f(i)e_{k_0} \leqslant (i\varepsilon - [i/p])e_{k_0} < di + \frac{i}{p-1} - \Big[\frac{i}{p}\Big]e_{k_0} \leqslant di < di+1.$$

Таким образом, $\{t, u_2\} \in \mathbb{T}(2)$, и, по лемме 6.5, $\{t, u_2\} \in \mathbb{P}(d+2)$.

Получаем, что существует

$$u_3 \equiv 1 \mod U_{K_0}(d+2),$$

такой, что $p^n\{u_1, \pi_0\} = p^n\{u_3, \pi_0\}$. Таким образом, $p^n\{u_1u_3^{-1}, \pi_0\} = 0$ и

$$u_1u_3^{-1} \equiv u_1 \equiv 1 - \pi_0^{d+1}t^{-1} \mod U_{K_0}(d+2).$$

Следовательно, $u_1u_3^{-1}$ можно взять в качестве u_0.

Имеем $u_0 = 1 + \pi_0^{d+1}t'^{-1}$, где t' является вторым локальным параметром K_0. Следовательно, порядки $\{u_0, \pi_0\}$ и $\{1+\pi_0^{d+1}t^{-1}, \pi_0\}$ в $VK_2'K$ равны, что доказывает утверждение теоремы. □

Теорема 6.6. *Пусть $s(i)$ – наименьшее целое неотрицательное число, такое, что*

$$p^{s(i)}i \geqslant (d+1)l,$$

и $\mu_{i,j} = s(i) + v_p(j) + n$. Тогда при $(i,j,\theta) \in I$, $j \neq 0$ порядок элемента $x_{i,j,\theta}$ в $VK_2'K$ не превосходит $p^{\mu_{i,j}}$.

Доказательство. По лемме 5.4 достаточно доказать, что в $VK_2'K$ выполнено

$$p^n\{1+\pi^{(d+1)l}t^{-1}, t\} = 0.$$

Пусть $K_0 = \mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n})\{\{t\}\}$, и $\pi_0 = \pi^l$. Из предыдущей теоремы следует, что в $VK_2'K_0$ выполнено

$$\begin{aligned} p^n\{1+\pi^{(d+1)l}t^{-1}, t\} &= p^n\{1+\pi^{(d+1)l}t^{-1}, \pi^{(d+1)l}\} \\ &= p^n(d+1)\{1+\pi_0^{d+1}t^{-1}, \pi_0\} = 0. \end{aligned}$$

Так как $K_0 \subset K$, то в $VK_2'K$ требуемое равенство также верно. □

Следствие 6.7. 1) *Пусть* $n = 1, j \neq 0$. *Тогда при* $i \geqslant 2l$ *порядок элемента* $x_{i,j,\theta}$ *равен* $p^{v_p(j)+1}$, *при* $(j,i) < (0,l)$, $\frac{2l}{p^r} < i < \frac{l}{p^{r-1}}$, $j \neq 0$ *порядок* $x_{i,j,\theta}$ *равен* $p^{r+v_p(j)+1}$.

2) *Если* $n > 1$, $i \geqslant (p^{n-1} + p^{n-2} + 1)l$, $j \neq 0$, *то порядок элемента* $x_{i,j,\theta}$ *равен* $p^{n+v_p(j)}$.

Доказательство. Следует из теорем 4.5 и 6.6. □

Замечание 6.8. В случае $K = \mathbb{Q}_p(\zeta_p)\{\{t\}\}$, $\pi = \zeta_p - 1$ порядок $\{1 + \pi t^j, t\}$ при $p \nmid j$ равен p^2. Если бы этот порядок был равен p, то из теоремы 5.3(1) и теоремы 4.5 получалось бы, что порядок $\{1 + \pi t^j, t\}$ при $j > 0$ равен $p^{1+v_p(j)}$, то есть оценки из теоремы 4.5 были бы точны. Но в таком случае в топологической группе $U(1)K_2^{\mathrm{top}}K$ была бы верна теорема единственности, а именно, для данного элемента $a \in U(1)K_2^{\mathrm{top}}K$ в представлении

$$\begin{aligned} a = &\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p-1 \\ -\infty < j < \infty}} n_{i,j}\{1 + \pi^i t^j, t\} + \sum_{\substack{-\infty < j \leqslant -1 \\ p \nmid j}} n_{p,j}\{1 + \pi^p t^j, \pi\} \\ &+ n_t\{1 + \pi^p, \pi\} + n_\pi\{1 + \pi^p, t\} \end{aligned} \tag{9}$$

коэффициенты $n_{i,j}$ были бы однозначно определены по модулю $p^{\lambda_{i,j}}$ в обозначениях теоремы 4.5, коэффициент n_t – по модулю p, а коэффициент n_π – однозначно определен (см. [2], предложение 10.1). Однако это не так. Имеем

$$\begin{aligned} &\left\{1 - \frac{\pi t}{1-t}, t\right\} = \left\{1 - \frac{\pi t}{1-t}, (1+\pi)t\right\} - \left\{1 - \frac{\pi t}{1-t}, 1+\pi\right\} \\ =&\{1-t, 1+\pi\} - \left\{1 - \frac{\pi t}{1-t}, 1+\pi\right\} = \{1-t, \zeta_p\} - \left\{1 - \frac{\pi t}{1-t}, \zeta_p\right\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Порядок правой части не превосходит p. С другой строны, имеем

$$1 - \frac{\pi t}{1-t} \equiv \prod_{j \geqslant 1} (1 - \pi t^j) \mod U_K(2),$$

следовательно, левую часть (10) можно представить в виде (9) так, что для любого $j > 0$ будет выполнено $n_{1,j} \equiv -1 \mod p$. Тогда при $p \mid j$, $j > 0$ не будет выполнено $p^{\lambda_{1,j}} \mid pn_{1,j}$.

Литература

1. В. Г. Бойцов, И. Б. Жуков, *Продолжимость циклических расширений полных дискретно нормированных полей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 5–15.
2. И. Б. Жуков, *Милноровские и топологические K-группы многомерных полных полей.* — Алгебра и анализ **9**, No. 1 (1997), 98–147.
3. И. Б. Жуков, *Абелевы расширения и топологические K-группы многомерных локальных полей.* — Диссертация на соискание ученой степени кандидата физ.-мат. наук. Ленинградский государственный университет, 1991.
4. О. Ю. Иванова, *Топологические K-группы двумерных локальных полей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 206–221.
5. И. Б. Фесенко, *Теория локальных полей. Теория полей классов. Многомерная локальная теория полей классов.* — Алгебра и анализ **4**, No. 3 (1992), 1–42.
6. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions. A constructive approach.* Transl. Math. Monographs, vol. 121, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1993.
7. O. Hyodo, *Wild ramification in the imperfect residue field case.* — Galois Representations and Arithmetic Algebraic Geometry (Kyoto, 1985/Tokyo, 1986), Adv. Stud. Pure Math., vol. 12, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 287–314.
8. H. Miki, *On $\mathbb{Z}_p$-extensions of complete p-adic power series fields and function fields.* — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A Math **21** (1974), 377–393.
9. S. Vostokov, *Explicit formulas for the Hilbert sympol.* — Invitation to Higher Local Fields (Munster, 1999), Geom. Topol. Monogr., vol.3, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000, pp. 81–89.
10. I. Zhukov, *Higher dimensional local fields.* — (Munster, 1999), Geom. Topol. Monogr., vol.3, Geom. Topol. Publ., Coventry, 2000, pp. 5–18.

Ivanova O. Yu. Orders of topological generators of the K-group of a standard two-dimensional local field.

We consider the topological K-group of a complete, weakly unramified over the constant subfield, two-dimensional local field of mixed characteristic and with finite second residue field. We estimate the orders of natural generators of this group from above and from below, and prove some relations between these orders.

С.-Петербургский
государственный университет
E-mail: olgaiv80@ mail.ru

Поступило 23 июня 2008 г.