Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 355, 2008 г.

И. Е. Максименко, Е. Л. Рабкин

МНОГОМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ СЧИСЛЕНИЯ

§1. Введение

Задача возникла при попытке обобщить на многомерный случай теорему из одномерной теории всплесков (а именно, теорему 6.3.5 [1]), в которой используется двоичное разложение.

Когда мы говорим о системах счисления в обычном смысле, мы используем то обстоятельство, что, зафиксировав натуральное число n больше единицы, каждое натуральное число z можно записать однозначно в конечной форме

$$z = \sum_{j=0}^{N} d_j n^j, \quad \text{где} \quad d_j \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Здесь n – основа системы счисления, положительное число. Если $n = 2$, то это двоичная система счисления. Отрицательные целые числа можно представлять разными способами. Например, можно раскладывать число по цифрам $(-d_j)$ или в качестве основания брать $(-n)$. Оба эти способа предполагают, что мы заранее знаем, положительное или отрицательное число перед нами. Другой "единый" способ раскладывать отрицательные числа – это разрешить "лишнее" слагаемое, то есть представить z в виде

$$z = (-1) \cdot n^{N+1} + \sum_{j=0}^{N} d_j n^j, \quad \text{где} \quad d_j \in \{0, \dots, n-1\}, \tag{1}$$

например, $-27 = (-1) \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 3$. Кроме того, любое число z из отрезка $[0, 1)$ может быть разложено по отрицательным степеням n:

$$z = \sum_{j=1}^{+\infty} d_j n^{-j}, \quad \text{где} \quad d_j \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Работа первого автора выполнена при содействии РФФИ, грант No. 06-01-00457.

В многомерном случае основанием системы счисления является матрица, а роль цифр играют векторы.

В венгерском университете были исследованы многомерные системы счисления вплоть до размерности 12 в случае, если модуль определителя матрицы M равен двум
(см. `http://szdg.lpds.sztaki.hu/szdg/desc_numsys_ed.php`).

В данной работе в качестве матрицы-основы рассматривается произвольная матрица растяжения (т.е. целочисленная квадратная матрица, такая что все ее собственные числа по модулю больше единицы). В многомерном случае векторы не делятся на положительные и отрицательные, тем не менее можно провести некоторую аналогию с одномерным случаем, допуская разложение вида (1) (что нужно взять в качестве -1, будет объяснено ниже). В §3 показано, как найти множество векторов-цифр для данной матрицы, как разложить любой целый вектор по степеням матрицы, и доказано существование и единственность разложения целых векторов. §4 посвящен примерам. В §5 указаны свойства многомерного аналога -1. В §6 доказано существование разложения для вещественных векторов.

§2. Обозначения и вспомогательные результаты

Пусть M – невырожденная, целочисленная матрица размера $d \times d$, $\det M$ – определитель матрицы M, I_d – единичная матрица размера $d \times d$. Будем говорить, что векторы $k, n \in \mathbb{Z}^d$ сравнимы по модулю M и писать $k \equiv n \pmod M$, если $k - n = M\ell$, $\ell \in \mathbb{Z}^d$. Целочисленная решетка $\mathbb{Z}^d$ разбивается на классы смежности относительно введенного отношения сравнения, число классов смежности равно $m := |\det M|$ (см., например, [4, с. 107]). Назовем M-цифрами любую совокупность векторов $y_0 = \mathbf{0}; y_1, \ldots, y_{m-1}$, принадлежащих разным классам смежности, обозначим множество M-цифр через $D(M)$.

Предложение 1. *Пусть M – невырожденная, целочисленная матрица размера $d \times d$. Тогда множество $H(M) := \mathbb{Z}^d \cap M[0,1)^d$ состоит из представителей каждого класса смежности.*

Доказательство. Если $|\det M| = 1$, то $H(M)$ состоит из одного элемента и утверждение предложения очевидно. Пусть $|\det M| > 1$. Покажем, что в $H(M)$ нет сравнимых между собой элементов по модулю матрицы M. Пусть векторы s_1, $s_2 \in H(M)$ сравнимы между собой, тогда $s_1 - s_2 = M\ell$, где ℓ – некоторый целый вектор. Домножив равенство на M^{-1}, получим, что разность двух элементов из $[0,1)^d$

равна целому вектору, что возможно, только если $\ell = \mathbf{0}$, а значит и $s_1 = s_2$.

Покажем, что любой вектор $a \in \mathbb{Z}^d$ сравним с одним из элементов множества $H(M)$ по модулю матрицы M. Рассмотрим вектор $M^{-1}a$. Существует целый вектор ℓ, такой что вектор $b := M^{-1}a + \ell$ попадет в куб $[0,1)^d$. Тогда целый вектор Mb попадает в $H(M)$, и вектор a сравним с вектором Mb по модулю матрицы M. □

Следствие 2. *Множество $H(M)$ можно взять в качестве множества M-цифр. В некотором смысле такой выбор наиболее естественен, поскольку в одномерной m-ичной системе счисления набор цифр $\{0, 1, \dots, (m-1)\}$ можно рассматривать как множество $\mathbb{Z} \cap m[0, 1)$.*

Иногда бывает удобно в качестве множества M-цифр $D(M)$ взять векторы, лежащие на одной прямой. Если у матрицы M существует вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$ такой, что у вектора

$$M^{-1}\mathbf{a} = \left(\frac{a_1}{m},\ \frac{a_2}{m}, \cdots, \frac{a_d}{m}\right), \quad a_1, \dots, a_d \in \mathbb{Z}, \tag{2}$$

числа $a_1, \dots, a_d$ взаимно просты, т.е. наибольший общий делитель (НОД) чисел $a_1, \dots, a_d$ равен 1, то будем говорить, что для такой матрицы выполнено условие $(*)$. Условие $(*)$ выполнено, например, если у матрицы простой определитель (тогда в качестве вектора $\mathbf{a}$ можно взять любой не сравнимый с нулем вектор). Также условие $(*)$ выполнено, если из столбцов присоединенной матрицы M существует хотя бы один со взаимно простыми элементами. Не умаляя общности, можно считать, что координаты вектора $(M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1d})^T$, где M_{ij} – это алгебраические дополнения матрицы M, взаимно просты. Тогда, взяв в качестве $\mathbf{a}$ вектор $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, получим, что $M^{-1}e_1 = \frac{1}{m}(M_{11}, M_{12}, \dots, M_{1d})^T$ и вектор $\mathbf{a} = e_1$ искомый. Условие $(*)$ заведомо не выполнено для целочисленных матриц, у которых НОД всех элементов не равен 1.

Предложение 3. *Пусть M – матрица растяжения, такая что выполнено условие $(*)$. Тогда существует вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$ такой, что множество*

$$(\mathbf{a}_M) := \big\{\mathbf{0}, \mathbf{a}, 2\mathbf{a}, \dots, (m-1)\mathbf{a}\big\}$$

можно взять в качестве множества M-цифр $D(M)$.

Доказательство. Поскольку множество $(\mathbf{a}_M)$ содержит m векторов, достаточно доказать, что они принадлежат разным классам смежности по модулю матрицы M. Покажем, что вектор $k \cdot \mathbf{a}$, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, не сравним с нулевым вектором по модулю матрицы M. Предположим противное, т.е. что для некоторого k, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, существует вектор $\ell \in \mathbb{Z}^d$ такой, что $k\mathbf{a} = M\ell$ или, что то же самое,

$$\ell = kM^{-1}\mathbf{a} = \frac{k}{m}(a_1,\ a_2, \dots, a_d).$$

Поскольку числа $a_1, a_2, \dots, a_d$ взаимно просты, вектор ℓ не может быть целым ни при каком k, $1 \leqslant k \leqslant m-1$. Противоречие. $\square$

Заметим, что если m – простое нечетное число, $m = 2k+1$, то, выбирая подходящий вектор $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^d$, в качестве M-цифр можно взять множество $\{n\mathbf{a}\}$, $n = -k, -k+1, \dots, k$.

Обозначим через $\|M\|$ операторную норму матрицы M из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$, т.е. $\|M\| = \sqrt{\max \lambda_{MM^*}}$, где λ_{MM^*} – собственные числа матрицы MM^*. Напомним, что мы называем матрицу M матрицей растяжения, если M – целочисленная матрица размера $d \times d$ такая, что все ее собственные числа по модулю больше 1. Отметим, что для такой матрицы при многократном действии оператора M осуществляется растяжение по всем направлениям, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} |M^n x| = \infty$ для любого $x \in \mathbb{R}^d$, $x \neq \mathbf{0}$, поскольку $\lim\limits_{n\to+\infty} \|M^{-n}\| = 0$ и более того,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|M^{-n}\| < \infty. \tag{3}$$

Это следует из того, что весь спектр оператора M^{-1} (в конечномерном пространстве спектр совпадает с набором собственных чисел) лежит внутри круга $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leqslant r(M^{-1})\}$, где $r(M^{-1}) := \lim\limits_{n\to\infty} \|M^{-n}\|^{1/n}$ – спектральный радиус матрицы M^{-1}, а на границе круга имеется по крайней мере одна точка спектра (см., например, [3, с. 267]). Поскольку у матрицы M^{-1} все собственные числа по модулю строго меньше единицы и их конечное число, $r(M^{-1}) < 1$, откуда следует, что последовательность $\|M^{-n}\|$ убывает со скоростью геометрической прогрессии.

Лемма 4. *Пусть M – матрица растяжения, $D(M)$ – набор M-цифр. Тогда для любых $s_k \in D(M)$ и для всех $N \in \mathbb{N}$ имеем*

$$\left| \sum_{k=1}^{N} M^{-k} s_k \right| \leqslant C_M,$$

где $C_M = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \|M^{-k}\| \max\limits_{s\in D(M)} |s|$.

Доказательство.

$$\left|\sum_{k=1}^{N} M^{-k}s_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |M^{-k}s_k| \leqslant \sum_{k=1}^{N} \|M^{-k}\|\ |s_k|$$
$$\leqslant \max_{s\in D(M)} |s| \sum_{k=1}^{+\infty} \|M^{-k}\| =: C_M.$$

Сходимость последнего ряда для матриц растяжения следует из (3). □

§3. Разложение целочисленных векторов

Пусть M – матрица растяжения, $D(M)$ – набор M-цифр.

Определение 5. *Назовем ненулевой вектор $z_0 \in \mathbb{Z}^d$ зацикливающим вектором матрицы M длины r (соответствующим набору M-цифр $D(M)$), если*

$$z_0 = M^r z_0 + M^{r-1}s_{r-1} + \cdots + Ms_1 + s_0, \quad s_0, \ldots, s_{r-1} \in D(M), \quad (4)$$

где r – это наименьшее число, для которого выполняется это равенство.

Положим $z_1 := M^{-1}(z_0 - s_0)$. Вектор z_1 является целочисленным, кроме того, он будет зацикливающим длины r с последовательностью цифр $s_1, \ldots, s_{r-1}, s_0$, т.е.

$$z_1 = M^r z_1 + M^{r-1}s_0 + M^{r-2}s_{r-1} + \ldots + s_1.$$

Аналогично рассуждая, можно показать, что если z_0 – зацикливающий вектор длины r, то вместе с ним зацикливающими длины r будут векторы $z_1, \ldots, z_{r-1}$, для которых выполняется равенство (4) с круговой перестановкой M-цифр $s_0, s_1, \ldots, s_{r-1}$.

Теорема 6 (О “девятках”)**.** *Пусть M – матрица растяжения, $D(M)$ – набор M-цифр, вектор z_0 – зацикливающий вида (4). Тогда*

$$-z_0 = \sum_{l=0}^{\infty} M^{-lr} \sum_{k=1}^{r} M^k s_{r-k} = \sum_{l=1}^{\infty} M^{-l} y_l, \quad (5)$$

где $y_l = y_{rk+n} = s_{r-n} \in D(M)$, $n = 0, \dots, r-1$, $k \in \mathbb{Z}^d$.

Доказательство. Вектор z_0 имеет вид (4). Обозначим через s вектор $\sum\limits_{k=0}^{r-1} M^k s_k$, тогда вектор z_0 равен $M^r z_0 + s$. Посчитав сумму геометрической прогрессии со знаменателем M^{-r}, получим $\sum\limits_{l=1}^{\infty} M^{-lr} s = (M^r - I_d)^{-1} s$. Положим $a := (M^r - I_d)^{-1} s$, тогда $s = M^r a - a$. Но, с другой стороны, $s = z_0 - M^r z_0$, вычитая из одного равенства другое, получим $z_0 + a = M^r(z_0 + a)$. Но у матрицы M нет собственных чисел, равных единице, значит, их нет и у матрицы M^r, следовательно, $z_0 = -a = -\sum\limits_{l=1}^{\infty} M^{-lr} s$. □

Теорему 6 можно доказать "в лоб". Из определения зацикливающих векторов следует, что

$$\begin{aligned} z_0 &= M^{-r} z_0 - M^{-1} s_{r-1} - \dots - M^{-r+1} s_1 - M^{-r} s_0 \\ &= M^{-2r} z_0 - M^{-r-1} s_{r-1} - \dots - M^{-2r+1} s_1 - M^{-2r} s_0 \\ &\quad - M^{-1} s_{r-1} - \dots - M^{-r+1} s_1 - M^{-r} s_0 = \dots = \\ &= -\sum_{l=0}^{\infty} M^{-lr} \sum_{k=1}^{r} M^k s_{r-k} = -\sum_{l=1}^{\infty} M^{-l} y_l, \end{aligned}$$

где $y_l = y_{rk+n} = s_{r-n}$. □

Заметим, что если z_0 является зацикливающим длины 1, $z_0 = M z_0 + s_0$, то

$$-z_0 = \sum_{l=1}^{\infty} M^{-l} s_0. \tag{6}$$

В десятичной системе счисления при стандартном наборе цифр существует единственное зацикливающее число -1,

$$-(-1) = 1 = 0,(9) = 0,999\ldots = \sum_{l=1}^{\infty} 10^{-l} 9.$$

M-цифра s_0 в ситуации (6) является аналогом цифры "9". Однако в общем случае "девятка" может быть не одна. Для матрицы M будем называть последовательностью M-девяток последовательность M-цифр $s_{r-1}, \dots, s_0$. Кроме того, зацикливающих векторов у данной матрицы может быть несколько, и каждому зацикливающему вектору будет соответствовать своя последовательность M-девяток.

Следствие 7. *Пусть M – матрица растяжения. Тогда*

$$|z_0| \leqslant C_M$$

для всех зацикливающих векторов z_0 матрицы M, где C_M – константа из леммы 4.

Доказательство сразу следует из теоремы 6 и леммы 4.

Заметим, что для данной матрицы цепочка зацикливающих векторов не обязательно единственная, но количество зацикливающих векторов для каждой матрицы конечно. Таким образом, чтобы найти все зацикливающие векторы для данной матрицы M, надо найти константу C_M, а потом разложить в M-разложение (см. ниже) все целочисленные векторы, модуль которых не превосходит величины C_M. Кроме того, зацикливающий вектор длины r вида (4) можно найти как сумму геометрической прогрессии $z = -(M^r - I_d)^{-1} \sum\limits_{k=0}^{r-1} M^k s_k$. Если $C_M < 1$, то зацикливающих векторов нет.

Теорема 8 (О разложении целочисленных векторов)**.** *Пусть M – матрица растяжения, $D(M)$ – набор M-цифр. Тогда для любого $x \in \mathbb{Z}^d$ существует представление*

$$x = M^{N+1} z_0 + \sum_{k=0}^{N} M^k y_k, \tag{7}$$

где $N \in \mathbb{N}$, $y_0, \dots, y_N \in D(M)$, а вектор $z_0 \in \mathbb{Z}^d$ либо зацикливающий, либо нулевой. Кроме того, представление (7) единственно, если в случае $z_0 = 0$ исключить возможность $y_N = 0$ (т.е. считать, что мы ищем разложение порядка $N-1$), а в случае, когда z_0 – зацикливающий вектор, считать, что M-цифра y_N не является соответствующей M-девяткой (т.е. в этом случае вектор $Mz_0 + s_0$ надо заменить на z_1, где z_1 либо равен z_0, либо является другим вектором из цепочки зацикливающих векторов длины $r > 1$).

Доказательство. Зафиксируем произвольный вектор $x \in \mathbb{Z}^d$. Вектор x сравним с одной из M-цифр из $D(M)$, обозначим ее через y_0, то есть $x = Ma_0 + y_0$, где $a_0 \in \mathbb{Z}^d$. Далее, вектор a_0 сравним с одной из M-цифр из $D(M)$, обозначим ее через y_1, то есть $a_0 = Ma_1 + y_1$, где $a_1 \in \mathbb{Z}^d$. При этом получаем, что $x = M^2 a_1 + My_1 + y_0$ и т.д. Остановившись на n-м шаге, получим

$$x = M^{n+1}a_n + M^n y_n + \cdots + My_1 + y_0, \tag{8}$$

где $y_0, \dots, y_n \in D(M)$, $a_n \in \mathbb{Z}^d$. Предположим, что вектор x можно разложить другим способом. Остановившись на n-м шаге, получим

$$x = M^{n+1}a_n^1 + M^n y_n^1 + \cdots + My_1^1 + y_0^1. \tag{9}$$

Приравнивая правые части формул (8) и (9), получим

$$M^{n+1}a_n + M^n y_n + \ldots + My_1 + y_0 = M^{n+1}a_n^1 + M^n y_n^1 + \ldots + My_1^1 + y_0^1.$$

Отсюда следует, что вектор y_0 сравним с вектором y_0^1 по модулю матрицы M. Поскольку y_0, $y_0^1 \in D(M)$, они совпадают. Вычитая из правой и левой части последнего равенства y_0 и домножая слева на M^{-1}, аналогичными рассуждениями получим, что $y_1 = y_1^1$. И так далее. Следовательно, $y_k = y_k^1$ для любого $k = 0, \dots, n$, а значит и $a_n = a_n^1$. Таким образом, разложение вида (8) для каждого целого вектора единственно, если останавливаться на n-м шаге.

Оценим модуль векторов a_n. Используя лемму 4, получим

$$|a_n| = |M^{-n-1}x - M^{-1}y_n - \ldots - M^{-n}y_1 - M^{-n-1}y_0|$$

$$\leqslant |M^{-n-1}x| + \left|\sum_{k=1}^{n+1} M^{-k}y_{n-k}\right| \leqslant C + C_M,$$

где C – некоторая положительная постоянная. Векторы a_n – целочисленные, их модуль равномерно ограничен, значит различных векторов a_n конечное число. Следовательно, на каком-то шаге либо разложение оборвется, то есть $a_k = 0$, либо мы получим вектор a_k, который уже встречался раньше. Пусть $a_n = a_k$ при $k > n$. Представим вектор x двумя способами, остановившись на n-м и на k-м шаге:

$$x = M^{k+1}a_k + M^k y_k + \ldots + M^{n+1}y_{n+1} + M^n y_n + \ldots + My_1 + y_0,$$

$$x = M^{n+1}a_n + M^n y_n + \ldots + My_1 + y_0.$$

Вычтем одно разложение из другого, получим уравнение для a_n:

$$\mathbf{0} = (M^{k+1} - M^{n+1})a_n + M^k y_k + \ldots + M^{n+1}y_{n+1}$$

или

$$a_n = M^{k-n}a_n + M^{k-n-1}y_k + \ldots + My_{n+2} + y_{n+1}.$$

Таким образом, вектор a_n будет зацикливающим длины $k-n$. Если в разложении вектора x будем останавливаться на первом зацикливающем векторе, то представление единственно. □

Если при разложении вектора x вектор z_0 оказался равным нулю, то вектор x назовем M-положительным, если z_0 отличен от нуля, то вектор x назовем M-отрицательным. Однако, существенное отличие от одномерного случая состоит в том, что сумма положительных векторов при таком определении может не быть положительным вектором. Это хорошо видно на рис. 1–4.

Выбор цифр влияет на количество зацикливающих векторов, на "положительность" и "отрицательность" векторов. При десятичном разложении, если в качестве множества цифр взять числа $10, 11, \ldots, 19$, то "отрицательными" будут все числа, меньшие 10. Если же выбрать в качестве цифр множество $\{-4, -3, \ldots, 4, 5\}$, то все целые числа будут "положительными". Более общий результат для одномерного случая можно сформулировать так.

Предложение 9. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$, $|n| > 1$ – основание системы счисления. Тогда если $n \neq 2$, то можно выбрать множество цифр $D(n)$ так, чтобы зацикливающие числа отсутствовали, и любое число $x \in \mathbb{Z}$ можно было представить (единственным образом) в виде*

$$x = \sum_{k=0}^{N} n^k d_k,$$

где $d_k \in D(n)$, $k = 1, \ldots, N$.

Если $n = 2$, то при любом выборе множества цифр будет существовать зацикливающее число, а значит и "отрицательные" числа.

Доказательство. Зафиксируем основание n, $|n| > 2$. Если n – четное, $|n| = 2k$, то в качестве множества цифр возьмем множество $D(n) := \{-k+1, -k+2, \ldots, 0, 1, \ldots, k\}$. Если n – нечетное, $|n| = 2k+1$, то в качестве множества цифр возьмем множество $D(n) := \{-k, -k+1, \ldots, 0, 1, \ldots, k\}$. Предположим, что существует зацикливающее число z_0 длины R, то есть

$$z_0 = n^R z_0 + \sum_{j=0}^{R-1} n^j d_j,$$

где $d_j \in D(n)$. Тогда

$$z_0 = -(n^R - 1)^{-1} \sum_{j=0}^{R-1} n^j d_j.$$

Оценим модуль зацикливающего вектора, учитывая, что $\max |d_j| < k$.

$$|z_0| \leqslant |(n^R - 1)^{-1}| k \sum_{j=0}^{R-1} |n|^j = \frac{k}{|n^R - 1|} \cdot \frac{|n|^R - 1}{|n| - 1} \leqslant \frac{k}{|n| - 1} < 1.$$

Число z_0 – целое, его модуль меньше единицы, значит, $z_0 = 0$.

Если $n = -2$, то, выбирая ненулевую цифру, равную 1, получим

$$|z_0| \leqslant |((-2)^R - 1)^{-1}| \left| \sum_{j=0}^{R-1} (-2)^j \cdot d_j \right| < \frac{\left| \sum\limits_{j=0}^{R-1} 2^j \right|}{|2^R - 1|} = 1,$$

где d_j равно 0 или 1. И опять, целое число, модуль которого меньше единицы, может быть только нулем.

Пусть теперь $n = 2$ и пусть число d является ненулевой цифрой. Тогда из равенства $z_0 = 2z_0 + d$ следует, что $z_0 = -d$, то есть число $-d$ является зацикливающим длины 1. □

Лемма 10. *Пусть n – основа одномерной системы счисления. Тогда можно выбрать "цифры" так, чтобы существовало $(n-1)$ зацикливающих векторов длины* 1.

Доказательство. В качестве множества цифр возьмем множество

$$D(n) = \{0, n-1, 2(n-1), \dots, (n-1)(n-1)\}.$$

Эти цифры не сравнимы между собой, так как, если $k(n-1) \equiv 0 \pmod{n}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, то $k(n-1) = n\ell$ для некоторого целого ℓ, но тогда $\ell = k - \frac{k}{n}$, что не может быть целым при $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Тогда числа $(-r)$, $r = 1, 2, \dots, n-1$, будут зацикливающими длины 1, так как $-r = n \cdot (-r) + r \cdot (n-1)$.

□

Следствие 11. *Для любого k, $1 \leqslant k \leqslant n-1$, можно выбрать множество цифр так, чтобы количество зацикливающих векторов равнялось k. Если $n \neq 2$, то k может быть равно нулю (см. предложение 9). В качестве множества цифр возьмем множество*

$$D(n) = \{0,\ 1, \dots, n-k-1,\ (n-1),\ 2(n-1), \dots, k(n-1)\}.$$

При $n = 10$ выбор множества цифр $\{0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81\}$ влечет 9 зацикливающих чисел

$$-1 = 10 \cdot (-1) + 9; \quad -2 = 10 \cdot (-2) + 18; \quad -3 = 10 \cdot (-3) + 27; \dots ;$$

выбор множества цифр $\{0, 1, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72\}$ влечет 8 зацикливающих чисел; выбор множества цифр $\{0, 1, 2, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63\}$ влечет 7 зацикливающих чисел и т.д.

Заметим, что для шахматной матрицы

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

при любом выборе ненулевой цифры существует зацикливающий вектор длины 1. Выражая z_0 из равенства $z_0 = Mz_0 + s_0$, получим, что

$$z_0 = -(M-I)^{-1} s_0 = -\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} s_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} s_0.$$

То есть при любом выборе ненулевой цифры s_0, вектор $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{smallmatrix}\right) s_0$ будет зацикливающим длины 1.

§4. Примеры

В примерах, приведенных ниже, в качестве множества M-цифр взято множество $H(M)$ (см. предложение 1).

Пример 1. Рассмотрим матрицу

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 3, ее M_1-цифрами являются 3 вектора

$$s_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad s_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad s_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Зацикливающим вектором является вектор $z_0 = \binom{0}{-1}$, несложно проверить, что

$$z_0 = M_1 z_0 + s_1.$$

Таким образом, z_0 является зацикливающим вектором длины 1, вектор $(1,0)^T$ является M_1-девяткой.

На рисунке 1 символом "$\star$" отмечены M_1-положительные векторы и символом "$\cdot$" – M_1-отрицательные векторы в диапазоне $[-40, 40] \times [-40, 40]$. Прослеживается фрактальная структура.

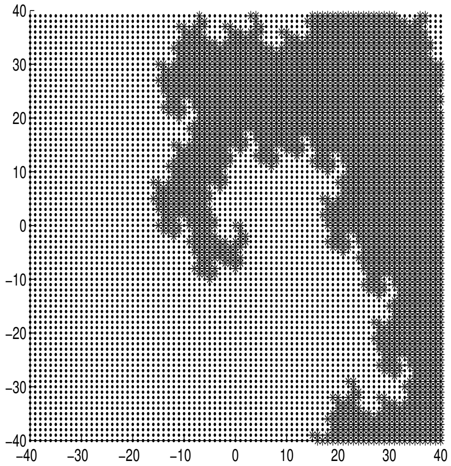

Рис. 1. Пример 1.

Пример 2. Рассмотрим матрицу

$$M_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ее определитель равен 7, у нее 7 M_2-цифр. А зацикливающими векторами являются

$$z_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad z_{02} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad z_{03} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что

$$z_{01} = M_2 z_{01} + (1,0)^T, \quad z_{02} = M_2 z_{02} + (2,0)^T, \quad z_{03} = M_2 z_{03} + (3,0)^T.$$

То есть у этой матрицы 3 зацикливающих вектора длины 1 каждый и 3 M_2-девятки $(1,0)^T$, $(2,0)^T$, $(3,0)^T$.

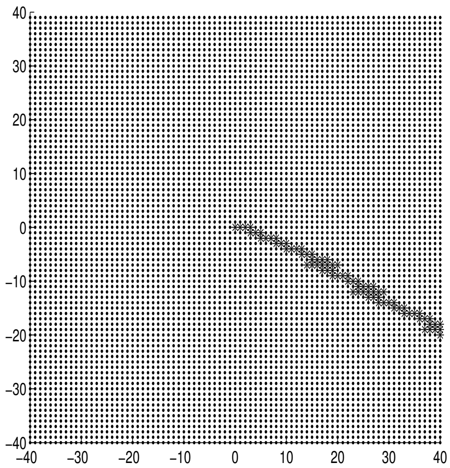

Рис. 2. Пример 2.

Пример 3. У матрицы

$$M_3 = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

определитель равен -13, значит, у нее 13 M_3-цифр. Зацикливающими являются векторы $z_{01} = (-1,0)^T$ и $z_{02} = (-1,-1)^T$, но они входят в одну цепочку, т.е.

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = M_3^2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + M_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = M_3^2 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + M_3 \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

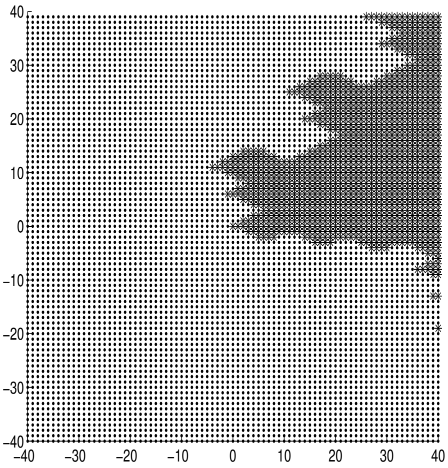

Рис. 3. Пример 3.

Таким образом, у матрицы M_3 два зацикливающих вектора, входящих в одну цепочку длины 2, последовательностью M_3-девяток являются векторы $(1,0)^T$, $(8,-2)^T$.

Пример 4. У матрицы

$$M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

зацикливающих векторов нет, и все целочисленные векторы являются M_4-положительными, M_4-девяток не существует.

Пример 5. На рисунке 4 показаны M-положительные векторы и M-отрицательные векторы для шахматной матрицы $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Фрактальная структура прослеживается особенно отчетливо.

§5. Свойства зацикливающего вектора

Теорема 12 (Обратная). *Пусть M – матрица растяжения, $D(M)$ – набор M-цифр. Пусть целочисленный вектор z представим в виде $z = \sum\limits_{l=1}^{\infty} M^{-l} y_l$, $y_l \in D(M)$. Тогда либо z – нулевой вектор и все M-цифры y_l равны нулю, либо вектор $-z$ – зацикливающий и M-цифры*

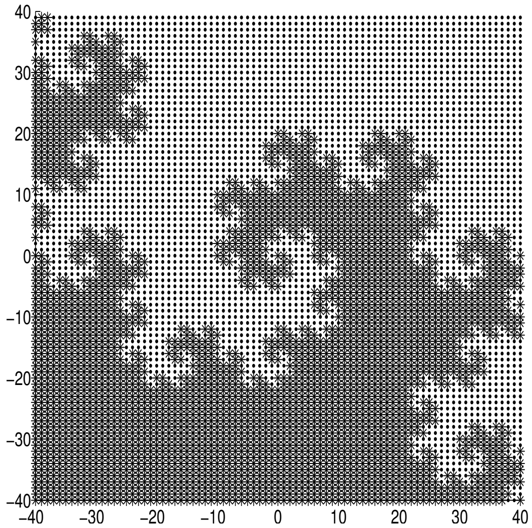

Рис. 4. Пример 5.

y_l расположены в заданном порядке и повторяются периодично (см. теорему 6*).*

Доказательство. Предположим, что целый вектор z представим в виде $z = \sum\limits_{l=1}^{\infty} M^{-l} y_l$, тогда домножим это равенство на M^p, где $p \in \mathbb{N}$ выберем позже, и перенесем влево слагаемые с неотрицательными степенями:

$$M^p z - (M^{p-1} y_1 + M^{p-2} y_2 + \ldots + y_p) = \sum_{l=1}^{\infty} M^{-l} y_{p+l} =: b. \qquad (10)$$

По лемме 4 правая часть равенства (10) равномерно по p ограничена, то есть $|b| = \left| \sum\limits_{l=1}^{\infty} M^{-l} y_{l+p} \right| \leqslant C_M$. Значит, различных целых векторов b может быть конечное число. Первый вектор, который встречается бесконечно много раз, обозначим через b_0. Домножив равенство (10) на -1, перепишем его в виде

$$-b_0 = M^p(-z) + M^{p-1} y_1 + M^{p-2} y_2 + \ldots + y_p. \qquad (11)$$

У целочисленных векторов $-b_0$ и $-z$ есть M-разложение: $-b_0 = M^j w_0 + M^{j-1} v_{j-1} + \ldots + v_0$ и $-z = M^k z_0 + M^{k-1} u_{k-1} + \ldots + u_0$, соответственно. Подставим их в равенство (11):

$$M^j w_0 + M^{j-1} v_{j-1} + \ldots + v_0 = \tag{12}$$

$$M^{p+k} z_0 + M^{p+k-1} u_{k-1} + \ldots + M^p u_0 + M^{p-1} y_1 + M^{p-2} y_2 + \ldots + y_p,$$

где w_0 и z_0 либо нулевые, либо зацикливающие векторы. Поскольку вектор b_0 встречается бесконечно много раз, можем считать, что $p > j+1$, иначе проделаем процедуру (10) еще нужное число раз. Но у любого целого вектора его M-разложение единственно, значит $v_0 = y_p, \ldots, v_{j-1} = y_{p-j+1}$ и

$$w_0 = M^{p+k-j} z_0 + M^{p+k-1-j} u_{k-1} + \cdots + M^{p-j} u_0 \\ + M^{p-1-j} y_1 + M^{p-2-j} y_2 + \cdots + y_{p-j}. \tag{13}$$

Случай 1. Вектор $-b_0$ – M-положительный, то есть $w_0 = \mathbf{0}$, тогда равенство (13) превращается в равенство

$$\mathbf{0} = M^{p+k-j} z_0 + M^{p+k-1-j} u_{k-1} + \ldots + M^{p-j} u_0 \\ + M^{p-1-j} y_1 + M^{p-2-j} y_2 + \ldots + y_{p-j},$$

отсюда следует, что $y_1 = \cdots = y_{p-j} = \mathbf{0}$ и $u_0 = \cdots = u_{k-1} = z_0 = \mathbf{0}$ из единственности M-разложений целых векторов. Это значит, что вектор z является нулевым вектором, все M-цифры равны нулю.

Случай 2. Вектор $-b_0$ не является M-положительным, т.е. $w_0 \neq \mathbf{0}$ зацикливающий длины r, т.е. $w_0 = M^r w_0 + M^{r-1} q_{r-1} + \cdots + q_0$, где $q_0, \ldots, q_{r-1} \in D(M)$, причем, продолжив разложение, получим $w_0 = M^{2r} w_0 + M^{2r-1} q_{r-1} + \cdots + M^r q_0 + M^{r-1} q_{r-1} + \cdots + q_0$, можно продолжить такое разложение вектора w_0 столько раз, сколько нужно. Равенство (13) превращается в следующее равенство:

$$w_0 = M^{2r} w_0 + M^{2r-1} q_{r-1} + \cdots + M^r q_0 + M^{r-1} q_{r-1} + \cdots + q_0 \\ = M^{p+k-j} z_0 + M^{p+k-1-j} u_{k-1} + \cdots + M^{p-j} u_0 \\ + M^{p-1-j} y_1 + M^{p-2-j} y_2 + \cdots + y_{p-j}.$$

Из единственности M-разложения для целых векторов, приравнивая цифры при одинаковых степенях M, получим, что вектор $-z$ один из зацикливающих векторов длины r цепочки, порождающейся вектором w_0. $\square$

Следствие 13 (О разложении нулевого вектора)**.** *Если*

$$\mathbf{0} = \sum_{l=-\infty}^{N} M^l y_l, \quad y_l \in D(M),$$

то $y_l = \mathbf{0}$ *для любого* $l = N, N-1, \ldots$.

Доказательство. Будем считать, что $N = 0$, так как всегда можно домножить на M^{-N} и перенумеровать. Перенося y_0 влево, получим $-y_0 = \sum\limits_{l=1}^{\infty} M^{-l} y_l$, причем вектор y_0 не может быть зацикливающим, поскольку y_0 – M-цифра. Значит, по теореме 12 вектор y_0 является нулевым. Аналогичными рассуждениями можно показать, что $y_1, \ldots, y_k, \ldots$ являются нулевыми цифрами. □

Следствие 14 (О единственности разложения целочисленных векторов)**.** *Если исключить случай бесконечного повторения M-девяток, то разложение целочисленных векторов по любым (положительным и/или отрицательным) степеням матрицы M единственно.*

Это непосредственно следует из теорем 8 и 12.

Замечание об M-рациональных дробях. В одномерном случае при разложении рациональной дроби в десятичное разложение, дробь будет периодичной, начиная с некоторого места, например, $4/7 = 0,(571428)$; $7/65 = 0,1(076923)$. По аналогии, назовем M-рациональной дробью вектор, в M-разложении которого, начиная с некоторого места, M-цифры повторяются периодически:

$$M^{-1}d_1 + \cdots + M^{-n}d_n + M^{-n-1}d_1 + \cdots + M^{-2n}d_n + M^{-2n-1}d_1 + \cdots$$
$$= (M^n - I_d)^{-1} g = \sum_{k=1}^{\infty} M^{-kn} g,$$

где $g = M^{n-1}d_1 + \cdots + Md_{n-1} + d_n$.

§6. Разложение вещественных векторов

Теорема 15 (Существование)**.** *Пусть M – матрица растяжения, $D(M)$ – набор M-цифр. Тогда любой вектор $x \in \mathbb{R}^d$ представим в виде*

$$x = M^{N+1} z_0 + \sum_{l=-N}^{\infty} M^{-l} s_l, \quad s_l \in D(M), \tag{14}$$

где $N \in \mathbb{N}$, а вектор z_0 либо зацикливающий, либо нулевой.

Доказательство. Обозначим через z_n целую часть вектора $M^n x$, т.е. $M^n x = z_n + r_n$, где $r_n \in [0,\, 1)^d$. Последовательность $M^{-n} z_n$ равномерно ограничена, так как $|M^{-n} z_n| \leqslant |x| + \sqrt{d}$. При этом очевидно, что

$$x = \lim_{n\to\infty} M^{-n} z_n. \tag{15}$$

По теореме 8 каждый целый вектор z_n представим в виде

$$z_n = M^{N+1} w_0 + \sum_{k=0}^{N} M^k s_k,$$

где $N \in \mathbb{N}$, $s_0, \dots, s_N \in D(M)$, а вектор $w_0 \in \mathbb{Z}^d$ либо зацикливающий, либо нулевой. Предположим сначала, что бесконечно много z_n раскладываются без зацикливания, в этом случае выберем подпоследовательность z_{n_k}, такую что все z_{n_k} раскладываются без зацикливания.

Разложив z_{n_k} по степеням матрицы M и умножив на M^{-n_k}, получим

$$b_k := M^{-n_k} z_{n_k} = \sum_{\ell=-N_k}^{L_k} M^\ell s_\ell.$$

Покажем, что числа L_k равномерно ограничены, то есть $|L_k| \leqslant C$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Векторы b_k ограничены в совокупности, кроме того, первые слагаемые в правой части равенств

$$b_k = \sum_{\ell=-N_k}^{-1} M^\ell s_\ell + \sum_{\ell=0}^{L_k} M^\ell s_\ell$$

тоже равномерно ограничены (относительно k) константой C_M. Значит, и вторые слагаемые равномерно ограничены. Таким образом, не умаляя общности, можно считать, что $L_k = 0$ для любого k, потому что иначе положим $L := \max L_k$ и разложим вектор $M^{-L} x$, а потом результат домножим на M^L.

Применим далее диагональный метод Кантора. Рассмотрим последовательность b_k. Хотя бы одна из M-цифр, стоящих в различных b_k при M^{-1}, встречается бесконечное число раз, обозначим ее через s_1.

Выберем из последовательности b_k подпоследовательность b_k^1, у которой на первом месте стоит s_1. Аналогично, из подпоследовательности b_k^1 выберем подпоследовательность b_k^2, на втором месте которой стоит цифра, встречающаяся бесконечное множество раз. Обозначим ее через s_2 и т.д. В результате, с одной стороны, подпоследовательность b_ℓ^ℓ стремится к x, так как это подпоследовательность исходной последовательности, с другой стороны,

$$\lim_{\ell\to\infty} b_\ell^\ell = \sum_{l=1}^{\infty} M^{-l} s_l$$

по построению. Из единственности предела получим разложение для x.

Пусть теперь бесконечное число векторов z_n раскладывается с зацикливанием. Разложив z_n по степеням матрицы M и умножив на M^{-n}, получим $M^{-n}z_n = M^{L_n+1}w_0 + \sum\limits_{\ell=-N_n}^{L_n} M^\ell s_\ell$, причем, как и выше, можно считать, что $L_n = 0$ для любого n (если какое-то зацикливающееся разложение оборвалось раньше, то его всегда можно продолжить, см. теорему 8). Предположим, что в последовательности $M^{-n}z_n$ бесконечно много раз встречается зацикливающийся вектор w_0, в этом случае, выберем подпоследовательность z_{n_k}, такую что все $M^{-n_k}z_{n_k}$ при разложении по степеням матрицы M имеют при нулевой степени зацикливающий вектор w_0. Положим $b_k := M^{-n_k}z_{n_k}$. Далее, рассуждая как в случае без зацикливания, получим

$$x = \lim_{\ell\to\infty} b_\ell^\ell = w_0 + \sum_{l=1}^{\infty} M^{-l} s_l. \qquad \square$$

Литература

1. И. Добеши, *Десять лекций по вейвлетам.* Ижевск: НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, 2001.
2. И. Е. Максименко, М. А. Скопина, *Многомерные периодические всплески.* — Алгебра и анализ **15**, вып. 2 (2003), 1–39.
3. В. А. Садовничий, *Теория операторов.* Изд-во “Высшая школа”, Москва, 1999.
4. P. Wojtaszczyk, *A mathematical introduction to wavelets.* — London Math. Soc., Student texts **37** (1997).

Maximenko I. E., Rabkin E. L. Expansion of vectors in powers of a matrix.

In this paper, we investigate the problem of expansion of any d-dimensional vector in powers of a dilation matrix M. (A dilation matrix is an integral matrix of size $d \times d$ with all eigenvalues greater than 1 in modulus.) This expansion can be viewed as a multidimensional system of numeration with the matrix as the base and a special set of vectors as the set of digits. We give a constructive method of expanding an integral vector in powers of a dilation matrix and prove the existence of an expansion for any real vector.

СПб ГУ ИТМО
E-mail: irene@ir4558.spb.edu

Поступило 31 марта 2008 г.

СПб ГУТ
E-mail: rabk@sut.ru