Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 355, 2008 г.

С. В. Кисляков

ТЕОРЕМА ЛИТЛВУДА–ПЭЛИ ДЛЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ИНТЕРВАЛОВ: ВЕСОВЫЕ ОЦЕНКИ

1. В 1983 г. Рубио де Франсиа (см. [1]) доказал, что для произвольной последовательности Δ_k попарно непересекающихся интервалов в $\mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\Big\| \Big(\sum_k \big| M_{\Delta_k} f \big|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(\mathbb{R})} \leqslant C_q \|f\|_{L^q(\mathbb{R})}, \quad 2 \leqslant q < \infty, \tag{1}$$

где постоянная C_q зависит лишь от q ($M_\Delta f \overset{\mathrm{def}}{=} (\widehat{f}\chi_\Delta)^\vee$ – мультипликатор Фурье, отвечающий множеству Δ). В той же работе [1] было доказано, что если вес w на $\mathbb{R}$ удовлетворяет условию Макенхаупта $A_{q/2}$ и $2 < q < \infty$, то

$$\Big\| \Big(\sum_k \big| M_{\Delta_k} f \big|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^q(\mathbb{R},w)} \leqslant C_q \|f\|_{L^q(\mathbb{R},w)}. \tag{2}$$

Условие $w \in A_{q/2}$ точное (см. [1]). Неизвестно, распространяется ли неравенство (2) на случай $q = 2$ при $w \in A_1$.

По поводу условий A_s см., например, [2, 3]. Напомним, что по определению вес w на $\mathbb{R}$ удовлетворяет условию A_s (символически: $w \in A_s$), если

$$\Big(\frac{1}{|I|} \int_I w \Big) \Big(\frac{1}{|I|} \int_I w^{-\frac{1}{s-1}} \Big)^{s-1} \leqslant C < \infty \quad \text{при} \quad 1 < s < \infty;$$

$$\frac{1}{|I|} \int_I w \leqslant C \operatorname*{ess\,inf}_I w \quad \text{при} \quad s = 1$$

для всех интервалов $I \subset \mathbb{R}$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 08-01-00358 .

Двойственная форма неравенства (1) выглядит так: если $\operatorname{supp}\widehat{f_k} \subset \Delta_k$, то

$$\Big\| \sum_k f_k \Big\|_{L^p(\mathbb{R})} \leqslant B_p \Big\| \Big(\sum_k |f_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R})}, \quad 1 < p \leqslant 2. \tag{3}$$

Бургейн [4] распространил это неравенство на случай $p = 1$, а в [5] оно было доказано для всех p из интервала $(0, 2]$. Естественно спросить, как выглядят соответствующие весовые неравенства. Независимо от того, присутствует вес или нет, удобно задавать двойственность с помощью *невесовой* билинейной формы $\langle f, q\rangle = \int fg$ (или $\langle \{f_n\}, \{g_n\}\rangle = \int \sum f_n g_n$ в случае пространств l^2-значных функций). Пространством, двойственным с $L^p(\mathbb{R}, b)$, будет тогда $L^q(\mathbb{R}, b^{-\frac{1}{p-1}})$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $1 \leqslant p < \infty$. Поскольку в неравенстве (2) наложено условие $w \in A_{q/2}$, при $1 < p < 2$ весовой аналог неравенства (3), т.е.

$$\Big\| \sum_k f_k \Big\|_{L^p(\mathbb{R},b)} \leqslant D_{p,b} \Big\| \Big(\sum_k |f_k|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(\mathbb{R},b)}, \tag{4}$$

выполняется при условии $b^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{q/2}$, которое переписывается так:

$$\sup_I \left(\frac{1}{|I|} \int_I b^{-\frac{1}{p-1}} \right)^{p-1} \left(\frac{1}{|I|} \int_I b^{\frac{2}{2-p}} \right)^{\frac{2-p}{2}} < \infty, \quad 1 < p < 2, \tag{α_p}$$

где верхняя грань берется по всем конечным отрезкам $I \subset \mathbb{R}$. Разумеется, в неравенстве (4) по-прежнему $\operatorname{supp}\widehat{f_k} \subset \Delta_k$, а $\{\Delta_k\}$ – последовательность попарно непересекающихся интервалов в $\mathbb{R}$. Здесь и далее в подобных ситуациях мы предполагаем априори, что $f_k \in L^1(\mathbb{R})$ (например, чтобы не заботиться о смысле преобразований Фурье $\widehat{f_k}$). Требование суммируемости функций f_k – чисто техническое и в финальных оценках никак не фигурирует.

Сформулируем основной результат заметки.

Теорема 1. *Если* $1 < r < 2$ *и* $b \in \alpha_r$, *то неравенство* (4) *справедливо при* $p \in (0, r]$.

2. Обсуждение. У теоремы 1 есть два прямых следствия. Чтобы их сформулировать, введем еще условия α_1 и α_2, получающиеся из α_p предельным переходом, соответственно, при $p \to 1$ и $p \to 2$, в предположении, что верхние грани из условия α_p ограничены равномерно по p вблизи точки 1 или 2:

$$(\alpha_1): \quad b^2 \in A_1; \qquad (\alpha_2): \quad b^{-1} \in A_1.$$

Следствие 1. *Если $b \in \alpha_1$, то неравенство* (4) *верно при $p \in (0, 1]$.*

Следствие 2. *Если $b \in \alpha_2$, то неравенство* (4) *верно при $p \in (0, 2)$.*

Действительно, из обратного неравенства Гёльдера для весов из классов Макенхаупта следует, что $b \in \alpha_1 \Rightarrow b \in \alpha_{1+\varepsilon}$ и $b \in \alpha_2 \Rightarrow b \in \alpha_{2-\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$, зависящем от веса b. Таким образом, оба следствия легко вытекают из теоремы 1.

Обратное неравенство Гёльдера позволяет также заключить, что если $1 < p < 2$, то $b \in \alpha_p \Rightarrow b \in \alpha_s$, где $s \in (p - \varepsilon, p + \varepsilon)$ при малом ε, зависящем от b. (Действительно, по определению $b \in \alpha_p \Leftrightarrow b^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'/2}$, и легко также понять, что $b \in \alpha_p \Leftrightarrow b^{-\frac{2}{2-p}} \in A_{p/(2-p)}$. Поэтому обратное неравенство Гёльдера справедливо для обеих функций: $a^{-\frac{1}{p-1}}$ и $a^{\frac{2}{p-2}}$.) Однако нетрудно видеть, что если p_1 и p_2 – разные числа из отрезка [1, 2], то имеются веса, удовлетворяющие условию α_{p_1}, но не α_{p_2}.

Далее, $\alpha_r \Rightarrow A_r$ (например, потому, что $b \in A_r \Leftrightarrow b^{-\frac{1}{r-1}} \in A_{r'}$, а условие $A_{r'/2}$ сильнее, чем $A_{r'}$). Однако для любого фиксированного $p \in [1, r)$ вес, удовлетворяющий условию α_r, вообще говоря, не обязан удовлетворять условию A_p. Это составит препятствие при попытке сделать обратный переход по двойственности от теоремы 1 к неравенству вида (2) (и, тем самым, расширить класс допустимых весов в (2)). *Непосредственное* применение двойственности превращает (4) в неравенство, где слева стоит норма некоторого фактор-пространства пространства $L^{p'}(l^2, b^{-\frac{1}{p-1}})$. Чтобы привести оценку к виду (2), надо еще, чтобы проектор Рисса $f \mapsto (\widehat{f}\chi_{[0,+\infty)})^\vee$ действовал в $L^{p'}(b^{-\frac{1}{p-1}})$, а это равносильно тому, что $b \in A_p$.

Иными словами, в теореме 1 и ее следствиях есть нечто, выходящее за рамки двойственности. Это дополнительное содержание возникает из-за того, что фактически мы имеем дело с оценками в весовых *классах Харди*, а не в лебеговых пространствах. Собственно, в отсутствии веса такая мысль проводилась еще в [4] и [5]. Как и в [5], аппаратом для доказательства теоремы 1 станут атомные разложения, но на этот раз в весовым случае.

Отметим, что результаты заметки не дают вполне удовлетворительного ответа, например, на вопрос о полном описании весов, для которых неравенство (4) справедливо при $p = 1$. Условие “$b \in \alpha_r$ при каком-нибудь $r \in [1, 2]$” лишь достаточно. Годятся, например, еще и суммы нескольких весов, удовлетворяющих условию α_r, каждый при своем r.

3. Весовые классы Харди. Мы будем пользоваться весовыми классами Харди $H^p(w)$ функций, аналитических в верхней полуплоскости (впервые систематически они изучались в [6]) и аналогичными классами $H^p(l^2, w)$, составленными из l^2-значных аналитических функций. Теория из [6] переносится на l^2-значные функции практически без изменений, поэтому мы ссылаемся на скалярные результаты из [6] в векторной ситуации без дальнейших оговорок. Как и в [6], мы предполагаем, что $w \in A_s$ при некотором $s > 1$. Пусть $0 < p \leqslant s$. Через $H^p(l^2, w)$ обозначается пространство l^2-значных функций $F(x+it)$, аналитических в верхней полуплоскости и таких, что

$$\|F\|_{H^p(l^2,w)} \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t>0} \Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}} \|F(x+it)\|_{l^2}^p w(x)dx \Bigr)^{1/p} < \infty.$$

Такие функции имеют п.в. граничные значения при $t \to 0+$, обозначаемые той же буквой F. Имеют место соотношения

$$\|F\|_{H^p(l^2,w)} \asymp \Bigl(\int\limits_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_{l^2}^p w(x)dx \Bigr)^{1/p} \asymp \|F^*\|_{L^p(w)},$$

где через F^* обозначается некасательная максимальная функция для F:

$$F^*(x) = \sup_{|u-x|\leqslant t} \|F(u+it)\|_{l^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(См. [6, §II.2].)

Мы остановимся чуть подробнее на соотношении, близком к сформулированному, которое понядобится нам в дальнейшем. Кроме того, рассуждение покажет, зачем накладывается условие $w \in A_s$. Пусть $\delta_1, \dots, \delta_k$ – какие-нибудь отрезки в $\mathbb{R}_+$ (на этот раз они могут пересекаться), а $g_1, \dots, g_k$ – функции из $L^1(\mathbb{R})$, для которых $\operatorname{supp} \widehat{g}_i \subset \delta_j$ $(j = 1, \dots, k)$.

Лемма 1. *Функция $G = \{g_k\}$ лежит в $H^p(l^2, w)$ при $0 < p \leqslant s$ и при этом*

$$\|G\|_{H^p(l^2,w)} \leqslant C_{p,w} \Bigl(\int \Bigl(\sum |g_k|^2 \Bigr)^{p/2} w \Bigr)^{1/p}.$$

Постоянная $C_{p,w}$ не зависит от k.

В этой формулировке допущена вольность: строго говоря, нужно было бы либо дополнить последовательность $\{g_k\}$ до бесконечной нулями, либо писать $H^p(l^2_{(k)}, w)$ вместо $H^p(l^2, w)$. Подобные вольности мы будем допускать и в дальнейшем.

Доказательство леммы. Разумеется, $G \in H^1(l^2)$ (без веса), так что можно написать внешне-внутреннюю факторизацию $G = \Phi\theta$ (Φ – скалярная внешняя функция, а θ – векторная внутренняя). Так как $w \in A_s$, то некасательный максимальный оператор действует в $L^s(w)$. Поэтому

$$\|G\|_{H^p(l^2,w)} \asymp \|\Phi^*\|_{L^p(w)} = \left\|\left(\Phi^{p/s}\right)^*\right\|^{s/p}_{L^s(w)} \leqslant C\|\Phi^{p/s}\|^{s/p}_{L^s(w)} \leqslant C\|G\|_{L^p(l^2,w)}. \qquad \square$$

4. Схема доказательства основного результата. При доказательстве теоремы 1 мы будем действовать примерно как в [5, с. 103–104], однако понадобятся некоторые изменения. Без потери общности можно считать, что множество интервалов Δ_j в этой теореме конечно – надо только проследить, чтобы оценочные постоянные не зависели от числа интервалов. Кроме того, мы можем и будем считать без потери общности, что $\Delta_k \subset \mathbb{R}_+$ при всех k. Как и в [5], рассмотрим сначала основной частный случай, когда длины всех отрезков Δ_j – целые степени двойки, причем существует такая постоянная $\xi \in (0, 1)$, что $\operatorname{supp} \widehat{f_j} \subset \xi\Delta_j$ при всех j (здесь и далее aI – интервал длины $a|I|$ с тем же центром, что и I).

Положим $I_k = [0, 2^k]$, пусть a_j – левый конец отрезка Δ_k, а A_k – множество тех j, для которых отрезок $\Delta_j - a_j$ совпадает с I_k (с точностью до концов). Пусть $g_j(x) = e^{-ia_jx} f_j(x)$, тогда носитель преобразования Фурье функции g_j лежит в ξI_k при $j \in A_k$.

Нам понадобится специальный оператор на пространстве $H^p(l^2, b)$. (Вспомним, что $b \in \alpha_r$, а потому $b \in A_r$, что соответствует принятым выше соглашениям.) Из леммы I.6 в [6] легко вывести, что если $h \in H^p(b)$, то при каждом $t > 0$ функция $x \mapsto h(x + it)$ растет при $|x| \to \infty$ не быстрее некоторого полинома. Поэтому определена ее свертка с любой функицей класса Шварца. Нужный нам оператор S_t выражается через такие свертки: если $h = \{h_j\} \in H^p(l^2, b)$, то

$$S_t(h)(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k \sum_{j\in A_k} e^{ia_jx} \int_{\mathbb{R}} h_j(x - u + it)\varphi_k(u)du \qquad (5)$$

(сумма конечна в соответствии с соглашением о конечности множества интервалов Δ_j). Функции φ_k в этой формуле определяются так: пусть φ – функция (из класса Шварца), преобразование Фурье которой неотрицательно и равно нулю вне отрезка $[0,1]$ и единице на отрезке $\xi \cdot [0,1]$; положим $\varphi_k(x) = 2^k \varphi(2^k x)$.

Лемма 2. *Оператор S_t действует ограниченно из $H^p(l^2, b)$ в $L^p(b)$ при $0 < p \leqslant r$, причем оценка для его нормы не зависит от t и количества отрезков Δ_j.*

Доказательство этой леммы мы временно отложим. Если принять ее, то остается заметить, что $G = \{g_j\} \in H^p(l^p, b)$ (лемма 1) и применить лемму 2 к функции G. Так как $g_j(\cdot + it) * \varphi_k = g_j * P_t$ (P_t – ядро Пуассона), то, перейдя к пределу при $t \to 0$ в неравенстве $\|S_t(G)\|_{L^p(b)} \leqslant C_{p,b} \|G\|_{H^p(l^2,b)}$, получаем (снова используя лемму 1), что

$$\Big\| \sum_j f_j \Big\|_{L^p(b)} \leqslant C_{p,b} \Big\| \Big(\sum_j |f_j|^2 \Big)^{1/2} \Big\|_{L^p(l^2,b)},$$

как и требуется.

Осталось свести теорему 1 к рассмотренному частному случаю. Как и в [5], это делается дополнительным измельчением отрезков Δ_j. Мы по-прежнему считаем, что их множество конечно; растяжением можно (без потери общности) добиться того, чтобы их длины были не менее 1.

Нам понадобится равномерная (в том же смысле, что и раньше) ограниченность еще одного семейства операторов на пространстве $H^p(l^2, b)$. Пусть $\psi \geqslant 0$ – бесконечно гладкая функция с носителем в интервале $[A^{-1}, A]$, где $A > 1$. Положим $\psi_k(x) = \psi(x/A^k)$, $k \geqslant 1$. Пусть φ – обратное преобразование Фурье функции ψ, а $\varphi_k(x) = A^k \varphi(A^k x)$ – обратное преобразование Фурье функции ψ_k. Введем оператор R_t на пространстве $H^p(l^2, b)$ формулой

$$R_t(h_1, h_2, \dots) = (r_t(h_1), r_t(h_2), \dots), \tag{6}$$

где

$$r_t(h) = \{h(\cdot + it) * \varphi_k\}_{k=1}^L$$

для скалярной функции h.

Лемма 3. *Оператор R_t действует ограниченно из $H^p(l^2,b)$ в $L^p(l^2,b)$ при $0<p\leqslant r$, причем оценка его нормы не зависит от t и L.*

Доказательство леммы 3 мы тоже отложим. Если она установлена. мы зафиксируем число A, достаточно близкое к единице, а функцию ψ выберем так, чтобы $\sum_{k\in\mathbb{Z}}\psi(x/A^k)=1$ при $x>0$. Затем введем функции $g_j(x)=e^{-i(a_j-1)x}f_j(x)$ (на этот раз мы сдвигаем левые концы интервалов Δ_j в единницу) и применим оператор R_t к последовательности $\{g_j\}=G$:

$$\|R_t(G)\|_{L^p(l^2,b)}\leqslant C\Big\|\Big(\sum_j|f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(b)},$$

где C не зависит от t. Перейдя к пределу при $t\to0$, мы получим из этого неравенства оценку квадратичной суммы функций $g_j*\varphi_k$; положив $f_{jk}(x)=e^{i(a_j-1)x}(g_j*\varphi_k)(x)$, получим разбиение $f_j=\sum_k f_{jk}$ (при каждом j суммирование обрывается на конечном числе слагаемых: $f_{jk}=0$ при больших k). Таким образом, приходим к оценке

$$C\Big\|\Big(\sum_{k,j}|f_{jk}|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(b)}\leqslant C_{p,b,A}\Big\|\Big(\sum_j|f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(b)},$$

причем носители функций $\widehat{f}_{jk}$ уменьшились по сравнению с носителем функции f_j и приобрели достаточно регулярную структуру. Заметим, что $f_{jk}\in L^1(\mathbb{R})$.

Теперь упорядочим всю последовательность f_{jk} по мере удаления вправо интервалов Δ_j, а при одном значении j – в соответствии с ростом k. Разобъем ее на несколько подпоследовательностей, относя по очереди каждый следующий элемент последовательности $\{f_{jk}\}$ к одной из них в циклическом порядке.

Заметим, что если исключить из рассмотрения те функции f_{jk}, которые оказались последними в группе, соответствующей данному j, то при надлежащем выборе параметров построения (т.е. величины A и числа подпоследовательностей) оставшиеся функции в любой из подпоследовательностей – такие, как в рассмотренном ранее частном случае (носители их преобразований Фурье хорошо разделены). Чтобы справиться с исключенными функциями, еще раз измельчим носители их преобразований Фурье, двигаясь теперь от правых концов интервалов Δ_k налево, т.е. работая с антианалитическими функциями вместо аналитических.

Итак, для доказательства теоремы 1 осталось установить леммы 2 и 3. Этим мы и будем заниматься до конца заметки.

5. Разложение на атомы. Стоит отметить, что наряду с весовыми классами $H^p(w)$ аналитических функций естественно рассматривать и "вещественные" весовые классы Харди $\mathcal{H}^p(w)$ (см. [7] и имеющиеся там ссылки). В принципе, такие классы можно ввести лишь в предположении, что вес w удовлетворяет условию удвоения

$$\int\limits_{2I} w \leqslant C \int\limits_{I} w$$

для любого конечного интервала I. Всякий A_s-вес, как хорошо известно, удовлетворяет условию удвоения. При этом оказывается, что если $w \in A_r$ при некотором $r > 1$, то $\mathcal{H}^r(w) = L^r(w)$, но при $0 < p < r$ пространство $\mathcal{H}^p(w)$ ведет себя, вообще говоря, лучше, чем $L^p(w)$ – в нем остаются ограниченными некоторые операторы, разрывные в $L^p(w)$.

Ограниченность упомянутых операторов на $\mathcal{H}^p(w)$ проще всего проверять с помощью атомных разложений. Общая теорема об атомных разложениях для вещественных весовых классов Харди приведена в [7, с. 111–112].[1] Ссылаться на нее, однако, не очень удобно – например, потому, что, формально говоря, ядро Пуассона упомянуто в [7] лишь вскользь, а все вычисления проведены для других свертывателей. Отметим только, что в той теореме, среди прочего, указано, как должно выглядеть атомное разложение при $p > 1$.

Для наших целей удобно сослаться на более слабый результат более старой работы [6]. Как уже отмечалось, переход к l^2-значным функциям от рассматривавшихся в [6] скалярных не вызывает никаких затруднений.

[1]Предупредим читателя, что в упомянутой формулировке утверждается сравнимость некоторых нормирующих функций, имеющих разные показатели однородности. Из доказательства видно, что там – не просто опечатка, хотя, разумеется, все легко улаживается. "Чистыми" опечатками и типографическими дефектами книга [7] тоже не обделена (экстремальные можно найти в конце с. 91 и 163).

Пусть $0 < p \leqslant 1$, а N – натуральное число. Сильно измеримая l^2-значная функция a называется (N, w, p)-атомом, если она сосредоточена на конечном интервале I, $\|w\|_{L^\infty} \leqslant w(I)^{-1/p}$ (здесь и далее $w(I) = \int\limits_I w$) и $\int\limits_{\mathbb{R}} a(x)x^k dx = 0$ при $0 \leqslant k \leqslant N$. Через $\widetilde{\varphi}$ мы будем обозначать преобразование Гильберта функции φ (если оно имеет смысл). Интегралы Пуассона от φ и $\widetilde{\varphi}$ (если они имеют смысл) суть гармонически сопряженные функции в верхней полуплоскости, которые мы будем обозначать теми же символами. Таким образом, о $\varphi + i\widetilde{\varphi}$ можно думать как об аналитической функции в $\mathbb{C}_+$.

Теорема об атомном разложении (см. [6, §II.3]). *Пусть $w \in A_s$ при некотором $s > 1$ и пусть $0 < p \leqslant 1$. Существует такое натуральное число $\nu = \nu(w, p)$, что для всякого $N \geqslant \nu$ пространство $H^p(l^2, w)$ допускает следующее описание:*

$$F \in H^p(l^2, w) \Leftrightarrow F = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j (a_j + i\widetilde{a}_j), \tag{7}$$

где a_j – (N, w, p)-атомы, а $(\sum |\lambda_j|^p)^{1/p} < \infty$. При этом

$$\|F\|_{H^p(l^2,w)} \asymp \inf \Big(\sum |\lambda_j|^p \Big)^{1/p},$$

где нижняя грань берется по всем представлениям указанного вида. Ряд в (7) сходится в $H^p(l^2, w)$ и равномерно на компактах в верхней полуплоскости.

6. Операторы (5) и (6). Мы докажем леммы 2 и 3 при $p = r$ и $p \leqslant 1$. Тогда для остальных p они последуют из интерполяционных соображений, см., например, обзор [8] (об автоматическом переносе результатов обзора из круга в полуплоскость см. конец §3, с. 132 в [8]).

Из теоремы об атомном разложении видно, что при $p \leqslant 1$ утверждения лемм 2 и 3 получатся, если мы проверим, что $\|S_t(a + i\widetilde{a})\|_{L^p(b)} \leqslant c$ и $\|R_t(a + i\widetilde{a})\|_{L^p(l^2,b)} \leqslant C$ для любого (N, b, p)-атома a с достаточно большим N. Постоянная C не должна зависеть ни от a, ни от t.

Пусть скалярные функции a_j – компоненты атома a. Функции φ_k, участвующие в формуле (5) или в формуле (6), не имеют в каждом из случаев спектра на отрицательной полуоси. Поэтому

$$(a_j + i\widetilde{a}_j)(\cdot + it) * \varphi_k = 2a_j * \varphi_k(\cdot + it).$$

Здесь $\varphi_k(\cdot + it) \stackrel{\text{def}}{=} \eta_k$ есть свертка функции φ_k с ядром Пуассона P_t. Функции η_k имеют примерно такую же структуру, как и φ_k. А именно, в случае оператора (5) имеем

$$\eta_k(x) = 2^k\eta_0(2^k x), \quad k \geqslant 0; \quad 0 \leqslant \widehat{\eta}_0 \leqslant 1, \quad \operatorname{supp}\widehat{\eta}_0 \subset [0,1], \tag{8}$$

а в случае оператора (6) имеем

$$\eta_k(x) = A^k\eta_0(A^k x), \quad 0 \leqslant \widehat{\eta}_0 \leqslant 1, \quad \operatorname{supp}\widehat{\eta}_0 \subset [A^{-1}, A]. \tag{9}$$

Из сказанного вытекает, что леммы 2 и 3 сводятся к следующему ниже утверждению. В формулах для операторов, фигурирующих в нем, мы удерживаем лишь конечное число членов (это никак не отражено в обозначениях). Читатель легко проследит, что окончательные оценки не зависят от числа оставленных членов. Далее, для простоты операторы можно считать лишь плотно заданными – например, на множестве ограниченных функций с ограниченным носителем.

Лемма 4. (а) *Пусть множества A_k и числа a_j имеют тот же смысл, что и в формуле* (5)*. Определим оператор σ на l^2-значных измеримых функциях $h = \{h_j\}$ формулой*

$$\sigma(h) = \sum_k \sum_{j \in A_k} e^{ia_j x}(h_j * \eta_k)(x),$$

где функции η_k удовлетворяют условиям (8)*.*

Если $1 < r < 2$ и $b \in \alpha_r$, то оператор σ ограниченно действует из $L^r(l^2, b)$ в $L^r(b)$. Далее, если $0 < p \leqslant 1$ и N достаточно велико, то $\|\sigma(a)\|_{L^p(b)} \leqslant C$ для дюбого (N, b, p)-атома a.

(б) *Пусть теперь функции η_k удовлетворяют условиям* (9)*, а оператор Λ задан на измеримых l^2-значных функциях $h = \{h_j\}$ формулой*

$$\Lambda(h) = (\lambda(h_1), \lambda(h_2), \dots),$$

где

$$\lambda(v) = \{v * \eta_k\}$$

для скалярной функции v. Если $b \in A_r$ с $r > 1$, то оператор Λ действует ограниченно из $L^r(l^2, b)$ в $L^r(l^2, b)$. Если $p \in (0, 1]$ и N достаточно велико, то $\|\Lambda(a)\|_{L^p(l^2, b)} \leqslant C$ для любого (N, b, p)-атома a.

Оценочные постоянные во всех случаях зависят лишь от b и параметров, вовлеченных в дело (таких как r, p, N), а также от оценок нескольких первых производных функции η_0 (детали см. в доказательстве).

Замечание. Из рассуждений будет видно, что все нужные оценки производных функции $\eta_0 = \varphi_0 * P_t$ выполняются равномерно по t, так что действительно из леммы 4 следуют леммы 2 и 3 в полном объеме.

7. Равномерная ограниченность операторов σ и Λ на атомах будет выведена из следующего ниже общего утверждения, невесовой вариант которого был приведен в [5]. Пусть E и F – два сепарабельных гильбертовых пространства (конечномерные не исключаются; иными словами, можно считать, что каждое – либо l^2, либо $\mathbb{C}^n$). Пусть вес w на прямой удовлетворяет условию A_r при некотором $r > 1$. Обозначим через D ($D > 1$) постоянную (не обязательно наилучшую) из условия удвоения для веса w. Рассмотрим оператор T, переводящие E-значные функции в F-значные и ограниченно действующий из $L^r(E,w)$ в $L^r(F,w)$. Предположим, что он обладает ядром $K(\cdot,\cdot)$. Это означает, что K – $\mathcal{L}(E,F)$-значная функция от двух переменных такая, что равенство

$$(Tf)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} K(x,y)f(y)dy$$

справедливо для любой ограниченной функции f с компактынм носителем, если только x не принадлежит носителю функции f. Подчиним ядро K следующему условию:

$(S_{N,w})$ для всякого конечного отрезка $I \subset \mathbb{R}$ найдется такая $\mathcal{L}(E,F)$-значная функция $p_I(x,y)$, являющаяся полиномом степени не выше N по y (с операторными коэффициентами, зависящими от x), что при всех $\xi \in E$, всех $y \in I$ и всех $s \geqslant 1$ выполняется неравенство

$$\Bigg(\int\limits_{I_s} \|(K(x,y)-p_I(x,y))\xi\|_F^r\, w(x)dx\Bigg)^{1/r} \leqslant C\|\xi\|_E \frac{w(I)^{1/r}}{|I|} D^{-Bs}, \qquad (10)$$

где $B > 1-1/r$ не зависит от I, y и ξ.

Здесь $I_s = 2^{s+1}I \setminus 2^s I$.

Лемма 5. *Пусть при сделанных предположениях функция* a *есть* (N,w,p)*-атом, причем* $1 \geqslant p > (B+\frac{1}{r})^{-1}$*. Тогда* $\|Ta\|_{L^p(F,w)} \leqslant C$*, где постоянная зависит лишь от* N*,* p*, нормы* $\|T\|_{L^r(E,w)\to L^r(F,w)}$ *и констант, встречающихся в условии* $(S_{N,w})$*.*

Замечание 1. Операторы σ и Λ из леммы 4 будут удовлетворять условию $(S_{N,w})$ с любым достаточно большим N, причем выяснится, что с ростом N постоянная B в (10) также растет неограниченно. Таким образом, условие $p > (B+\frac{1}{r})^{-1}$ ослабевает с ростом N, и в конечном счете можно будет охватить все значения $p \in (0,1]$.

Доказательство леммы 5. Имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|Ta(\cdot)\|_F^p w = \int\limits_{2I} \|Ta(\cdot)\|_F^p w + \int\limits_{\mathbb{R}\setminus 2I} \|Ta(\cdot)\|_F^p w.$$

Оценим сначала первое слагаемое справа:

$$\int\limits_{2I} \|Ta(\cdot)\|_F^p w \leqslant w(2I)^{1-p/r}\Bigg(\int\limits_{\mathbb{R}} \|Ta(\cdot)\|^r w\Bigg)^{p/r} \leqslant Cw(I)^{1-p/r}\Bigg(\int\limits_{I} \|a(\cdot)\|_E^r w\Bigg)^{p/r} \leqslant C,$$

поскольку $\|a(\cdot)\|_E \leqslant w(I)^{-1/p}$.

Теперь оценим второе слагаемое:

$$\int\limits_{\mathbb{T}\setminus 2I} \|Ta(\cdot)\|_F^p = \sum_{s\geqslant 1}\int\limits_{I_s}\Bigg\|\int\limits_{I} K(x,y)a(y)dy\Bigg\|_F^p dx$$

$$\leqslant \sum_{s\geqslant 1} w(I_s)^{1-p/r}\Bigg(\int\limits_{I_s}\Bigg\|\int\limits_{I}\big(K(x,y)-p_I(x,y)\big)a(y)dy\Bigg\|_F^r w(x)\,dx\Bigg)^{p/r}$$

(от вычитания функции $p_I(x,y)$ ничего не изменилось в силу определения атома). Далее, заметим, что $L^r(F,w)$-норма внутреннего интеграла (по I) не превосходит интеграла от нормы, а затем воспользуемся условим $(S_{N,w})$:

$$
\begin{aligned}
\dots &\leqslant C\sum_{s\geqslant 1} w(I)^{1-p/r} D^{s(1-p/r)} \\
&\times \biggl(\int\limits_I \biggl(\int\limits_{I_s} \bigl\|(K(x,y)-p_I(x,y))a(y)\bigr\|_F^r\, w(x)\,dx\biggr)^{1/r} dy\biggr)^p \\
&\leqslant C'\sum_{s\geqslant 1} w(I)^{1-p/r} D^{s(1-p)/r}|I|^p \frac{1}{w(I)}\ \frac{w(I)^{r/p}}{|I|^p} D^{-Bsp} \\
&= C'\sum_{s\geqslant 1} D^{s(1-p(B+\frac{1}{r}))} \leqslant C''
\end{aligned}
$$

в силу условия на p. □

Замечание 2. Пусть $T: L^2(E)\to L^2(F)$ – сингулярный интегральный оператор, ядро $K(x,y)$ которого допускает при каждом $n\geqslant 0$ *стандартную оценку*

$$
\|K(x,y)-p_I(x,y)\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant \frac{c_n|I|^{n+1}}{|x-y_0|^{n+2}}, \quad y\in I, \quad x\notin 2I, \tag{11}
$$

где I – произвольный конечный интервал в $\mathbb{R}$, y_0 – его центр, а $p_I(x,y)$ – некоторая функция со значениями в $\mathcal{L}(E,F)$, являющаяся полиномом степени не выше n по y. Предположим, что аналогичная оценка выполнена и с заменой ролей переменных (если ядро K зависит лишь от разности $x-y$, это сразу следует из (11)). Хорошо известно, что тогда оператор T действует из $L^r(E,w)$ в $L^r(F,w)$ при любом $r>1$ и любом $w\in A_r$ (см., например, [3]). Покажем, что для него выполнено условие $(S_{N,w})$ с любым достаточно большим N. Действительно, пусть $\xi\in F$, тогда

$$
\begin{aligned}
&\biggl(\int\limits_{I_s} \|(K(x,y)-p_I(x,y))\xi\|_F^r\, w(x)dx\biggr)^{1/r} \\
&\leqslant c_n\|\xi\| \ \biggl(\int\limits_{I_s} \frac{|I|^{nr}}{|x-y_0|^{(n+1)r}} w(x)dx\biggr)^{1/r} \\
&\leqslant Cc_n\|\xi\|_E \frac{|I|^n D^{s/r} w(I)^{1/r}}{|I|^{n+1}2^{s(n+1)}} = C'\|\xi\|_E \frac{w(I)^{1/r}}{|I|}\Bigl(\frac{D^{1/r}}{2^{n+1}}\Bigr)^s.
\end{aligned}
$$

Если n велико, то $\frac{D^{1/r}}{2^{n+1}} \leqslant D^{-B}$, где B – наперед заданное положительное число.

Это замечание позволяет доказать утверждение б) леммы 4. Мы проделаем вычисления для оператора λ, определенного в этом утверждении на скалярных функциях, предоставив читателю убедиться самостоятельно, что вычисления для оператора Λ практически те же.

Ясно, что оператор λ, $\lambda f = \{f * \eta_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$, ограниченно действует из L^2 в $L^2(l^2)$ (достаточно перейти к преобразованиям Фурье; см. (9)). Его ядро $K(\cdot,\cdot)$ задается формулой

$$K(x,y) = \{\eta_k(x-y)\}_{k\in\mathbb{Z}}$$

(значения ядра суть операторы из $\mathbb{C}$ в l^2, т.е. просто последовательности из l^2). Для полноты мы проверим (хорошо известное) неравенство (11) для этого ядра; некоторые промежуточные оценки будут позже использованы при доказательстве пункта а) леммы 4. Пусть I – отрезок, y_0 – его центр, $y \in I$, $x \notin 2I$. Обозначим через $P_{u,k}(t)$ n-й полином Тейлора для η_k с центром в точке u и положим $p_k(x,y) = P_{x-y_0,k}(x-y)$. Тогда

$$\begin{aligned}|\eta_k(x-y) - p_k(x,y)| &= \frac{1}{(n+1)!}|y-y_0|^{n+1}|\eta_k^{(n+1)}(\theta)| \\ &= \frac{1}{(n+1)!}|y-y_0|^{n+1}A^{k(n+2)}\eta_0^{(n+1)}(A^k\theta)\end{aligned}$$

для некоторой точки θ между $x-y_0$ и $x-y$. Поскольку $\eta_0^{(n+1)}$ убывает быстрее любой степени, а $|x-y_0| \geqslant 2|y-y_0|$, отсюда следует, что

$$|\eta_k(x-y) - p_k(x,y)| \leqslant c_{n,l}A^{k(n+2)}|y-y_0|^{n+1}\left(1 + A^k|x-y_0|\right)^{-l}, \qquad l = 1,2,\dots.$$

Полагая $l=0$ и $l=n+3$, получаем две оценки:

$$|\eta_k(x-y) - p_k(x,y)| \leqslant C_n A^{k(n+2)}|I|^{n+1}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}|\eta_k(x-y) - p_k(x,y)| &\leqslant C_n A^{k(n+2)}A^{-k(n+3)}\frac{|y-y_0|^{n+1}}{|x-y_0|^{n+3}} \\ &\leqslant C_n A^{-k}\frac{|I|^{n+1}}{|x-y_0|^{n+3}}.\end{aligned} \tag{13}$$

Оценка (13) лучше оценки (12) в точности тогда, когда $A^k \geqslant \frac{1}{|x-y_0|}$, поэтому

$$\Big(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\eta_k(x-y) - p_k(x,y)|^2\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant C|I|^{n+1}\Big(\sum_{k: A^k\leqslant|x-y_0|^{-1}} A^{2(n+2)k} + \sum_{k: A^k>|x-y_0|^{-1}} A^{-2k}|x-y_0|^{-2(n+3)}\Big)^{1/2}$$
$$\leqslant C'|I|^{n+1}|x-y_0|^{-(n+2)},$$

а это и есть (11). Тем самым, доказано утверждение б) леммы 4, а с ним – и лемма 3.

Замечание 3. Опишем более сложный случай применимости леммы 5 (ср. с [1, 5]). Он понадобится для доказательства утверждения а) леммы 4 (и, стало быть, леммы 2). Пусть оператор T удовлетворяет условиям, сформулированным перед этой леммой, с $w \equiv 1$, $D = 2$ и $r = 2$ (в частности, он ограничен в невесовой L^2-метрике). Предположим, что условие $(S_{N,\mathbf{1}})$ выполнено при любом $N = 0, 1, \dots$:

$$\Big(\int\limits_{I_s} \|(K(x,y)-p_I(x,y))\xi\|_F^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant C_N\|\xi\|_E|I|^{-1/2}2^{-B_N s}, \qquad (10')$$

причем $B_N \to \infty$ при $N \to \infty$ (и, разумеется, $B_N > 1/2$ – как в (10)). *Если $w \in \alpha_r$ при некотором $r \in (1,2)$, то оператор T действует из $L^r(E,w)$ в $L^r(F,w)$ и при всех достаточно больших N удовлетворяет условию $(S_{N,w})$, причем постоянная B в* (10) *растет неограниченно с ростом N.*

Убедимся в том, что это действительно так. Поскольку условие $(10')$ выполнено при $N = 0$ с $B_0 > 1/2$, а сопряженный оператор T^* ограничен в L^2-метрике, выполняется поточечное неравенство

$$(T^*f)^{\#} \leqslant CM_2f, \quad f \in L^\infty(F). \qquad (14)$$

Здесь $M_2f(x) = \Big(\sup\limits_{x\in I}\frac{1}{|I|}\int\limits_I \|f(\cdot)\|_F^2\Big)^{1/2}$ – модифицированная функция Харди–Литлвуда, а через $g^{\#}$ обозначена максимальная функция Феффермана–Стейна:

$$g^{\#}(x) = \sup_{x\in I}\frac{1}{|I|}\int\limits_I \|g(\cdot)-g_I\|_F, \quad g_I = \frac{1}{|I|}\int\limits_I g.$$

См. лемму 4.1 в [1], где доказано несколько более грубое утверждение, однако *практически то же самое* вычисление дает и оценку (14). Отсюда стандартным образом (см., например, [1, §6]) следует, что оператор T^* действует из $L^q(F,a)$ в $L^q(E,a)$, если $q>2$ и $a\in A_{q/2}$. Таким образом, T действует из $L^r(E,w)$ в $L^r(F,w)$, если $1<r<2$ и $w\in\alpha_r$.

Выведем теперь оценку (10) из (10$'$). Пусть $p_I(\cdot,\cdot)$ – те же функции, что фигурируют в (10$'$). Применим к левой части формулы (10) неравенство Гёльдера с показателями $2/r$ и $(2/r)'=2/(2-r)$:

$$\begin{aligned}&\Bigl(\int\limits_{I_s}\|(K(x,y)-p_I(x,y))\xi\|_F^r\,w(x)dx\Bigr)^{1/r} \qquad (15)\\ &\leqslant\Bigl(\int\limits_{I_s}\|(K(x,y)-p_I(x,y))\xi\|_F^2\;dx\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int\limits_{I_s}w(x)^{2/(2-r)}dx\Bigr)^{(2-r)/2r}\end{aligned}$$

Применив условие удвоения к весу $w^{2/(2-r)}$ (в п. 2 отмечалось, что этот вес удовлетворяет условию $A_{p/(2-p)}$), а затем условие α_r, получим:

$$\begin{aligned}\Bigl(\int\limits_{I_s}w^{2/(2-r)}\Bigr)^{\frac{2-r}{2}}&\leqslant D^{(s+1)\frac{2-r}{2}}\Bigl(\int\limits_{I}w^{2/(2-r)}\Bigr)^{\frac{2-r}{2}}\\ &\leqslant CD^{s\frac{2-r}{2}}|I|^{\frac{2-r}{2}}\Bigl(\frac{1}{|I|}\int\limits_{I}w^{-1/(r-1)}\Bigr)^{1-r}.\end{aligned}$$

Далее, из неравенства Гёльдера с показателями r' и r получаем

$$1=\frac{1}{|I|}\int\limits_{I}w^{-1/r}w^{1/r}\leqslant\Bigl(\frac{1}{|I|}\int\limits_{I}w^{-1/(r-1)}\Bigr)^{(r-1)/r}\Bigl(\frac{1}{|I|}\int\limits_{I}w\Bigr)^{1/r},$$

откуда вытекает оценка последнего множителя в предыдущем неравенстве:

$$\Bigl(\frac{1}{|I|}\int\limits_{I}w^{-1/(r-1)}\Bigr)^{1-r}\leqslant\frac{1}{|I|}\int\limits_{I}w.$$

Собирая все вместе и оценивая первый множитель справа в (15) с помощью неравенства (10′), приходим к оценке

$$\begin{aligned}
&\Bigl(\int\limits_{I_s} \|(K(x,y)-p_I(x,y))\xi\|_F^r \, w(x)dx\Bigr)^{1/r} \\
&\leqslant C'\|\xi\|_F |I|^{-1/2} 2^{-B_N s}\Bigl[D^{s\frac{2-r}{2}}|I|^{\frac{2-r}{2}}|I|^{-1}w(I)\Bigr]^{1/r} \\
&= C'\|\xi\|_E \frac{w(I)^{1/r}}{|I|}\Bigl(\frac{D^{(2-r)/2s}}{2^{B_N}}\Bigr)^s .
\end{aligned}$$

При достаточно большом N дробь в круглых скобках станет меньше D^{-B} для любого наперед заданного B, и все доказано.

В силу замечания 3, нам осталось проверить, что оператор σ из п. а) леммы 4 ограниченно действует из $L^2(l^2)$ в L^2 (без веса) и обладает ядром, удовлетворяющим условию (10′). Ограниченность в L^2-метрике получается переходом к преобразованиям Фурье (см. условие (8)). Оценка, аналогичная (10′), но для случая окружности вместо прямой, была доказана в [5, с. 110–112]. Для полноты мы приведем вычисления в случае прямой (тем более, что в [5] соответствующее место было изложено не самым экономным образом).

Ядром оператора σ является l^2-значная функция

$$K(x,y) = \bigl\{e^{ia_j x}\eta_k(x-y)\bigr\}_{j\in A_k, k\in\mathbb{Z}},$$

где функции η_k подчинены условию (8). Пусть I – отрезок, y_0 – его центр. Введем полиномы (по y) $p_k(x,y)$ так же, как и при доказательстве п. б) леммы 4 – через полиномы Тейлора для η_k. Оценки (12) и (13) будут выполнены с $A = 2$. Определим l^2-значный полином (по y) $P_I(x,y)$ формулой

$$P_I(x,y) = \bigl\{e^{ia_j x}p_k(x,y)\bigr\}_{j\in A_k, k\in\mathbb{Z}}.$$

Чтобы доказать неравенство (10′) с этим полиномом P_I, достаточно должным образом оценить величину

$$\beta_s = \Bigl(\int\limits_{I_s}\Bigl(\sum_k |\eta_k(x-y)-p_k(x,y)|\Bigl|\sum_{j\in A_k}\xi_j e^{ia_j x}\Bigr|\Bigr)^2 dx\Bigr)^{1/2},$$

где $y \in I$, а $\xi = \{\xi_j\}_{j \in A_k}$ – вектор из l^2; мы будем считать, что $\|\xi\| = 1$. Из неравенства треугольника в L^2 видно, что

$$\beta_s \leqslant \sum_k \gamma_{k,s} \biggl(\int\limits_{I_s} \Bigl| \sum_{j \in A_k} \xi_j e^{i a_j x} \Bigr|^2 dx \biggr)^{1/2}$$

$$\leqslant \Bigl(\sum_k \gamma_{k,s} \Bigr)^{1/2} \biggl(\sum_k \gamma_{k,s} \int\limits_{I_s} \Bigl| \sum_{j \in A_k} \xi_j e^{i a_j x} \Bigr|^2 dx \biggr)^{1/2}, \tag{16}$$

где $\gamma_{k,s} = \sup\limits_{x \in I_s} \sup\limits_{y \in I} |\eta_k(x-y) - p_k(x,y)|$. Из (12) и (13) с $A = 2$ получаем:

$$\gamma_{k,s} \leqslant C_n 2^{k(n+2)} |I|^{n+1}, \quad \gamma_{k,s} \leqslant C_n 2^{-k} |I|^{-2} 2^{-(n+3)s}. \tag{17}$$

Вторая оценка сильнее первой в точности тогда, когда $2^k \geqslant (|I| 2^s)^{-1}$, поэтому

$$\sum_k \gamma_{k,s} \leqslant C \sum_{k : 2^k < (|I| 2^s)^{-1}} |I|^{n+1} + C \sum_{k : 2^k \geqslant (|I| 2^s)^{-1}} |I|^{-2} 2^{-(n+3)s}$$

$$\leqslant C' \frac{2^{-(n+2)s}}{|I|}.$$

Следовательно, достаточно проверить, что второй множитель справа в (16) ограничен сверху постоянной, не зависящей от s и чисел a_j.

Заметим, что если $j,\ j' \in A_k$, то $|a_j - a_{j'}| \geqslant 2^k$ (см. рассуждения перед леммой 2). По теореме о тригонометрических рядах с малыми лакунами (см. [9, гл. V, теорема 9.9]; подчеркнем, что в той теореме “частоты” в показателях экспонент не обязаны быть целыми числами) справедлива оценка

$$\int\limits_{2^s |I|} \Bigl| \sum_{j \in A_k} \xi_j e^{i a_j x} \Bigr|^2 dx \leqslant \begin{cases} C 2^s |I| \sum\limits_{j \in A_k} |\xi_j|^2, & \text{если} \quad 2^s |I| \geqslant 2^{-k}; \\ C 2^{-k} \sum\limits_{j \in A_k} |\xi_j|^2, & \text{если} \quad 2^s |I| < 2^{-k}. \end{cases}$$

Поскольку $\sum_k \sum\limits_{j \in A_k} |\xi_j|^2 = 1$, отсюда следует, что

$$\sum_k \gamma_{k,s} \int\limits_{I_s} \Bigl| \sum_{j \in A_k} \xi_j e^{i a_j x} \Bigr|^2 dx$$

$$\leqslant \sup \bigl\{ \gamma_{k,s} 2^{-k} : 2^k < (2^s |I|)^{-1} \bigr\} + \sup \bigl\{ \gamma_{k,s} 2^s |I| : 2^k \geqslant (2^s |I|)^{-1} \bigr\}.$$

Но в силу первой оценки в (17) при $2^k < (s^s|I|)^{-1}$ имеем

$$\gamma_{k,s}2^{-k} \leqslant C(2^k|I|)^{n+1} \leqslant C2^{-s(n+1)} \leqslant C$$

(напомним, что $s, n \geqslant 1$), а при $2^k \geqslant (2^s|I|)^{-1}$ вторая оценка в (17) дает

$$\gamma_{k,s}2^s|I| \leqslant C2^{-k}2^{-(n+2)s} \leqslant C2^s|I|\,|I|^{-1}2^{-(n+2)s} \leqslant C2^{-s(n+1)} \leqslant C.$$

Тем самым, доказаны утверждение а) леммы 4 и лемма 2. Доказательство теоремы 1 завершено.

Литература

1. J. L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitrary intervals.* — Rev. Mat. Iberoamer. **1** (1985), 1–13.
2. R. R. Coifman. C. Fefferman, *Weighted norm inequalities for maximal functions and singular integrals.* — Studia Math. **51** (1974), 241–250.
3. J. Garcia-Cuerva, J. L. Rubio de Francia, *Weighted norm inequalities and related topics.* North-Holland (1985).
4. J. Bourgain, *On square functions on the trigonometric system.* — Bull. Soc. Math. Belg. **37**, No. 1 (1985), 20–26.
5. С. В. Кисляков, Д. В. Парилов, *О теореме Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **327** (2005), 98–113.
6. J. Garcia-Cuerva, *Weighted H^p-spaces.* — Dissertationes Mathematicae (Rozprawy Matematyczne) **162** (1979).
7. J.-O. Strömberg, A. Torchinsky, *Weighted Hardy spaces.* Lect. Notes Math. **1381**, Springer-Verlag, Berlin etc. (1980).
8. S. V. Kislyakov, *Interpolation of H^p-spaces: some recent developments.* — Isr. Math. Conf. Proceedings **13** (1999), 102–140.
9. А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды.* Т. 1, Мир, Москва (1965).

Kislyakov S. V. Littlewood–Paley theorem for arbitrary intervals: weighted estimates.

Suppose $1 < r < 2$ and b is a weight on $\mathbb{R}$ such that $b^{-\frac{1}{r-1}}$ satisfies the Muckenhoupt condition $A_{r'/2}$ (r' is the exponent conjugate to r). If f_j are functions whose Fourier transforms are supported on mutually disjoint intervals, then

$$\Big\|\sum\nolimits_j f_j\Big\|_{L^p(\mathbb{R},b)} \leqslant C\Big\|\Big(\sum\nolimits_j |f_j|^2\Big)^{1/2}\Big\|_{L^p(\mathbb{R},b)}$$

for $0 < p \leqslant r$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: skis@pdmi.ras.ru

Поступило 12 марта 2008 г.