Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 355, 2008 г.

Е. С. Дубцов

РАДИАЛЬНЫЕ ПРЕДЕЛЫ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ДАРБУ

1. Введение

1.1. Гармоническое малое пространство Блоха. Пусть $\mathbb{R}^{d+1}_+ = \{(x,y) : \ x \in \mathbb{R}^d, \ y > 0\}$. Классическое малое пространство Блоха $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ состоит из гармонических функций $u : \mathbb{R}^{d+1}_+ \to \mathbb{R}$ таких, что

$$\lim_{t \to 0+} \sup_{0<y\leqslant t} y|\nabla u(x,y)| = 0.$$

Пусть $\dim_{\mathcal{H}}$ обозначает размерность по Хаусдорфу. Отправной точкой для настоящей работы является следующий результат.

Теорема 1.1. ([4], теорема 2.5). *Рассмотрим положительную функцию $u \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ и куб $Q \subset \mathbb{R}^d$. Предположим, что*

$$\lim_{y \to 0+} u(\xi, y) = 0 \quad \text{для почти всех } \xi \in Q,$$

а также

$$\lim_{y \to 0+} u(\xi', y) = +\infty \quad \text{для некоторой точки } \xi' \in Q.$$

Тогда для каждого числа $a \in (0,+\infty)$ имеет место равенство $\dim_{\mathcal{H}} E_u(a) = d$, где

$$E_u(a) = \{x \in Q : \lim_{y \to 0+} u(x,y) = a\}.$$

1.2. Решения уравнения Дарбу. В данной работе будут получены глобальные аналоги теоремы 1.1 для положительных решений уравнения Дарбу

$$\Delta_\alpha u = \Delta u - \frac{(\alpha - 1)}{y}\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \alpha > 0,$$

Работа поддержана грантом РФФИ No. 08-01-00358-а и Фондом содействия отечественной науке.

в полупространстве $\mathbb{R}^{d+1}_+$.

Введем малое пространство Блоха $\mathcal{B}^\alpha_0(\mathbb{R}^{d+1}_+)$, отвечающее уравнению Дарбу. Оно состоит из функций $u : \mathbb{R}^{d+1}_+ \to \mathbb{R}$ таких, что $\Delta_\alpha u = 0$ в $\mathbb{R}^{d+1}_+$ и

$$\lim_{t\to 0+} \sup_{0<y\leqslant t} y|\nabla u(x,y)| = 0.$$

В частности, $\mathcal{B}^1_0(\mathbb{R}^{d+1}_+) = \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^{d+1}_+)$.

Теорема 1.2. *Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим положительную функцию $u \in \mathcal{B}^\alpha_0(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ такую, что $u \not\equiv 0$ и*

$$\lim_{y\to 0+} u(\xi,y) = 0 \quad \text{для почти всех } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Предположим, что $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$. Тогда $\dim_{\mathcal{H}} E_u(a,b) = d$, где

$$E_u(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^d : \liminf_{y\to 0+} u(x,y) = a,\ \limsup_{y\to 0+} u(x,y) = b\}.$$

Далее, определим малое логарифмическое множество Блоха $\mathcal{B}^{\alpha,\log}_0(\mathbb{R}^{d+1}_+)$, которое состоит из функций $u : \mathbb{R}^{d+1}_+ \to (0,+\infty)$ таких, что $\Delta_\alpha u = 0$ в $\mathbb{R}^{d+1}_+$ и

$$\lim_{t\to 0+} \sup_{0<y\leqslant t} y|\nabla \log u(x,y)| = 0.$$

Теорема 1.3. *Пусть $\alpha > 0$. Предположим, что $u \in \mathcal{B}^{\alpha,\log}_0(\mathbb{R}^{d+1}_+)$ и*

$$\lim_{y\to 0+} u(\xi,y) = 0 \quad \text{для почти всех } \xi \in \mathbb{R}^d.$$

Пусть $0 < a \leqslant b < +\infty$. Тогда $\dim_{\mathcal{H}} E_u(a,b) = d$, где

$$E_u(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^d : \liminf_{y\to 0+} u(x,y) = a,\ \limsup_{y\to 0+} u(x,y) = b\}.$$

Отметим, что при $a = b$ и $\alpha = 1$ теорема 1.3 получена в [4].

2. Вспомогательные результаты

2.1. Обозначения. Кубом Q с длиной ребра $\ell = \ell(Q)$ будем называть произведение

$$\prod_{j=1}^{d} [\ell_j, L_j) \subset \mathbb{R}^d \quad \text{такое, что}$$

$\ell = L_j - \ell_j$, $1 \leqslant j \leqslant d$. Объем куба Q обозначается символом $|Q|$.

Напомним, что нижняя и верхняя производные меры μ в точке $x \in \mathbb{R}^d$ задаются равенствами

$$\underline{\mathcal{D}}\mu(x) = \liminf_{x \in Q,\, |Q| \to 0} \frac{\mu(Q)}{|Q|},$$
$$\overline{\mathcal{D}}\mu(x) = \limsup_{x \in Q,\, |Q| \to 0} \frac{\mu(Q)}{|Q|},$$

где Q обозначает куб. Если $\underline{\mathcal{D}}\mu(x) = \overline{\mathcal{D}}\mu(x)$, то соответствующее общее значение обозначают через $\mathcal{D}\mu(x)$ и называют производной в точке x. При $a \leqslant b$ положим

$$E_\mu(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^d : \ \underline{\mathcal{D}}\mu(x) = a \text{ и } \overline{\mathcal{D}}\mu(x) = b\}.$$

2.2. Производные гладких мер. Локально конечная положительная мера μ на $\mathbb{R}^d$ называется гладкой, если

$$\lim_{|Q^-| \to 0} \frac{\mu(Q^-) - \mu(Q^+)}{|Q^-|} = 0,$$

где предел вычисляется относительно всех соседних кубов Q^- и Q^+. По определению кубы $Q^-, Q^+ \subset \mathbb{R}^d$ называются соседними, если $|Q^-| = |Q^+|$, $L_j^- = \ell_j^+$ для ровно одного индекса j и $\ell_k^- = \ell_k^+$ при $k \neq j$. Гладкие меры также называют малыми мерами Зигмунда.

Теорема 2.1. (Донайре [1]) *Рассмотрим сингулярную гладкую меру μ на $\mathbb{R}^d$. Пусть $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$. Тогда* $\dim_{\mathcal{H}} E_\mu(a,b) = d$.

2.3. Производные симметричных мер. Локально конечная положительная мера μ на $\mathbb{R}^d$ называется симметричной, если

$$\lim_{|Q^-| \to 0} \frac{\mu(Q^-)}{\mu(Q^+)} = 1,$$

где предел вычисляется относительно всех соседних кубов Q^- и Q^+.

Теорема 2.2. ([3]) *Рассмотрим сингулярную симметричную меру* μ *на* $\mathbb{R}^d$. *Пусть* $0 < a \leqslant b < +\infty$. *Тогда* $\dim_{\mathcal{H}} E_\mu(a,b) = d$.

2.4. Формула Грина. Напомним одну формулу Грина, соответствующую оператору $\mathcal{L} = y^{1-\alpha}\Delta_\alpha$. Пусть $\overline{D} \subset \mathbb{R}^{d+1}_+$ и D является ограниченным открытым множеством с кусочно-гладкой границей. Если $f, g \in C^2(D) \cap C^1(\overline{D})$, то имеет место следующее равенство:

$$\int\limits_D (f\mathcal{L}g - g\mathcal{L}f)\, dx\, dy = \int\limits_{\partial D} y^{1-\alpha} \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n} \right) d\sigma,$$

где $\partial/\partial n$ – производная вдоль внешней нормали, а $d\sigma$ — мера Лебега на ∂D.

3. Доказательство теоремы 1.2

Схема изложенного ниже рассуждения хорошо известна в случае гармонических функций (ср. с [6]). Зафиксируем $\ell > 0$ и рассмотрим соседние кубы $Q^\pm \subset \mathbb{R}^d$ с длиной ребра ℓ. Пусть $0 < \varepsilon < \ell$. Применяя формулу Грина к функциям y^α и u на множествах $Q^\pm \times (\varepsilon, \ell)$, получаем

$$\begin{aligned} \alpha \left| \int\limits_{Q^\pm} u(x,\varepsilon)dx - \int\limits_{Q^\pm} u(x,\ell)dx \right| \leqslant \left| \int\limits_{\partial Q^\pm \times [\varepsilon,\ell]} y\, \frac{\partial u}{\partial n}(x,y)\, d\sigma(x,y) \right| \\ + \left| \int\limits_{Q^\pm} \ell \frac{\partial u}{\partial n}(x,\ell)dx \right| + \left| \int\limits_{Q^\pm} \varepsilon \frac{\partial u}{\partial n}(x,\varepsilon)dx \right|. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Положим $\omega(t) = \sup_{0<y\leqslant t} y|\nabla u(x,y)|$. Так как функция $\omega(t)$ убывает, то оценка (3.1) гарантирует, что

$$\left| \int\limits_{Q^\pm} u(x,\varepsilon)\, dx - \int\limits_{Q^\pm} u(x,\ell)\, dx \right| \leqslant C(d,\alpha)\omega(\ell)|Q^\pm|. \tag{3.2}$$

По определению величины $\omega(\ell)$ имеем

$$\left| \int\limits_{Q^-} u(x,\ell)\, dx - \int\limits_{Q^+} u(x,\ell)\, dx \right| \leqslant \omega(\ell)|Q^\pm|.$$

Таким образом,

$$\left| \int_{Q^-} u(x,\varepsilon)\,dx - \int_{Q^+} u(x,\varepsilon)\,dx \right| \leqslant C(d,\alpha)\omega(\ell)|Q^{\pm}|. \tag{3.3}$$

Далее, так как функция u положительна и $\Delta_\alpha u = 0$, то по теореме Герглотца (см., например, [5])

$$u(x,y) = Cy^\alpha + P_\alpha[\mu],$$

где $C \geqslant 0$, а μ — положительная мера такая, что

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{d\mu(x)}{(1+|x|)^{x+\alpha}} < \infty.$$

Здесь $P_\alpha[\mu]$ обозначает α-интеграл Пуассона меры μ

$$\gamma_\alpha \int_{\mathbb{R}^d} \frac{y^\alpha}{(|x-t|^2+y^\alpha)^{\frac{d+\alpha}{2}}}\,d\mu(t),$$

где γ_α — положительная нормировочная константа.

Прежде всего, покажем, что $\mu(\partial Q) = 0$ для любого куба $Q \subset \mathbb{R}^d$. Если $d = 1$, то рассуждение проще, поэтому будем считать, что $d \geqslant 2$. Предположим обратное. Тогда найдутся $x' \in \mathbb{R}$ и куб $Q' \subset \mathbb{R}^{d-1}$ такие, что $\mu(x' \times \mathring{Q}') = 2\beta > 0$, где $\mathring{Q}'$ — внутренность куба Q'. Рассмотрим соседние параллелепипеды $P^- = [x'-\ell_1, x'+\ell_1) \times Q'$ и $P^+ = [x'+\ell_1, x'+3\ell_1) \times Q'$, $\ell_1 > 0$. Разбивая параллелепипеды на кубы со стороной $2\ell_1$, с помощью (3.3) получаем оценку

$$\left| \int_{P_1^-} u(x,\varepsilon)\,dx - \int_{P_1^+} u(x,\varepsilon)\,dx \right| \leqslant C(d,\alpha)\omega(2\ell_1)\ell_1|Q'|.$$

Таким образом,

$$\int_{P_1^+} u(x,\varepsilon)\,dx \geqslant \int_{P_1^-} u(x,\varepsilon)\,dx - C(d,\alpha,\omega)\ell_1|Q'|.$$

Напомним, что меры $u(x,\varepsilon)\,dx$ *-слабо сходятся к мере $d\mu(x)$ при $\varepsilon \to 0+$. Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \int\limits_{P_1^-} u(x,\varepsilon)\,dx \geqslant \mu(x' \times \mathring{Q}') = 2\beta > 0.$$

Поэтому

$$\int\limits_{P_1^+} u(x,\varepsilon)\,dx > \beta$$

при малых ε и ℓ_1. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+$, имеем $\mu(\overline{P_1^+}) \geqslant \beta$. Полагая $\ell_2 = \ell_1/4$ и повторяя изложенные выше рассуждения, получаем $\mu(\overline{P_2^+}) \geqslant \beta$, где $P_2^+ = [x'+\ell_2, x'+3\ell_2) \times Q'$. Таким образом, существует последовательность попарно дизъюнктных замкнутых параллелепипедов $\{\overline{P_j^+}\}$ таких, что $\mu(\overline{P_j^+}) \geqslant \beta$ и $\overline{P_j^+} \subset [x', x'+3\ell_1] \times \overline{Q'}$. Следовательно, $\mu([x', x'+3\ell_1] \times \overline{Q'}) = +\infty$, противоречие.

Итак, $\mu(\partial Q^\pm) = 0$. Устремляя ε к нулю в оценке (3.3), получаем $|\mu(Q^+) - \mu(Q^-)| \leqslant C\omega(\ell)|Q^\pm|$. По предположению $\omega(\ell) \to 0$ при $\ell \to 0$, таким образом, мера μ является гладкой.

Зафиксируем точку $x_0 \in \mathbb{R}^d$ и предположим, что $x_0 \in Q$, где Q — куб с длиной ребра ℓ. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0+$ в оценке (3.2), имеем

$$\left| \mu(Q) - \int\limits_Q u(x,\ell)\,dx \right| \leqslant C(d,\alpha)\omega(\ell)|Q|.$$

С другой стороны,

$$\left| \int\limits_Q u(x,\ell)\,dx - |Q|u(x_0,\ell) \right| \leqslant C(d)\omega(\ell)|Q|.$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\mu(Q)}{|Q|} - u(x_0,\ell) \right| \leqslant C(d,\alpha)\omega(\ell).$$

Таким образом, используя обозначения из теоремы 2.1, имеем $E_\mu(a,b) = E_u(a,b)$. Далее, если $u(x_0,\ell) \to 0$ при $\ell \to 0$, то $\mathcal{D}\mu(x_0) = 0$. Поэтому $\mathcal{D}\mu(x) = 0$ при почти всех $x \in \mathbb{R}^d$. Следовательно, μ является гладкой сингулярной мерой и теорема 2.1 гарантирует, что $\dim_{\mathcal{H}} E_u(a,b) = \dim_{\mathcal{H}} E_\mu(a,b) = d$. Доказательство теоремы 1.2 завершено.

4. Доказательство теоремы 1.3

Так как u – положительное решение уравнения Дарбу, то меры $u(x,y)\,dx$ *-слабо сходятся к некоторой положительной борелевской мере μ в $\mathbb{R}^d$:

$$\lim_{y\to 0+}\int\limits_{\mathbb{R}^d} u(x,y)\varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d}\varphi(x)\,d\mu(x)$$

для любой функции $\varphi\in C(\mathbb{R}^d)$ с компактным носителем. Покажем, что мера μ является симметричной. Соответствующие рассуждения для гармонических функций изложены в [2].

Итак, положим $\omega(t) = \sup\limits_{0<y\leqslant t} y|\nabla\log u(x,y)|$. По условию $\omega(t)\to 0$ при $t\to 0+$. При проверке симметричности меры μ можно считать, что $\ell=\ell(Q^\pm)$ достаточно мало. В частности, будем предполагать, что $\omega(\ell)\leqslant 1/2$. Пусть $0<\varepsilon<\ell$. Выпишем оценку (3.1):

$$\alpha\left|\int\limits_{Q^\pm} u(x,\varepsilon)dx - \int\limits_{Q^\pm} u(x,\ell)dx\right| \leqslant \left|\int\limits_{\partial Q^\pm\times[\varepsilon,\ell]} y\,\frac{\partial u}{\partial n}(x,y)\,d\sigma(x,y)\right| + \left|\int\limits_{Q^\pm}\ell\frac{\partial u}{\partial n}(x,\ell)dx\right| + \left|\int\limits_{Q^\pm}\varepsilon\frac{\partial u}{\partial n}(x,\varepsilon)dx\right|.$$

Если $x\in\partial Q^\pm$ и $0<y<\ell$, то

$$|\log u(x,y)-\log u(x,\ell)|\leqslant\int\limits_y^\ell\frac{|\nabla u(x,t)|}{u(x,t)}\,dt\leqslant\omega(\ell)\log\frac{\ell}{y}.$$

Иными словами,

$$u(x,y)\leqslant u(x,\ell)\left(\frac{\ell}{y}\right)^{\omega(\ell)}\leqslant u(x,\ell)\left(\frac{\ell}{y}\right)^{\frac12}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\int\limits_\varepsilon^\ell y|\nabla u(x,y)|\,dy &\leqslant \int\limits_\varepsilon^\ell\omega(y)u(x,y)\,dy\leqslant\omega(\ell)\int\limits_\varepsilon^\ell u(x,\ell)\left(\frac{\ell}{y}\right)^{\frac12}\,dy\\ &\leqslant 2\omega(\ell)\ell u(x,\ell).\end{aligned}\tag{4.1}$$

Положим $x_0 = (x^- + x^+)/2$, где x^- и x^+ — центры кубов Q^- и Q^+. Тогда

$$|\log u(x,\ell) - \log u(x_0,\ell)| \leqslant |x - x_0|\omega(\ell)/\ell \leqslant C\omega(\ell).$$

Следовательно, с помощью (4.1) имеем

$$\int\limits_{\varepsilon}^{\ell} y|\nabla u(x,y)| \leqslant C\omega(\ell)\ell u(x_0,\ell)$$

и

$$\left| \int\limits_{\partial Q^{\pm}\times[0,\ell]} y\frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\,d\sigma(x,y)\right| \leqslant C\omega(\ell)|Q^{\pm}|u(x_0,\ell).$$

Также имеем

$$\int\limits_{Q^{\pm}} \ell\left|\frac{\partial u}{\partial y}(x,\ell)\right|\,dx \leqslant C\omega(\ell)\int\limits_{Q^{\pm}} u(x_0,\ell)\,dx = C\omega(\ell)|Q^{\pm}|u(x_0,\ell)$$

и

$$\left|\int\limits_{Q^{\pm}} \varepsilon\frac{\partial u}{\partial y}(x,\varepsilon)\,dx\right| \leqslant C\omega(\varepsilon)\int\limits_{Q^{\pm}} u(x,\varepsilon)\,dx \to 0$$

при $\varepsilon \to 0$. Подобно гладкому случаю, проверяется, что $\mu(\partial Q) = 0$ для любого куба $Q \subset \mathbb{R}^d$. Таким образом, переходя к пределу в оценке (3.1) при $\varepsilon \to 0$, получаем

$$\left|\mu(Q^{\pm}) - \int\limits_{Q^{\pm}} u(x,\ell)\,dx\right| \leqslant C\omega(\ell)|Q^{\pm}|u(x_0,\ell). \tag{4.2}$$

Следовательно,

$$|Q^{\pm}|u(x_0,\ell) \leqslant C\int\limits_{Q^{\pm}} u(x,\ell)\,dx \leqslant C\mu(Q^{\pm}) + C\omega(\ell)|Q^{\pm}|u(x_0,\ell).$$

Так как $\omega(\ell)$ можно считать достаточно малым, то имеем

$$|Q^{\pm}|u(x_0,\ell) \leqslant C\min\{\mu(Q^-),\mu(Q^+)\}. \tag{4.3}$$

Далее, если $x_1, x_2 \in Q^+ \cup Q^-$, то $\log u(x_1,\ell) - \log u(x_2,\ell) \leqslant C\omega(\ell) \leqslant 1/2$ (последнее неравенство имеет место для достаточно малых $\ell > 0$). Поэтому

$$\begin{aligned} u(x_1,\ell) - u(x_2,\ell) &\leqslant (\exp(C\omega(\ell)) - 1)u(x_2,\ell) \leqslant C\omega(\ell)u(x_2,\ell) \\ &\leqslant C\omega(\ell)u(x_0,\ell). \end{aligned}$$

Из симметрии имеем $|u(x_1,\ell) - u(x_2,\ell)| \leqslant C\omega(\ell)u(x_0,\ell)$. Следовательно,

$$\left| \int\limits_{Q^-} u(x,\ell)\,dx - \int\limits_{Q^+} u(x,\ell)\,dx \right| \leqslant C\omega(\ell)|Q^{\pm}|u(x_0,\ell) \tag{4.4}$$

Оценки (4.2), (4.3) и (4.4) дают

$$|\mu(Q^-) - \mu(Q^+)| \leqslant C\omega(\ell)\min\{\mu(Q^-),\mu(Q^+)\}.$$

Напомним, что $\omega(\ell) \to 0$ при $\ell \to 0$; иными словами, μ — симметричная мера.

Далее, пусть $\xi \in Q$, где Q обозначает один из кубов Q^- или Q^+. Тогда аналогично (4.4) имеем

$$\left| |Q|u(\xi,\ell) - \int\limits_{Q} u(x,\ell)\,dx \right| \leqslant C\omega(\ell)|Q|u(x_0,\ell) \leqslant C\omega(\ell)\mu(Q)$$

в силу (4.3). Вместе с оценкой (4.2) получаем

$$\left| \frac{\mu(Q)}{|Q|} - u(\xi,\ell) \right| \leqslant C\omega(\ell)\frac{\mu(Q)}{|Q|}.$$

Так как $\omega(\ell) \to 0$ при $\ell \to 0$, то имеет место равенство $E_\mu(a,b) = E_u(a,b)$. По предположению $\lim_{y\to 0+} u(\xi,\ell) = 0$ для почти всех ξ, следовательно, $\mathcal{D}\mu(\xi) = 0$ для почти всех ξ. Таким образом, μ — сингулярная симметричная мера и теорема 2.2 гарантирует, что $\dim_{\mathcal{H}} E_u(a,b) = \dim_{\mathcal{H}} E_\mu(a,b) = d$ для всех $0 < a \leqslant b < +\infty$. Доказательство теоремы 1.3 завершено.

Литература

1. J. J. Donaire, *Conjuntos excepcionales para las classes de Zygmund.* Thesis, Barcelona (1995).
2. E. Doubtsov, A. Nicolau, *Symmetric and Zygmund measures in several variables.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **52**, No. 1 (2002), 153–177.
3. E. Doubtsov, *Differentialtion properties of symmetric measures.* — Potential Anal. **27**, No. 4 (2007), 389–401.
4. Е. С. Дубцов, *Производные регулярных мер.* — Алгебра и анализ **19**, No. 2 (2007), 86–104.
5. П. П. Каргаев, *О положительных решениях уравнения Дарбу* $\Delta u = \frac{(\alpha-1)}{y}\frac{\partial u}{\partial y}$, $\alpha > 0$, *в полупространстве* $y > 0$. — Алгебра и анализ **8**, No. 3 (1996), 125–150.
6. J. G. Llorente, *Boundary values of harmonic Bloch functions in Lipschitz domains: a martingale approach.* — Potential Anal. **9**, No. 3 (1998), 229–260.

Dubtsov E. S. Radial limits of positive solutions to the Darboux equation.

Assume that a positive function u satisfies the Darboux equation

$$\Delta u = \frac{(\alpha - 1)}{y}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \alpha > 0,$$

in the upper half-space $\mathbb{R}^{d+1}_+$. We investigate Bloch type conditions that guarantee the following property: for any $a \in (0, +\infty)$, the set where the radial limit of u is equal to a, is large in the sense of the Hausdorff dimension.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: dubtsov@pdmi.ras.ru

Поступило 25 января 2008 г.