Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 355, 2008 г.

А. Вершинина, С. Гефтер

ОБ АНАЛИТИЧЕСКИХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

1. Введение

В теории обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известна теорема Коши об аналитических решениях дифференциальных уравнений с аналитическими коэффициентами (см., например, [1]). Для класса нормальных дифференциальных уравнений с частными производными подобная теорема была доказана Коши и Ковалевской [2–4]. Кроме того, Ковалевская [5] показала, что задача Коши для уравнения, которое не является нормальным, может не иметь аналитических решений. Рассмотрим знаменитый пример Ковалевской:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = \dfrac{b}{1-x} \end{cases} \tag{1}$$

(для дальнейшего нам удобно рассматривать в начальном условии произвольный коэффициент b).

Нетрудно проверить, что следующий степенной ряд

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!n!} a^{2n} b t^n x^m \tag{2}$$

является единственным *формальным* решением задачи (1). Поэтому при $a \neq 0$ и $b \neq 0$ задача Коши (1) не имеет решений, аналитических в окрестности нуля. Исследования, начатые Ковалевской, были продолжены в многочисленных работах (см., например, [6–18]).

В настоящей работе мы рассматриваем следующий *операторный аналог* задачи Коши (1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = \dfrac{b}{1-x} \end{cases} \tag{3}$$

и более общую задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = g(x). \end{cases} \tag{4}$$

Здесь A – ограниченный линейный оператор в банаховом пространстве E, $b \in E$ и g – вектор-функция, аналитическая в окрестности нуля. Ввиду формальной аналогии с уравнением (1), уравнение (4) мы также будем называть "уравнением теплопроводности". Отметим, что в некоторых интересных примерах наше "уравнение теплопроводности" превращается в гиперболическое дифференциальное уравнение с частными производными (см. замечание 3.7). Мы рассматриваем решения задачи Коши (4), которые аналитичны в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Под решением задачи (4) мы понимаем *локально* аналитическое решение, т.е. вектор-функцию вещественных переменных t и x, которая аналитична в некоторой окрестности нуля, удовлетворяет в этой окрестности уравнению и удовлетворяет начальному условию в некоторой окрестности точки $0 \in \mathbb{R}$. *Формальное* решение задачи Коши (3) имеет такой же вид, как и в скалярном случае:

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!n!} A^{2n} b t^n x^m. \tag{5}$$

Очевидно, что при $A = 0$ функция $u(t,x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b x^n = \frac{b}{1-x}$ является аналитическим решением задачи (3). Кроме того, аналитическое решение задачи (3) существует, если A – *нильпотентный* оператор, т.е. $A^k = 0$ для некоторого k. Мы будем рассматривать более общие операторы, близкие к нулю в спектральном смысле, а именно, *квазинильпотентные* операторы. Напомним, что оператор A называется квазинильпотентным, если его спектр $\sigma(A)$ состоит только из одной точки $\lambda = 0$. Оказывается, что ряд (5) может сходиться в окрестности нуля, если квазинильпотентный оператор A удовлетворяет некоторому дополнительному условию (см. предложение 3.2).

Сформулируем теперь основной результат статьи.

Теорема 3.8. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *Задача Коши* (3) *имеет аналитическое решение для любого вектора* $b \in E$.

2) *Задача Коши (4) имеет аналитическое решение для любой вектор-функции $g(x)$, аналитической в некоторой окрестности нуля.*

3) *Оператор A квазинильпотентен и резольвента Фредгольма*

$F_{A^2}(z) = (1 - zA^2)^{-1}$ *оператора A^2 является целой функцией экспоненциального типа (т.е. $\|F_{A^2}(z)\| \leq Ce^{\beta|z|}$ для некоторых констант C и β).*

Кроме того, при выполнении этих условий решение задачи Коши (4) единственно и может быть представлено в следующем явном виде:

$$u(t,x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{2n} g^{(2n)}(x) \quad (\text{см. замечание } 5.2).$$

Таким образом, если задача Коши (4) имеет аналитическое решение для любого аналитического начального условия, то оператор A должен быть в спектральном смысле близок к нулю. В частности, в конечномерном случае уравнение из задачи Коши (4) превращается в систему уравнений

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} = \sum_{j=1}^{m} c_{kj} \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2}, \quad k = 1, \dots, m, \quad (m = \dim E),$$

где матрица $C = (c_{kj})$ нильпотентна (см. следствие 3.4). Конечно, в этом специальном случае утверждение 3.4 является простым следствием общей теоремы Мизохаты [10, теорема 1 из раздела 3].

Теорему 3.8 можно рассматривать как еще одну иллюстрацию необычных свойств объектов, связанных с квазинильпотентными операторами (см., например, [19, разделы 4.6 и 4.10] и [22]).

Некоторые примеры явного решения задачи Коши (3) приведены в разделе 3 (см. следствия 3.3–3.5, пример 3.6 и замечание 3.7).

Наше изучение задачи Коши (4) основывается на понятии A-голоморфного формального степенного ряда (см. определение 2.1), которое было рассмотрено в статье [22]. В [22] это понятие использовалось для изучения голоморфных решений уравнения $z^2Aw' + g(z) = w$, где A – квазинильпотентный оператор в банаховом пространстве. Отметим, что любое из условий теоремы 3.8 эквивалентно A^2-голоморфности формального степенного ряда $\psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \zeta^n$ (см.

предложение 2.9). Понятие A-голоморфности рассматривается в разделе 2.

В разделе 4 мы рассматриваем представление решения задачи Коши (4) в виде интеграла Пуассона. В нашей ситуации (т.е. когда оператор A квазинильпотентен) операторный аналог функции точечного теплового источника

$$H_A(t,\xi) = \frac{1}{2A\sqrt{\pi t}} \exp\Big\{ -\frac{\xi^2}{4A^2 t}\Big\},$$

конечно, не имеет обычного смысла. Мы рассматриваем H_A как векторозначную обобщенную функцию, причем пространством "основных функций" служит пространство всех сходящихся степенных рядов с коэффициентами из E (см. определение 4.1 и предложение 4.3). Затем мы показываем, что решение задачи Коши (4) можно представить в виде свертки функции H_A с начальным условием g (см. теорему 4.4).

В разделе 5 мы изучаем задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x) \\ u(0,x) = 0. \end{cases}$$

Мы показываем, что при выполнении условий теоремы 3.8 аналитическое решение этой задачи может быть найдено в виде ряда по степеням "малого параметра" A (см. теорему 5.1):

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} A^{2k} u_k(t,x).$$

2. Предварительные сведения

Пусть E – комплексное банахово пространство, $A: E \to E$ – ограниченный линейный оператор, $b \in E$ и $f(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ – формальный степенной ряд с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Положим

$$f(zA) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n z^n, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{6}$$

$$f(zA)b = \sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n b z^n, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{7}$$

Тогда $f(zA)$ – степенной ряд с коэффициентами из алгебры $B(E)$ всех ограниченных линейных операторов в пространстве E, а $f(zA)b$ – степенной ряд с коэффициентами из E. Радиус сходимости ряда (6) будем обозначать через $R_A(f)$, а ряда (7) – через $R_{A,b}(f)$.

Определение 2.1. *Степенной ряд $f(\zeta)$ называется A-голоморфным, если $R_A(f) > 0$, и (A,b)-голоморфным, если $R_{A,b}(f) > 0$.*

Очевидно, что A-голоморфный степенной ряд является (A,b)-голоморфным для всех векторов $b \in E$, причем $R_{A,b}(f) \geq R_A(f)$. Кроме того, если $|z| < R_A(f)$, то сумма ряда в правой части равенства (7) совпадает с результатом действия оператора $f(zA)$ на вектор b.

Замечание 2.2. Предположим, что степенной ряд f имеет положительный радиус сходимости $R(f)$. Тогда этот ряд A-голоморфен для любого ограниченного оператора A. Кроме того, если $\rho(A)$ – спектральный радиус оператора A и $|z|\rho(A) < R(f)$, то $f(zA)$ – результат применения голоморфной функции f к оператору zA.

Пример 2.3. Предположим, что $b \in \ker A^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Тогда

$$f(zA)b = \sum_{n=0}^{m-1} c_n A^n b z^n,$$

т.е. любой степенной ряд $f(\zeta)$ является (A,b)-голоморфным.

Если пространство E конечномерно, то в наиболее интересной для нас ситуации верно и обратное утверждение (см. [22], предложение 1.4).

Предложение 2.4. *Пусть $\dim E < \infty$ и f – степенной ряд с нулевым радиусом сходимости. Если f является (A,b)-голоморфным, то $b \in \ker A^m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$.*

В случае гильбертового пространства справедлив следующий аналог предложения 2.4.

Предложение 2.5. *Пусть E – гильбертово пространство и $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ – степенной ряд с нулевым радиусом сходимости. Если A*

– ограниченный нормальный оператор и ряд f является (A,b)-голоморфным, то $b \in \ker A$.

Доказательство. Пусть $R_{A,b}(f) > 0$. Согласно векторному аналогу формулы Коши-Адамара,

$$\frac{1}{R_{A,b}(f)} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|\|A^n b\|} < \infty.$$

Покажем, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n b\|}$. Согласно спектральной теореме, мы можем отождествить E с пространством $L^2(X,\mu)$ для некоторого пространства с мерой (X,μ) и рассматривать A как оператор умножения:

$$(Ab)(x) = a(x)b(x), \quad \text{где} \quad a \in L^\infty(X,\mu).$$

Тогда $\sqrt[n]{\|A^n b\|} = \sqrt[2n]{\int\limits_X |a(x)|^{2n}|b(x)|^2 d\mu}$ и эта последовательность сходится к норме функции $a(x)$ в пространстве $L^\infty(X,\mu_b)$, где $d\mu_b = |b(x)|^2 d\mu$. С другой стороны, $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n b\|} = 0$. Следовательно, $a(x) = 0$ μ_b-почти всюду, т.е. $a(x)b(x) = 0$ μ-почти всюду. Таким образом, $Ab = 0$. □

Используя пример 2.3, легко найти примеры (A,b)-голоморфных формальных степенных рядов, которые не являются A-голоморфными. Однако, применяя теорему Бэра о категориях, можно получить следующее утверждение (см. [22, теорема 1.5]).

Теорема 2.6. *Если формальный степенной ряд f является (A,b)-голоморфным для всех $b \in E$, то он A-голоморфен.*

Следующее утверждение показывает, что если оператор A не квазинильпотентен, то понятие A-голоморфного формального степенного ряда совпадает с обычным понятием голоморфного степенного ряда (см. [22, предложение 1.7]).

Предложение 2.7. *Если оператор A имеет положительный спектральный радиус, то степенной ряд f является A-голоморфным тогда и только тогда, когда он имеет положительный радиус сходимости.*

Таким образом, если f имеет нулевой радиус сходимости и является A-голоморфным, то оператор A квазинильпотентен.

Следующие два формальных степенных ряда будут играть важную роль в наших дальнейших рассмотрениях:

$$\varphi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} n!\zeta^n \quad \text{и} \quad \psi(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!}\zeta^n.$$

Лемма 2.8. *Пусть $A : E \to E$ – ограниченный линейный оператор и $b \in E$. Тогда:*

1) ряд ψ (A, b)-голоморфен в том и только том случае, когда ряд φ (A, b)-голоморфен;

2) ряд ψ A-голоморфен в том и только том случае, когда ряд φ A-голоморфен.

Доказательство. Нетрудно заметить, что, согласно формуле Стирлинга, $\sqrt[n]{\dfrac{(2n)!}{n!}} \sim \dfrac{4n}{e}$ и $\sqrt[n]{n!} \sim \dfrac{n}{e}$. □

Напомним, что целая функция $g(z)$ со значениями в банаховом пространстве называется функцией экспоненциального типа, если $\|g(z)\| \le Ce^{\beta|z|}$ для некоторых констант C и β. Напомним также, что ограниченный линейный оператор A квазинильпотентен тогда и только тогда, когда его резольвента Фредгольма $(1 - zA)^{-1}$ является целой функцией (см. [19, глава 4]).

Предложение 2.9. *Резольвента Фредгольма $(1 - zA)^{-1}$ оператора A является целой функцией экспоненциального типа тогда и только тогда, когда ряд $\psi(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!}\zeta^n$ A-голоморфен.*

Доказательство. Согласно лемме 2.8, мы можем рассматривать степенной ряд $\varphi(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n!\zeta^n$ вместо ряда $\psi(\zeta)$. Пусть ряд φ является A-голоморфным. Тогда

$$\frac{1}{R_A(\varphi)} = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!\|A^n\|} < +\infty \tag{8}$$

и оператор A квазинильпотентен. Теперь соотношение (8) эквивалентно тому, что целая функция $(1 - zA)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} A^n z^n$ имеет экспоненциальный тип (см. [21, с. 95]). □

Приведем пример явного вычисления функции $\psi(zA)$.

Пример 2.10. Пусть $E = C[0,1]$ и A_1 – оператор интегрирования:

$$(A_1 b)(s) = \int_0^s b(y)dy, \quad b \in E.$$

Хорошо известно, что

$$(A_1^n b)(s) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^s (s-y)^{n-1} b(y)dy, \tag{9}$$

$$\|A_1^n\| \le \frac{1}{n!} \quad \text{и} \quad A_1 = A^2,$$

где

$$(Ab)(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^s \frac{b(y)}{\sqrt{s-y}}dy.$$

Нетрудно проверить, что ряд ψ A_1-голоморфен и $R_{A_1}(\psi) = 1/4$, т.е. ψ является A^2-голоморфным и $R_{A^2}(\psi) = 1/4$. Для явного вычисления оператора $\psi(zA^2)$ отметим, что

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

Поэтому

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\Big(\frac{x}{2}\Big)^{2n-2} = \frac{2}{(1-x^2)^{3/2}}, \quad |x| < 1$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!(n-1)!}\gamma^{n-1} = \frac{2}{(1-4\gamma)^{3/2}}, \quad |\gamma| < \frac{1}{4}. \tag{10}$$

Теперь из (9) и (10) мы получаем, что

$$(\psi(zA^2)b)(s) = b(s) + 2z\int_0^s \frac{b(y)dy}{(1-4z(s-y))^{3/2}}, \quad |z| < 1/4. \tag{11}$$

3. Основной результат

Пусть E – банахово пространство, $A : E \to E$ – ограниченный линейный оператор и g – E-значная функция, аналитическая в окрестности нуля.

В этом разделе мы рассмотрим вопрос о существовании решения задачи Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = g(x). \end{cases} \tag{12}$$

Под решением задачи (12) мы понимаем *локально аналитическое решение*, т.е. вектор-функцию вещественных переменных t и x, аналитическую в некоторой окрестности нуля, удовлетворяющую в этой окрестности уравнению и удовлетворяющую начальному условию в окрестности точки $x_0 = 0$.

Сначала рассмотрим чисто алгебраическую ситуацию, т.е. предположим, что g – формальный степенной ряд.

Лемма 3.1. *Пусть* $g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m$ *– формальный степенной ряд с коэффициентами из* E. *Тогда задача Коши* (12) *имеет единственное формальное решение*

$$u(t,x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!n!} A^{2n} b_{m+2n} t^n x^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{2n} g^{(2n)}(x).$$

Доказательство. Предположим, что $u(t,x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} c_{nm} t^n x^m$, $c_{nm} \in E$ – формальное решение задачи Коши (12). Тогда после формальной подстановки в уравнение мы получаем

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1m} t^n x^m = \sum_{n,m=0}^{\infty} (m+2)(m+1) A^2 c_{nm+2} t^n x^m,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_{0m} x^m = \sum_{m=0}^{\infty} b_m x^m.$$

Отсюда

$$(n+1) c_{n+1m} = (m+2)(m+1) A^2 c_{nm+2}$$

и

$$c_{0m} = b_m, \quad n, m \geq 0,$$

т.е.

$$c_{n,m} = \frac{(m+2n)!}{m!n!} A^{2n} b_{m+2n}, \quad n, m \geq 0.$$

Таким образом,

$$u(t,x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!n!} A^{2n} b_{m+2n} t^n x^m$$

есть единственное формальное решение задачи (12). Нетрудно проверить, что это решение можно представить в виде

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{2n} g^{(2n)}(x),$$

причем сумма в правой части этого равенства является корректно определенным формальным степенным рядом по переменным t и x. Лемма доказана. □

Теперь для $b \in E$ рассмотрим следующую специальную задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = \dfrac{b}{1-x}. \end{cases} \tag{13}$$

Предложение 3.2. *Задача Коши* (13) *имеет решение тогда и только тогда, когда формальный степенной ряд* $\psi(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \zeta^n$ *является* (A^2, b)*-голоморфным (см. определение* 2.1*). Кроме того, решение единственно и может быть представлено в следующих двух формах:*

$$u(t,x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!n!} A^{2n} b t^n x^m$$

и

$$u(t,x) = \psi\Big(\frac{tA^2}{(1-x)^2}\Big)\frac{b}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{A^{2n} b t^n}{(1-x)^{2n+1}}, \quad |t| < T, \quad |x| < R,$$

где $R \in (0,1)$ *и* $T = (1-R)^2 R_{A^2,b}(\psi)$.

Доказательство. Согласно лемме 3.1, единственное формальное решение задачи Коши (13) имеет вид

$$u(t,x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!n!} A^{2n} b t^n x^m.$$

Предположим, что этот ряд сходится при $|t| < T$ и $|x| < R$, где $R \in (0,1)$. Так как

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!n!} x^m = \frac{1}{(1-x)^{2n+1}},$$

то

$$\begin{aligned} u(t,x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!n!} x^m \right) A^{2n} b t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(1-x)^{2n+1}} A^{2n} b t^n. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!} \frac{1}{(1-x)^{2n+1}} \|A^{2n} b\|} < +\infty,$$

т.е. ряд ψ является (A^2, b)-голоморфным. Обратно, пусть формальный степенной ряд ψ (A^2, b)-голоморфен. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} A^{2n} b \frac{t^n}{(1-x)^{2n+1}}$$

сходится при $\frac{|t|}{(1-x)^2} < R_{A^2,b}(\psi)$. Следовательно, если $R \in (0,1)$, то степенной ряд $u(t,x) = \sum\limits_{n,m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!n!} A^{2n} b t^n x^m$ сходится для $|x| < R$, $|t| < (1-R)^2 R_{A^2,b}(\psi)$ и

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \frac{A^{2n} b t^n}{(1-x)^{2n+1}}, \quad |t| < T, \quad |x| < R.$$

□

Согласно предложениям 2.4 и 2.5, из предложения 3.2 мы получаем следующие утверждения.

Следствие 3.3. *Пусть* $\dim E < +\infty$. *Тогда задача Коши* (13) *имеет решение тогда и только тогда, когда* $b \in \ker A^k$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}$. *Кроме того, если* $b \in \ker A^{2N+1}$, *то решение этой задачи имеет вид*

$$u(t,x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(2n)!}{n!} \frac{A^{2n} b t^n}{(1-x)^{2n+1}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1.$$

Следствие 3.4. *Пусть* $\dim E < +\infty$. *Тогда задача Коши* (13) *имеет решение для любого вектора* $b \in E$ *тогда и только тогда, когда оператор* A *нильпотентен.*

Следствие 3.5. *Пусть* E *– гильбертово пространство,* $b \in E$ *и* A *– ограниченный нормальный оператор. Тогда задача Коши* (13) *имеет решение тогда и только тогда, когда* $b \in \ker A$.

Теперь мы приведем нетривиальный пример явного решения задачи Коши (13).

Пример 3.6. Пусть $E = C[0,1]$ и A – корень из оператора интегрирования:

$$(Ab)(s) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^s \frac{b(y)}{\sqrt{s-y}} dy.$$

Тогда ряд ψ является A^2-голоморфным и $R_{A^2,b}(\psi) = 1/4$ (см. пример 2.10). Согласно предложению 3.2, решение задачи Коши (13) имеет вид

$$u(t,x) = \psi\Big(\frac{tA^2}{(1-x)^2}\Big)\frac{b}{1-x}, \quad x \in (-1,1), \quad |t| < \frac{1}{4}(1-x)^2.$$

Теперь равенство (11) из примера 2.10 показывает, что

$$[u(t,x)](s) = \frac{b(s)}{1-x} + 2t \int_0^s \frac{b(y)dy}{((1-x)^2 - 4t(s-y))^{3/2}}, \tag{14}$$

$x \in (-1,1)$, $|t| < \frac{1}{4}(1-x)^2$, $s \in [0,1]$.

Замечание 3.7. Пример 3.6 показывает, что сумма ряда $\psi(zA^2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} A^{2n} z^n$ неявно содержится в формуле для решения двумерного волнового уравнения со специальными начальными условиями. Действительно, в этом примере задача Коши (13) может быть записана в следующей форме:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x,s) = \displaystyle\int\limits_0^s \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t,x,y)dy \\ u(0,x,s) = \dfrac{b(s)}{1-x}, \quad s \in [0,1]. \end{cases}$$

Таким образом, функция $u(t,x,s)$ удовлетворяет уравнению с частными производными

$$\frac{\partial}{\partial s}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

и условиям $u(0,x,s) = \frac{b(s)}{1-x}$, $s \in [0,1]$, и $\frac{\partial u}{\partial t}(t,x,0) = 0$. Теперь из (14) мы получаем, что функция

$$u(t,x,s) = \frac{b(s)}{1-x} + 2t\int\limits_0^s \frac{b(y)dy}{((1-x)^2 - 4t(s-y))^{3/2}},$$

$$x \in (-1,1), \quad |t| < \frac{1}{4}(1-x)^2, \quad s \in [0,1]$$

является решением уравнения (15). Если $b \in C^1[0,1]$, то функция $u(t,x,s)$ дифференцируема по s. В этом случае уравнение (15) можно переписать в обычной форме $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, и после линейной замены переменных оно сводится к волновому уравнению.

Теперь рассмотрим задачу Коши (12) с произвольной аналитической вектор-функцией $g(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m x^m$, $|x| < R(g)$.

Теорема 3.8. *Следующие условия эквивалентны.*

1) *Задача Коши* (13) *имеет аналитическое решение для любого вектора* $b \in E$.

2) *Задача Коши* (12) *имеет аналитическое решение для любой аналитической в окрестности нуля вектор-функции* $g(x)$.

3) *Оператор* A *квазинильпотентен и резольвента Фредгольма* $(1 - zA^2)^{-1}$ *оператора* A^2 *является целой функцией экспоненциального типа.*

Кроме того, если одно из этих условий выполнено, то задача Коши (12) *имеет единственное аналитическое решение*

$$u(t,x)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(m+2n)!}{m!n!}A^{2n}b_{m+2n}t^nx^m$$

и этот ряд сходится при $|t|<T_0$, $|x|<R_0$, *где* $T_0=\alpha_0 R_{A^2}(\psi)R(g)^2$, $R_0=\beta_0\beta_1 R(g)$ *и* α_0, β_0, β_1 *– произвольные константы, удовлетворяющие условиям* $\alpha_0,\beta_0,\beta_1\in(0,1)$ *и* $\alpha_0<\beta_1^2(1-\beta_0)^2$.

Доказательство. Согласно предложению 3.2 и теореме 2.6, условие 1) эквивалентно A^2-голоморфности степенного ряда $\psi(\zeta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!}\zeta^n$. Поэтому условия 1) и 3) эквивалентны (см. лемму 2.8 и предложение 2.9). Очевидно, что из 2) следует 1). Докажем, что условие 2) следует из A^2-голоморфности степенного ряда $\psi(\zeta)$. Согласно лемме 3.1,

$$u(t,x)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{(m+2n)!}{m!n!}A^{2n}b_{m+2n}t^nx^m$$

– единственное формальное решение задачи Коши (12). Покажем, что существуют такие положительные T_0 и R_0, для которых этот ряд сходится при $|t|<T_0,|x|<R_0$. Пусть $c_1,c_2,c_3,c_4\in(0,1)$, причем $c_3<c_1c_2^2(1-c_4)^2$ (например, $c_1=9/10$, $c_2=3/4$, $c_3=1/8$, $c_4=1/2$) и $r_1=c_1R_{A^2}(\psi)$. Тогда ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{n!}\|A^{2n}\|r_1^n$ сходится. Следовательно, существует такая константа $M_1>0$, что $\frac{(2n)!}{n!}\|A^{2n}\|\le\frac{M_1}{r_1^n}$, $n=0,1,\ldots$. Пусть $r_2=c_2R(g)$. Тогда существует такая константа $M_2>0$, для которой $\|b_m\|\le\frac{M_2}{r_2^m}$, $m=0,1,\ldots$. Поэтому для $|x|<r_2$ и $n=0,1,\ldots$ мы получаем

$$\frac{(2n)!}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+2n)!}{m!(2n)!}\|A^{2n}\|\,\|b_{m+2n}\||x|^m$$

$$\le\frac{(2n)!}{n!}\frac{M_2\|A^{2n}\|}{r_2^{2n}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(m+2n)!}{m!(2n)!}\Big(\frac{|x|}{r_2}\Big)^m$$

$$=\frac{(2n)!M_2\|A^{2n}\|}{n!r_2^{2n}}\frac{1}{(1-\frac{|x|}{r_2})^{2n+1}}\le\frac{M_1M_2}{r_1^nr_2^{2n}}\frac{1}{(1-\frac{|x|}{r_2})^{2n+1}}.$$

Пусть теперь $T_0 = c_3 R_{A^2}(\psi) R(g)^2$ и $R_0 = c_2 c_4 R(g)$. Тогда, если $|t| < T_0$ и $|x| < R_0$, то

$$\frac{|t|}{r_1 r_2^2 (1 - \frac{|x|}{r_2})^2} < \frac{c_3 R_{A^2}(\psi) R(g)^2}{c_1 R_{A^2}(\psi) c_2^2 R(g)^2 (1 - \frac{R_0}{r_2})^2} = \frac{c_3}{c_1 c_2^2 (1 - c_4)^2} < 1,$$

т.е. ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r_1^n r_2^{2n}} \frac{|t|^n}{(1 - \frac{|x|}{r_2})^{2n+1}}$$

и

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} \bigg(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!(2n)!} \|A^{2n}\| \, \|b_{m+2n}\| |x|^m \bigg) |t|^n$$

сходятся. Таким образом, при $|t| < T_0$ и $|x| < R_0$ ряд

$$\sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!n!} \|A^{2n}\| \, \|b_{m+2n}\| \, |x|^m |t|^n$$

сходится. Для завершения доказательства достаточно положить $\alpha_0 = c_3$, $\beta_0 = c_4$ и $\beta_1 = c_1^{1/2} c_2$. $\square$

4. Представление решения в виде интеграла Пуассона

В классическом случае ($E = \mathbb{C}$ и $A > 0$) хорошо известно, что решение задачи Коши (12) с непрерывной и ограниченной начальной функцией $g(x)$ можно записать в виде интеграла Пуассона:

$$u(t,x) = \frac{1}{2A\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{ -\frac{\xi^2}{4A^2 t} \Big\} g(x - \xi) d\xi.$$

В векторном случае, если A – необратимый оператор, то выражение $\frac{1}{2A\sqrt{\pi t}} \exp\{-\frac{\xi^2}{4A^2 t}\}$ не имеет прямого смысла. С другой стороны, если $E = \mathbb{C}$, $A > 0$ и $g \in E[\xi]$, $g(\xi) = \sum_{m=0}^{2p} b_m \xi^m$, то нетрудно проверить, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2A\sqrt{\pi t}} \exp\Big\{ -\frac{\xi^2}{4A^2 t} \Big\} g(\xi) d\xi = \sum_{n=0}^{p} \frac{(2n)!}{n!} A^{2n} b_{2n} t^n.$$

Это равенство дает основание ввести следующее определение интеграла Пуассона в пространстве формальных степенных рядов.

Пусть E – банахово пространство и $E[[\xi]]$ – векторное пространство формальных степенных рядов с коэффициентами из E. Для $r > 0$ и $g(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k \in E[[\xi]]$ положим $\|g\|_r = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \|b_k\| r^k$. Пусть

$$E_r\langle\xi\rangle = \{g \in E[[\xi]] : \|g\|_r < +\infty\} \quad \text{и} \quad E\langle\xi\rangle = \bigcup_{r>0} E_r\langle\xi\rangle.$$

Тогда $(E_r\langle\xi\rangle, \|\cdot\|_r)$ есть банахово пространство и $E\langle\xi\rangle$ совпадает с векторным пространством сходящихся степенных рядов с коэффициентами из E. На пространстве $E\langle\xi\rangle$ мы будем рассматривать топологию индуктивного предела банаховых пространств $E_r\langle\xi\rangle$ (см. [20, глава 1], где подробно рассматривается случай $E = \mathbb{C}$).

Определение 4.1. *Пусть $A : E \to E$ – ограниченный линейный оператор. Для $g \in E\langle\xi\rangle$, $g(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k$ положим*

$$\frac{1}{2A\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{\xi^2}{4A^2 t}\Big\} g(\xi) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} A^{2n} b_{2n} t^n, \qquad (16)$$

(мы рассматриваем правую часть формулы (16) как элемент из $E[[t]]$).

Замечание 4.2. Отметим, что если $A = 0$, то

$$\frac{1}{2A\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{\xi^2}{4A^2 t}\Big\} g(\xi) d\xi = g(0).$$

Предложение 4.3. *Предположим, что оператор A квазинильпотентен и резольвента Фредгольма оператора A^2 является целой функцией экспоненциального типа. Тогда ряд в правой части равенства (16) имеет положительный радиус сходимости. Кроме того, если мы определим*

$$(H_A g)(t) := \frac{1}{2A\sqrt{\pi t}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{\xi^2}{4A^2 t}\Big\} g(\xi) d\xi, \qquad (17)$$

то H_A – непрерывное линейное отображение из $E\langle\xi\rangle$ в $E\langle t\rangle$.

Доказательство. Если $g(\xi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k \xi^k$, то

$$(H_A g)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} A^{2n} b_{2n} t^n.$$

Согласно предложению 2.9,

$$\frac{1}{R_{A^2}(\psi)} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}\|A^{2n}\|} < +\infty.$$

Следовательно,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}\|A^{2n}\|\ \|b_{2n}\|} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}\|A^{2n}\|}\,\sqrt[n]{\|b_{2n}\|} \\ \leq \frac{1}{R_{A^2}(\psi) R(g)^2}.$$

Таким образом, если $|t| < R_{A^2}(\psi)R(g)^2$, то ряд в правой части равенства (16) сходится, т.е. $H_A g \in E\langle t\rangle$. Очевидно, что отображение H_A линейно. Докажем его непрерывность. Для этого мы покажем, что все сужения $H_A|_{E_r\langle\xi\rangle} : E_r\langle\xi\rangle \to E\langle t\rangle$, $r > 0$, непрерывны. Пусть $r_0 > 0$ и $g \in E_{r_0}\langle\xi\rangle$. Согласно предложению 2.9, $\frac{(2n)!}{n!}\|A^{2n}\| \leq M^n$, $n \in \mathbb{N}$, для некоторого $M > 0$. Пусть $r_1 = \frac{r_0^2}{M}$. Тогда

$$\|H_A g\|_{r_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!}\|A^{2n} b_{2n}\| r_1^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|b_{2n}\| r_0^{2n} \leq \|g\|_{r_0}.$$

Поэтому H_A – непрерывное отображение из $E_{r_0}\langle\xi\rangle$ в $E_{r_1}\langle t\rangle$. Следовательно, H_A непрерывно как отображение из $E_{r_0}\langle\xi\rangle$ в $E\langle t\rangle$. □

Теорема 4.4. *Пусть g – аналитическая в окрестности нуля вектор-функция и $g(x) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m x^m$, $|x| < R(g)$. Предположим, что оператор A квазинильпотентен и резольвента Фредгольма оператора A^2 является целой функцией экспоненциального типа. Пусть T_0 и R_0 –*

константы из условия теоремы 3.8. Тогда решение задачи Коши (12) можно представить в следующем виде:

$$u(t,x) = \frac{1}{2A\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{\xi^2}{4A^2t}\Big\} g(x-\xi)d\xi, \tag{18}$$

$|t| < T_0$, $|x| < R_0$, *т.е. для каждого фиксированного* $x \in (-R_0, R_0)$ *правая часть равенства (18) является сходящимся степенным рядом при* $t \in (-T_0, T_0)$, *который совпадает со степенным рядом из левой части этого равенства.*

Доказательство. Зафиксируем $x \in (-R_0, R_0)$ и покажем, что $g(x-\xi)$ является сходящимся степенным рядом по переменной ξ. Пусть $g(\xi) = \sum\limits_{m=0}^{\infty} b_m\xi^m$, $|\xi| < R(g)$. Так как $R_0 < R(g)$, то $R(g) - |x| > 0$. Следовательно, если $|\xi| < R(g) - |x|$, то $|x| + |\xi| < R(g)$, т.е.

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|b_m\|(|x| + |\xi|)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} C_m^k \|b_m\| |\xi|^k |x|^{m-k} < +\infty.$$

Отсюда мы получаем:

$$\begin{aligned} g(x-\xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} b_m(x-\xi)^m = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m}(-1)^k b_m C_m^k \xi^k x^{m-k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\bigg(\sum_{m=k}^{\infty} C_m^k b_m x^{m-k}\bigg)\xi^k, \quad |\xi| < R(g) - |x|. \end{aligned}$$

Таким образом, если $h(\xi) = g(x-\xi)$, то $h \in E\langle\xi\rangle$, т.е. правая часть равенства (18) определена корректно. Согласно определению 4.1 мы получаем

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2A\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\Big\{-\frac{\xi^2}{4A^2t}\Big\} g(x-\xi)d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} A^{2n}\bigg(\sum_{m=2n}^{\infty} C_m^{2n} b_m x^{m-2n}\bigg)t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} A^{2n}\bigg(\sum_{m=0}^{\infty} C_{m+2n}^{2n} b_{m+2n} x^m\bigg)t^n \end{aligned}$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(m+2n)!}{m!n!} A^{2n} b_{m+2n} t^n x^m = u(t,x),$$

и этот ряд сходится при $|t| < T_0$, $|x| < R_0$ (см. теорему 3.8). □

Замечание 4.5. Равенства (17) и (18) показывают, что решение $u(t,x)$ задачи Коши (12) может быть представлено в виде “свертки” начального условия g с “обобщенной функцией” H_A.

5. Задача Коши для неоднородного уравнения

Пусть $f(t,x)$ – вектор-функция, аналитическая в некоторой окрестности нуля и

$$f(t,x) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm} t^n x^m, \quad |t| < T_0, \quad |x| < R_0.$$

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial^2 x} + f(t,x) \\ u(0,x) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Под решением этой задачи мы понимаем вектор-функцию вещественных переменных t и x, которая аналитична в некоторой окрестности нуля, удовлетворяет в этой окрестности уравнению и удовлетворяет начальному условию.

Теорема 5.1. *Предположим, что оператор A квазинильпотентен и резольвента Фредгольма $(1 - zA^2)^{-1}$ оператора A^2 является целой функцией экспоненциального типа. Тогда задача Коши (19) имеет единственное аналитическое решение, которое определено в прямоугольнике $|t| < T_1$, $|x| < R_1$, где $T_1 = \min\{T_0, \alpha(1-\beta)^2\gamma^2 R_{A^2}(\psi){R_0}^2\}$, $R_1 = \beta\gamma R_0$ и α, β, γ – произвольные константы из $(0,1)$. (Напомним, что $R_{A^2}(\psi)$ — радиус сходимости ряда $\psi(zA^2) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{n!} A^{2n} z^n$, см. предложение 2.9.)*

Доказательство. Будем искать решение задачи Коши (19) в следующем виде:

$$u(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} A^{2k} u_k(t,x). \tag{20}$$

Нетрудно проверить, что этот ряд формально удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t,x),$$

если

$$\frac{\partial u_0}{\partial t} = f(t,x) \ \text{ и } \ \frac{\partial u_{k+1}}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}, \quad k \geq 1.$$

Принимая во внимание начальное условие, получаем

$$u_0(t,x) = \int\limits_0^t f(\tau_0, x) d\tau_0,$$

$$u_{k+1}(t,x) = \int\limits_0^t \frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}(\tau_{k+1}, x) d\tau_{k+1}, \quad k \geq 1.$$

Отсюда

$$u_k(t,x) = \int\limits_0^t d\tau_k \int\limits_0^{\tau_k} d\tau_{k-1} \dots \int\limits_0^{\tau_1} \frac{\partial^{2k} f}{\partial x^{2k}}(\tau_0, x) d\tau_0, \quad k \geq 0.$$

Для доказательства того, что формальная сумма (20) есть аналитическое решение, рассмотрим функции f и u_k, $k = 0, 1, \dots$, как голоморфные функции двух комплексных переменных z, w в полидиске $|z| < T_0$, $|w| < R_0$. Таким образом,

$$f(z,w) = \sum_{n,m=0}^{\infty} f_{nm} z^n w^m, \quad u_0(z,w) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{f_{nm}}{n+1} z^{n+1} w^m$$

и

$$u_k(z,w) = \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(m+2k)!n!}{m!(n+k+1)!} f_{nm} z^{n+k+1} w^m,$$
$$k = 1, 2, \dots, \quad |z| < T_0, \quad |w| < R_0.$$

Пусть теперь α, β, $\gamma \in (0,1)$, $r = \gamma R_0$ и $s < \min\{T_0, \alpha(1-\beta)^2 \gamma^2 R_{A^2}(\psi) {R_0}^2\}$. Тогда существует такая константа $M_1 > 0$, что

$\|f_{nm}\| \le \frac{M_1}{s^n r^m}, n, m = 0, 1, \ldots$. Поэтому для $|z| < s_1 < s$ и $|w| < r_1 = \beta r$ мы получаем:

$$\|u_k(z,w)\| \le M_1 \frac{|z|^{k+1}}{r^{2k}} \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{(m+2k)!n!}{m!(n+k+1)!} \Big(\frac{|z|}{s}\Big)^n \Big(\frac{|w|}{r}\Big)^m$$

$$= M_1(2k)! \frac{|z|^{k+1}}{r^{2k}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(m+2k)!}{m!(2k)!} \Big(\frac{|w|}{r}\Big)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+k+1)!} \Big(\frac{|z|}{s}\Big)^n$$

$$= M_1(2k)! \frac{|z|^{k+1}}{r^{2k}} \frac{1}{(1-\frac{|w|}{r})^{2k+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+k+1)!} \Big(\frac{|z|}{s}\Big)^n$$

$$\le M_1(2k)! \frac{s^{k+1}}{r^{2k}} \frac{1}{(1-\frac{|w|}{r})^{2k+1}} \frac{1}{(1-\frac{|z|}{s})(k+1)!}$$

$$= \frac{M_1(2k)! s^{k+1}}{(1-\frac{s_1}{s})(k+1)!(1-\frac{r_1}{r})^{2k+1} r^{2k}},$$

так как

$$\Big| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(n+k+1)!} t^n \Big| = \Big| \int\limits_0^t d\tau_k \int\limits_0^{\tau_k} d\tau_{k-1} \ldots \int\limits_0^{\tau_1} \frac{d\tau_0}{1-\tau_0} \Big| \le \frac{1}{(1-|t|)(k+1)!},$$

если $|t| < 1$. Пусть теперь $l = \alpha R_{A^2}(\psi)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!} \|A^{2k}\| l^k$ сходится (см. предложение 2.9). Следовательно, существует такая константа $M_2 > 0$, что $\|A^{2k}\| \le M_2 \frac{k!}{(2k)! l^k}$, $k = 0, 1, \ldots$. Поэтому

$$\|A^{2k} u_k(t,x)\| \le \|A^{2k}\| \, \|u_k(t,x)\| \le \frac{M_1 M_2 s^{k+1}}{(1-\frac{s_1}{s})(k+1)(1-\frac{r_1}{r})^{2k+1} r^{2k} l^k}$$

для всех $|z| \le s_1$, $|w| \le r_1$ и $\dfrac{s}{l(1-\frac{r_1}{r})^2} = \dfrac{s}{\alpha(1-\beta)^2 \gamma^2 R_{A^2}(\psi) {R_0}^2} < 1$.

Таким образом, ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^{2k} u_k(z,w)$ сходится равномерно при $|z| \le s_1$, $|w| \le r_1$ для всех $s_1 < s$ и $r_1 < \beta R_0$, и функция $u(z,w) =$

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} A^{2k} u_k(z,w)$ голоморфна в полидиске $|z| < T_1$, $|w| < R_1$, где $T_1 = \min\{T_0, \alpha(1-\beta)^2\gamma^2 R_{A^2}(\psi) {R_0}^2\}$, $R_1 = \beta\gamma R_0$. Следовательно, функция $u(t,x)$, которая является суммой ряда (20), аналитична в прямоугольнике $|t| < T_1$, $|x| < R_1$, и является решением задачи Коши (19). Утверждение о единственности решения следует из леммы 3.1. Теорема доказана. □

Замечание 5.2. Пусть функция f из задачи Коши (19) не зависит от t, т.е. $f(t,x) = g(x)$, где g – вектор-функция, аналитическая в окрестности нуля. Если $u(t,x)$ есть вектор-функция, аналитическая в окрестности нуля, и $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, то нетрудно проверить, что $u(t,x)$ – решение задачи Коши (19) тогда и только тогда, когда $v(t,x)$ – решение задачи Коши (12):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = A^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ v(0,x) = g(x). \end{cases}$$

Следовательно, импликация 3)⇒1) в теореме 3.8 может быть выведена из теоремы 5.1. Кроме того, метод нахождения решения неоднородного уравнения в виде ряда по степеням “малого параметра” A может быть использован для решения задачи Коши (12):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = g(x). \end{cases}$$

В этом случае естественно искать решение в виде ряда

$$u(t,x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} A^{2n} g_n(x). \tag{21}$$

Здесь $g_{n+1} = g_n^{''}(x)$, т.е. $g_n(x) = g^{(2n)}(x)$, $n \geq 1$. Если выполнено условие 3) теоремы 3.8, то доказательство сходимости ряда (21) повторяет рассуждения, используемые при доказательстве теоремы 5.1.

Пример 5.3. Пусть оператор A удовлетворяет условию теоремы 5.1 и $b \in E$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = A^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{b}{1-x} \\ u(0,x) = 0. \end{cases}$$

Если $v = \frac{\partial u}{\partial t}$, то v является решением задачи Коши (13):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = A^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ v(0,x) = \dfrac{b}{1-x}. \end{cases}$$

Следовательно, $v(t,x) = \psi(\frac{tA^2}{(1-x)^2})\frac{b}{1-x}$ (см. предложение 3.2). Поэтому:

$$u(t,x) = \int\limits_0^t \psi\left(\frac{\tau}{(1-x)^2}A^2\right)\frac{b}{1-x}d\tau = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{(k+1)!}A^{2k}b\frac{t^{k+1}}{(1-x)^{2k+1}},$$

$|t| < T$, $|x| < R$, где $R \in (0,1)$ и $T = (1-R)^2 R_{A^2,b}(\psi)$ (см. предложение 3.2).

Литература

1. E. Hille, *Ordinary differential equations in the complex domain.* — A Wiley-Interscience publication, New York, London, 1976.
2. Ж. Адамар, *Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.* Наука, М., 1978.
3. Р. Курант, *Уравнения с частными производными.* Мир, М., 1964.
4. И. Г. Петровский, *Лекции об уравнениях с частными производными.* Гостехиздат, М., 1953.
5. S. V. Kowalewsky, *Zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen.* — J. reine angew. Math. **80** (1875), 1–32.
6. C. Riquie, *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles.* Gauthier-Villars, Paris, 1910.
7. P. Rosenbloom, *The majorant method. Partial differential equations.* — in: Proc. of the Fourth Symposium in pure Mathematics, Providence, Amer. Math. Soc. (1961), pp. 51-72.
8. В. П. Паламодов, *Дифференциальные операторы в классе сходящихся степенных рядов и подготовительная лемма Вейерштрасса.* — Функц. анал. и его прил., **2**, Вып. 2 (1968), 58–69.
9. F. Treves, *An abstract nonlinear Cauchy–Kovalevska theorem.* — Trans. Amer. Math. Soc. **150** (1970), 77–92.
10. С. Мизохата, *О системах Ковалевской.* — Успехи мат. наук., **29** (1974), 216–227.
11. Л. Овсянников, *Абстрактная форма теоремы Коши–Ковалевской и ее приложения.* — Уравнения с частными производными. Новосибирск, Наука, Сиб. отдел. (1980), 88–94.
12. S. Ōuchi, *Characteristic Cauchy problems and solutions of formal power series.* — Ann. Inst. Fourier **33**, no.1 (1983), 131–176.

13. D. Lutz, M. Miyake, R. Schäfke, *On the Borel summability of divergent solutions of the heat equation.* — Nagoya Math. J. **154** (1999), 1–29.
14. W. Balser, *Divergent solutions of the heat equation: on an article of Lutz, Miyake and Schäfke.* — Pacific J. Math. **188**, no.1, (1999), 53–63.
15. М. Л. Горбачук, *О корректности задачи Коши для операторно-дифференциальных уравнений в классе аналитических вектор-функций.* — Докл. РАН **374**, no. 1 (2000), 7–9.
16. M. L. Gorbachuk, *An operator approach to the Cauchy–Kovalevskaya theorem.* — J. Math. Sci., New York, no. 5 (2000), 1527–1532.
17. С. П. Чулков, *О сходимости формальных решений систем дифференциальных уравнений в частных производных.* — Функц. анал. и его прил. **39**, вып. 3 (2005), 64–75.
18. А. Хованский, С. П. Чулков, *Полином Гильберта для системы линейных дифференциальных уравнений в частных производных с аналитическими коэффициентами.* — Известия РАН, сер. матем. **70** (2006), 163–182.
19. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы.* ИЛ, М., 1962.
20. Г. Грауэрт, Р. Реммерт, *Аналитические локальные алгебры.* Наука, М., 1988.
21. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* Наука, М., 1970.
22. С. Гефтер, В. Мокренюк, *Степенной ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n!z^n$ *и голоморфные решения некоторых дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.* — Журнал матем. физики, анал., геом. no. 1 (2005), 53–70.

Vershynina A., Gefter S. On analytic solutions of the heat equation with an operator coefficient.

Let A be a bounded linear operator on a Banach space and g a vector-valued function analytic on a neighborhood of the origin of $\mathbb{R}$. We obtain conditions for the existence of analytic solutions for the Cauchy problem $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\ u(0,x) = g(x). \end{cases}$ Moreover, we consider a representation of the solution of this problem as a Poisson integral and investigate the Cauchy problem for the corresponding nonhomogeneous equation.

Харьковский национальный
университет им. В. Н. Каразина
E-mail: gefter@univer.kharkov.ua

Поступило 2 июня 2008 г.

E-mail: avershynina@yahoo.com