Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 355, 2008 г.

В. И. Васюнин

ВЗАИМНЫЕ ОЦЕНКИ L^p-НОРМ И ФУНКЦИЯ БЕЛЛМАНА

Функции Беллмана позволяет единообразно и вполне элементарными средствами получать различные, как известные, так и новые неравенства с точными константами. В данной работе предпринята попытка продемонстрировать, как единым образом получаются и такие простые неравенства, как интерполяционное неравенство между двумя L^p-нормами, так и такие нетривиальные, как неравенство Геринга или обратное неравенство Гёльдера для макенхауптовских весов. Работа фактически не содержит новых идей, а представляет собой почти буквальное распространение техники, представленной в статье [1], на максимально широкую область параметров задачи. Подробную библиографию и историю поиска констант в различных вложениях классов Геринга и Макенхаупта можно найти в недавней работе [2]. С самим методом использования функции Беллмана в анализе можно познакомиться по обзорам [3, 5].

Начнём с самой общей формулировки задачи: пусть нам дана неотрицательная измеримая функция w, заданная на некотором интервале I вещественной оси, и известны средние каких-то её степеней, например, $\langle w^{p_1}\rangle_I$ и $\langle w^{p_2}\rangle_I$ (здесь и дальше во всей статье будем использовать обозначение $\langle f\rangle_I$ для среднего значения функции f на интервале I: $\langle f\rangle_I \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|I|}\int\limits_I f(t)\,dt$). Что тогда мы можем сказать о среднем $\langle w^q\rangle_I$ для различных значений параметра q? Какую дополнительную информацию даёт корреляция в поведении средних $\langle w^{p_1}\rangle_I$ и $\langle w^{p_2}\rangle_I$? Например, если $p_1 > p_2 > 1$, то мультипликативное условие

$$\langle w^{p_1}\rangle_I^{\frac{1}{p_1}}\langle w^{p_2}\rangle_I^{-\frac{1}{p_2}} \leqslant \delta \tag{0.1}$$

– это обратное неравенство Гёльдера, а если в этом же выражении положить $p_1 = 1$ и $p_2 = -\frac{1}{p-1}$ и рассматривать его для всех подинтервалов из области определения – это будет известное условие

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 05-01-00925 .

Макенхаупта (A_p). Можно накладывать и аддитивные ограничения, например, если условие $\langle w^2\rangle_I - \langle w\rangle_I^2 \leqslant C$ переписать в виде

$$\langle w^2\rangle_I - \langle w\rangle_I^2 = \frac{1}{|I|}\int\limits_I |w(t) - \langle w\rangle_I|^2\,dt \leqslant C, \tag{0.2}$$

то сразу ясно, что это – условие принадлежности функции w пространству BMO. Однако в данной работе мы ограничимся мультипликативными условиями вида (0.1).

Чтобы включить в рассмотрение предельные значения параметров $p = 0$ и $p = \pm\infty$, надо рассматривать пределы выражений $\langle w^p\rangle_I^{1/p}$, а не самих средних $\langle w^p\rangle_I$. Действительно, мы получаем следующие предельные выражения

$$\begin{aligned} \lim_{p\to+\infty}\langle w^p\rangle_I^{\frac{1}{p}} &= \sup_I w, \\ \lim_{p\to 0}\langle w^p\rangle_I^{\frac{1}{p}} &= e^{\langle \log w\rangle_I}, \\ \lim_{p\to-\infty}\langle w^p\rangle_I^{\frac{1}{p}} &= \inf_I w, \end{aligned}$$

и тогда, если в оценке (0.1) мы положим $p_2 = 1$, то при $p_1 = 0$ получаем условие Макенхаупта (A_∞) или интегральную форму неравенства Джона–Ниренберга для функции $\log w$, а при $p_1 = \infty$ получаем условие Макенхаупта (A_1). Чтобы, с одной стороны, в формулировки результатов единообразно включить и предельные значения показателя p, а, с другой, – не вводить лишних обозначений, сохраним обозначение $\langle w^p\rangle_I^{1/p}$ и за предельными значениями показателей, т.е. по определению будем считать, что

$$\langle w^p\rangle_I^{\frac{1}{p}} = \begin{cases} \inf\limits_I w & \text{при } \ p = -\infty; \\ e^{\langle \log w\rangle_I} & \text{при } \ p = 0; \\ \sup\limits_I w & \text{при } \ p = +\infty. \end{cases}$$

Замечание 1. Отметим, что $p \mapsto \langle w^p\rangle_I^{1/p}$ – монотонно возрастающая функция параметра p. Это – тривиальная оценка при $p = \pm\infty$, неравенство Йенсена при $p = 0$, и неравенство Гёльдера при всех прочих

p. Впрочем, эту монотонность нетрудно получить проверкой положительности производной, которая вытекает из неравенства

$$\left(\int\limits_I w(t)\,dt\right)\log\left(\int\limits_I w(t)\,dt\right)\leqslant\int\limits_I w(t)\log w(t)\,dt$$

– неравенства Йенсена для функции $t\mapsto t\log t$.

Как уже отмечалось, в этой работе мы будем рассматривать только мультипликативные ограничения на вес вида (0.1). Для любой пары показателей p_i, $-\infty\leqslant p_2<p_1\leqslant+\infty$, и произвольной константы δ, $1\leqslant\delta\leqslant+\infty$, будем говорить, что вес w, заданный на интервале J, удовлетворяет условию (A_{p_1,p_2}) с константой δ (писать $w\in A^\delta_{p_1,p_2}(J)$ и константу δ называть A_{p_1,p_2}-“нормой” функции w), если условие (0.1) справедливо для любого интервала I, $I\subset J$. Как уже отмечалось, условие $(A_{1,-1/(p-1)})$ – это классическое условие Макенхаупта (A_p) $\big((A_{1,-\infty})=(A_1)\big)$.

Каждому весу w и интервалу I будем сопоставлять точки $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $\xi_i=\langle w^{p_i}\rangle_I^{1/p_i}$. Если $w\in A^\delta_{p_1,p_2}(J)$, то точка ξ пробегает угловую подобласть Ξ_δ первого квадранта:

$$\Xi_\delta\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{\xi\colon\xi_i\geqslant0,\ \xi_2\leqslant\xi_1\leqslant\delta\xi_2\},$$

где мы зададим две функции $\mathbf{M}_{\max}(\xi)$ и $\mathbf{M}_{\min}(\xi)$, которые будут давать максимальное и минимальное значения интересующей нас величины:

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;p_1,p_2,q,\delta)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\sup_{w\in A^\delta_{p_1,p_2}(I)}\Big\{\langle w^q\rangle_I^{\frac1q}\colon\langle w^{p_1}\rangle_I^{\frac1{p_1}}=\xi_1,\ \langle w^{p_2}\rangle_I^{\frac1{p_2}}=\xi_2\Big\},\tag{0.3}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;p_1,p_2,q,\delta)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\inf_{w\in A^\delta_{p_1,p_2}(I)}\Big\{\langle w^q\rangle_I^{\frac1q}\colon\langle w^{p_1}\rangle_I^{\frac1{p_1}}=\xi_1,\ \langle w^{p_2}\rangle_I^{\frac1{p_2}}=\xi_2\Big\}.\tag{0.4}$$

Поскольку для любой точки ξ из Ξ_δ найдётся вес w, для которого $\langle w^{p_1}\rangle_I^{1/p_1}=\xi_1$ и $\langle w^{p_2}\rangle_I^{1/p_2}=\xi_2$ (такой вес, кстати, будет построен в доказательстве леммы 1), функции $\mathbf{M}$ корректно определены на всей области Ξ_δ (делая утверждения, относящиеся одновременно к обеим функциям $\mathbf{M}_{\max}$ и $\mathbf{M}_{\min}$, будем опускать индексы max и min).

Очевидно, что функции $\mathbf{M}$ не зависят от интервала I. Действительно, если у нас есть два интервала, скажем I_1 и I_2, то линейное отображение одного на другой даёт нам взаимно однозначное соответствие между классами $A^\delta_{p_1,p_2}(I_1)$ и $A^\delta_{p_1,p_2}(I_2)$, а все средние не меняются при такой замене переменной. Следовательно, супремум в (0.3) и инфимум в (0.4) не зависят от выбора интервала I. Несмотря на то, что функции $\mathbf{M}$ существенно зависят от параметров δ, p_i, q, последние будут иногда опускаться, когда ясно, что они фиксированы.

Чтобы сформулировать основной результат, нам понадобится ещё несколько обозначений. Для любой пары показателей p_i, подчинённых условию $-\infty < p_2 < p_1 < +\infty$, определим на промежутке $[0,1]$ две функции $u^\pm_{p_1,p_2}$, как функции, грубо говоря, обратные к отображению

$$t \mapsto (1-p_1t)^{\frac{1}{p_1}}(1-p_2t)^{-\frac{1}{p_2}}, \tag{0.5}$$

т.е. значения $u^\pm_{p_1,p_2}(t)$ – это два решения, положительное и отрицательное, уравнения $(1-p_1u)^{\frac{1}{p_1}}(1-p_2u)^{-\frac{1}{p_2}} = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Чтобы это определение было корректным, надо сделать некоторые уточнения, зависящие от значений параметров p_i. Если $0 < p_2 < p_1 < +\infty$, то функция (0.5) корректно задана на промежутке $(-\infty, 1/p_1]$, монотонно возрастает от 0 до 1, когда t пробегает от $-\infty$ до 0, и монотонно убывает от 1 до 0, когда t пробегает от 0 до $1/p_1$. Таким образом, при этих значениях параметров мы получаем корректно определённые функции: монотонно убывающую $u^+_{p_1,p_2}$, отображающую отрезок $[0,1]$ на $[0,1/p_1]$, и монотонно возрастающую $u^-_{p_1,p_2}$, отображающую отрезок $[0,1]$ на $[-\infty,0]$. Если $0 = p_2 < p_1 < +\infty$, то всё сказанное остаётся справедливым, если в формуле (0.5) выражение $(1-tp_2)^{-\frac{1}{p_2}}$ понимать как e^t. Если $-\infty < p_2 < 0 < p_1 < +\infty$, то функция (0.5) корректно задана на промежутке $[1/p_2, 1/p_1]$, монотонно возрастает от 0 до 1, когда t пробегает от $1/p_2$ до 0, и монотонно убывает от 1 до 0, когда t пробегает от 0 до $1/p_1$. Таким образом, при этих значениях параметров мы получаем корректно определённые функции: монотонно убывающую $u^+_{p_1,p_2}$, отображающую отрезок $[0,1]$ на $[0,1/p_1]$, монотонно возрастающую $u^-_{p_1,p_2}$, отображающую отрезок $[0,1]$ на $[1/p_2,0]$. Если $-\infty < p_2 < p_1 < 0$, то функция (0.5) корректно задана на промежутке $[1/p_2,+\infty)$, монотонно возрастает от 0 до 1, когда t пробегает от $1/p_2$ до 0, и монотонно убывает от 1 до 0, когда t пробегает от 0 до $+\infty$. Таким образом, при этих значениях параметров мы получаем корректно определённые функции: монотонно убывающую $u^+_{p_1,p_2}$, отображающую отрезок $[0,1]$ на $[0,+\infty]$, монотонно возрастающую $u^-_{p_1,p_2}$, отображающую отрезок $[0,1]$ на $[1/p_2,0]$. И, наконец, если $-\infty < p_2 < p_1 = 0$, то всё сказанное остаётся справедливым, если в формуле (0.5) выражение $(1-tp_1)^{\frac{1}{p_1}}$ понимать как e^{-t}.

Поскольку $\delta \geqslant 1$, для всех p_i, $-\infty < p_2 < p_1 < +\infty$, можно определить величины

$$s^\pm = s^\pm_{p_1,p_2}(\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u^\pm_{p_1,p_2}\Big(\frac{1}{\delta}\Big)$$

и

$$r^\pm = r^\pm_{p_1,p_2}(\xi;\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} u^\pm_{p_1,p_2}\Big(\frac{\xi_1}{\delta\xi_2}\Big).$$

Отметим, что когда переменная ξ пробегает область Ξ_δ, величина r^+ изменяется в промежутке $[0,s^+]$, а величина r^- – в промежутке $[s_-,0]$.

Сформулируем теперь основной результат статьи.

Теорема 1. *Пусть* $-\infty \leqslant p_2 < p_1 \leqslant +\infty$, $-\infty \leqslant q \leqslant +\infty$, $1 \leqslant \delta \leqslant +\infty$. *Тогда для любого* i ($i = 1$ *или* $i = 2$)

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi_1,\xi_2;p_1,p_2,q,\delta)$$
$$= \begin{cases} \begin{cases} \xi_i, & \xi_1 = \xi_2, \\ +\infty, & \xi_1 > \xi_2, \end{cases} & q \in \Big[\frac{1}{s^+},+\infty\Big], \\ \xi_i \Big(\frac{1-qr^+}{1-qs^+}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{1-p_is^+}{1-p_ir^+}\Big)^{\frac{1}{p_i}}, & q \in [-\infty,p_2] \cup \Big[p_1,\frac{1}{s^+}\Big), \\ \xi_i \Big(\frac{1-qr^-}{1-qs^-}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{1-p_is^-}{1-p_ir^-}\Big)^{\frac{1}{p_i}}, & q \in [p_2,p_1]; \end{cases} \tag{0.6}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi_1,\xi_2;p_1,p_2,q,\delta)$$
$$= \begin{cases} \xi_i \Big(\frac{1-qr^-}{1-qs^-}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{1-p_is^-}{1-p_ir^-}\Big)^{\frac{1}{p_i}}, & q \in \Big(\frac{1}{s^-},p_2\Big] \cup [p_1,+\infty], \\ \xi_i \Big(\frac{1-qr^+}{1-qs^+}\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\frac{1-p_is^+}{1-p_ir^+}\Big)^{\frac{1}{p_i}}, & q \in [p_2,p_1], \\ \begin{cases} \xi_i, & \xi_1 = \xi_2, \\ 0, & \xi_1 > \xi_2, \end{cases} & q \in \Big[-\infty,\frac{1}{s^-}\Big]. \end{cases} \tag{0.7}$$

Замечание 2. Строго говоря, функции, стоящие в правых частях равенств (0.6)–(0.7), не определены для предельных значений показателей $p_i = \pm\infty$, $p_i = 0$, $q = \pm\infty$, $q = 0$, $\delta = \infty$, но данные выражения имеют пределы, когда показатели стремятся к предельным, и мы по определению будем считать, что для предельных показателей в правой части стоят именно эти предельные выражения. Тут они не приведены, чтобы не загромождать формулировку, но все они подробно выписаны в Добавлении 4. Тривиально получаются предельные выражения, когда p_i или q равны нулю. Как уже отмечалось, в таком случае просто выражение $(1-pt)^{1/p}$ подлежит замене на e^{-t}. Сложнее обстоит дело с бесконечными показателями, поскольку функции $u^+_{+\infty,p_2}$ и $u^-_{p_1,-\infty}$ формально не определены, а поточечные пределы функций $u^+_{p_1,p_2}$ при $p_1 \to +\infty$ и $u^-_{p_1,p_2}$ при $p_2 \to -\infty$ тождественно равны нулю. В этой ситуации приходится считать асимптотическое поведение величин $s^\pm$ и $r^\pm$ и переходить к пределу сразу во всём выражении.

Замечание 3. Отметим, что (почти) не теряя общности, теорему 1 можно было бы доказывать только для показателей $p_1 = 1$ и $|p_2| \leqslant 1$. Действительно, если у нас есть оценка для $p_1 = 1$, $|p_2| \leqslant 1$, то, подставляя в неё $w = \omega^{1/p_2}$, мы получим оценки средних $\langle \omega^q \rangle$ для показателей $p_1 = 1$ и $|p_2| \geqslant 1$, т.е. так мы распространили оценку на тот случай, когда один показатель равен единице, а второй произволен. Далее, выбирая вес $w = \omega^{p_1}$, мы получим оценку для любой пары показателей p_1, p_2, кроме $p_i = 0$ и $p_i = \pm\infty$. Тем не менее такое ограничение на значение параметров p_i не приводит к упрощению доказательства, наоборот, мы теряем симметрию задачи, поэтому теорему 1 будем доказывать для произвольной пары p_1, p_2, для определённости полагая $p_2 < p_1$.

Замечание 4. Отметим симметрию формул (0.6)–(0.7) относительно параметров p_1, p_2. В этих формулах можно выбирать либо $i = 1$, либо $i = 2$, а результат останется тем же самым в силу тождества

$$\xi_2 \left(\frac{1-p_2 s}{1-p_2 r} \right)^{\frac{1}{p_2}} = \xi_1 \left(\frac{1-p_1 s}{1-p_1 r} \right)^{\frac{1}{p_1}}, \tag{0.8}$$

справедливого при любом выборе знаков $r = r^\pm$, $s = s^\pm$.

Замечание 5. Неравенства (0.6)–(0.7) для $p_1 = 1$, $p_2 < 0$ (что фактически означает для любых p_1 и p_2 противоположного знака) были доказаны в работе [1] в несколько других обозначениях. В данной статье результат будет получен точно таким же методом, и мы будем даже в основном следовать структуре работы [1]. Только теперь будут выбраны несколько более удобные обозначения, что удалось сделать благодаря отмеченной симметрии задачи.

Отмечу, что распространение результата работы [1] на случай произвольных показателей было независимо проделано в дипломной работе Олега Шлепакова [4], где, однако, были исключены из рассмотрения предельные значения показателей.

Предельные показатели суммируемости $1/s^{\pm}$ были найдены в работе [2], причём в формально более общем многомерном случае и при усреднении по произвольной абсолютно непрерывной мере. Однако в одномерной ситуации случай произвольной абсолютно непрерывной меры сводится к мере Лебега заменой переменных, и в задаче с весом ответ точно такой же, как и в задаче без веса. Если же рассматриваются функции, заданные в многомерной области, а A_{p_1,p_2}-"норма" вычисляется по параллепипедам, то функция Беллмана (определение которой будет дано ниже) в такой многомерной постановке просто совпадает с одномерной, и никакого реального обобщения скалярного случая тоже не происходит. Задача не сводится к одномерной, если считать норму традиционно по кубам. В этом случае не будет работать лемма 4 (см. ниже доказательство теоремы), и для доказательства многомерного утверждения нужно искать её аналог или заменяющую её конструкцию.

Упомянутые более удобные обозначения (переменные ξ_i и функция $\mathbf{M}$) относятся скорее к формулировке результата, а не к его доказательству. Доказательство теоремы 1 будет проведено не для функции $\mathbf{M}$, а для тесно с ней связанной функции $\mathbf{B}$ – функции Беллмана, которую мы сейчас и определим. Причину этого я постараюсь объяснить по ходу доказательства.

Сперва мы будем рассматривать общий случай, когда все показатели степеней конечны и отличны от нуля, а потом покажем, какие изменения необходимы при рассмотрении предельных показателей. В общем случае вместо ξ_i мы будем пользоваться переменными $x_i = \xi_i^{p_i} = \langle w^{p_i} \rangle_I$. Для бесконечных показателей будем считать $x_i = \xi_i$, а если $p_i = 0$, то $x_i = \langle \log p_i \rangle_I$. Точка $x = (x_1, x_2)$ пробегает область $\Omega_\delta = \Omega_\delta(p_1, p_2)$, которая выглядит совершенно по-разному при разных значениях p_i:

$$\Omega_\delta(p_1,p_2) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \begin{cases} \{x\colon x_i \geqslant 0,\ x_2^{1/p_2} \leqslant x_1^{1/p_1} \leqslant \delta x_2^{1/p_2}\}, & p_1,p_2 \neq \pm\infty,\ p_1,p_2 \neq 0, \\ \{x\colon x_i \geqslant 0,\ x_2 \leqslant x_1 \leqslant \delta x_2\}, & p_1 = +\infty,\ p_2 = -\infty, \\ \{x\colon x_i \geqslant 0,\ x_2^{1/p_2} \leqslant x_1 \leqslant \delta x_2^{1/p_2}\}, & p_1 = +\infty,\ p_2 \neq -\infty,\ p_2 \neq 0, \\ \{x\colon x_1 \geqslant 0,\ e^{x_2} \leqslant x_1 \leqslant \delta e^{x_2}\}, & p_1 = +\infty,\ p_2 = 0, \\ \{x\colon x_2 \geqslant 0,\ x_2 \leqslant e^{x_1} \leqslant \delta x_2\}, & p_1 = 0,\ p_2 = -\infty, \\ \{x\colon x_2 \geqslant 0,\ x_2^{1/p_2} \leqslant e^{x_1} \leqslant \delta x_2^{1/p_2}\}, & p_1 = 0,\ -\infty < p_2 < 0, \\ \{x\colon x_1 \geqslant 0,\ e^{x_2} \leqslant x_1^{1/p_1} \leqslant \delta e^{x_2}\}, & p_1 \neq 0,\ p_1 \neq +\infty,\ p_2 = 0, \\ \{x\colon x_i \geqslant 0,\ x_2 \leqslant x_1^{1/p_1} \leqslant \delta x_2\}, & p_1 \neq 0,\ p_1 \neq +\infty,\ p_2 = -\infty, \end{cases}$$

На области Ω_δ мы зададим две функции $\mathbf{B}_{\max}(x)$ и $\mathbf{B}_{\min}(x)$, которые называются функциями Беллмана соответствующей экстремальной задачи. В случае, когда все параметры p_i, q отличны от нуля и бесконечности, эти функции задаются формулами

$$\mathbf{B}_{\max}(x;p_1,p_2,q,\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{w\in A^\delta_{p_1,p_2}(I)} \Big\{ \langle w^q\rangle_I \colon \langle w^{p_1}\rangle_I = x_1, \langle w^{p_2}\rangle_I = x_2 \Big\}, \tag{0.9}$$

$$\mathbf{B}_{\min}(x;p_1,p_2,q,\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf_{w\in A^\delta_{p_1,p_2}(I)} \Big\{ \langle w^q\rangle_I \colon \langle w^{p_1}\rangle_I = x_1, \langle w^{p_2}\rangle_I = x_2 \Big\}. \tag{0.10}$$

Если какой-то параметр равен нулю, то вместо среднего степени берётся среднее логарифма, если параметр равен $+\infty$ – берётся супремум, а если $-\infty$ – инфимум веса w. Так, например,

$$\mathbf{B}_{\max}(x;0,-\infty,+\infty,\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_{w\in A^\delta_{0,-\infty}(I)} \Big\{ \sup_I w \colon \langle \log w\rangle_I = x_1, \inf_I w = x_2 \Big\},$$

$$\mathbf{B}_{\min}(x;+\infty,p,0,\delta) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \inf_{w\in A^\delta_{+\infty,p}(I)} \Big\{ \langle \log w\rangle_I \colon \sup_I w = x_1, \langle w^p\rangle_I = x_2 \Big\}.$$

С функциями $\mathbf{M}$ они связаны очевидным образом:

$$\mathbf{B}_{\max}(x) = \begin{cases} \mathbf{M}_{\max}(\xi), & \text{если} \ \ q = +\infty, \\ \mathbf{M}^q_{\max}(\xi), & \text{если} \ \ q > 0, \\ \log \mathbf{M}_{\max}(\xi), & \text{если} \ \ q = 0, \\ \mathbf{M}^q_{\min}(\xi), & \text{если} \ \ q < 0, \\ \mathbf{M}_{\max}(\xi), & \text{если} \ \ q = -\infty, \end{cases}$$
$$\mathbf{B}_{\min}(x) = \begin{cases} \mathbf{M}_{\min}(\xi), & \text{если} \ \ q = +\infty, \\ \mathbf{M}^q_{\min}(\xi), & \text{если} \ \ q > 0, \\ \log \mathbf{M}_{\min}(\xi), & \text{если} \ \ q = 0, \\ \mathbf{M}^q_{\max}(\xi), & \text{если} \ \ q < 0, \\ \mathbf{M}_{\min}(\xi), & \text{если} \ \ q = -\infty, \end{cases} \tag{0.11}$$

причём переменные x и ξ связаны теми же соотношениями:

$$x_i = \begin{cases} \xi_i, & \text{если} \ \ p_i = +\infty, \\ \xi_i^{p_i}, & \text{если} \ \ p_i > 0, \\ \log(\xi_i), & \text{если} \ \ p_i = 0, \\ \xi_i^{p_i}, & \text{если} \ \ p_i < 0, \\ \xi_i, & \text{если} \ \ p_i = -\infty. \end{cases}$$

Границу $x_1^{1/p_1} = x_2^{1/p_2}$ области Ω_δ будем условно называть нижней или тривиальной, а, соответственно, границу $x_1^{1/p_1} = \delta x_2^{1/p_2}$ – верхней или нетривиальной. Точкам тривиальной границы отвечают лишь постоянные пробные функции, поэтому мы знаем граничные значения функции Беллмана на этой границе:

$$\mathbf{B}_{\max}(x) = \mathbf{B}_{\min}(x) = x_i^{\frac{q}{p_i}},$$

или

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi) = \mathbf{M}_{\min}(\xi) = \xi_i$$

на границе $\xi_1 = \xi_2$.

Переформулируем теперь теорему 1 для непредельных значений показателей в терминах функции Беллмана.

Теорема 2. *Пусть* $-\infty < p_2 < p_1 < +\infty$, $-\infty < q < +\infty$, $p_i, q \neq 0$, $1 \leqslant \delta < +\infty$. *Если* $q \in (-\infty, \frac{1}{s^-}] \cup [\frac{1}{s^+}, +\infty)$, *то*

$$\mathbf{B}_{\max}(x_1, x_2; p_1, p_2, q, \delta) = \begin{cases} x_i^{\frac{q}{p_i}}, & x_1^{p_2} = x_2^{p_1}, \\ +\infty, & x_1^{p_2} \neq x_2^{p_1}. \end{cases}$$

Во всех прочих случаях и

$$\mathbf{B}_{\max}(x_1, x_2; p_1, p_2, q, \delta) \quad \textit{и} \quad \mathbf{B}_{\min}(x_1, x_2; p_1, p_2, q, \delta)$$

имеют вид

$$x_i^{\frac{q}{p_i}} \frac{1 - qr}{1 - qs} \left(\frac{1 - p_i s}{1 - p_i r} \right)^{\frac{q}{p_i}},$$

где i *– любое* ($i = 1$ *или* $i = 2$), *а знак у параметра* s *и переменной* r *выбирается следующим образом:*

если $0 < p_2 < p_1$, *то*

$$s = s^+, \quad r = r^+ \begin{cases} \textit{для } \mathbf{B}_{\max}, & \textit{если } q \in (0, p_2] \cup [p_1, \dfrac{1}{s^+}), \\ \textit{для } \mathbf{B}_{\min}, & \textit{если } q \in (-\infty, 0) \cup [p_2, p_1], \end{cases}$$

$$s = s^-, \quad r = r^- \begin{cases} \textit{для } \mathbf{B}_{\max}, & \textit{если } q \in (\dfrac{1}{s^-}, 0) \cup [p_2, p_1], \\ \textit{для } \mathbf{B}_{\min}, & \textit{если } q \in (0, p_2] \cup [p_1, +\infty); \end{cases}$$

если $p_2 < 0 < p_1$, *то*

$$s = s^+, \quad r = r^+ \begin{cases} \textit{для } \mathbf{B}_{\max}, & \textit{если } q \in [p_2, 0) \cup [p_1, \dfrac{1}{s^+}), \\ \textit{для } \mathbf{B}_{\min}, & \textit{если } q \in (-\infty, p_2] \cup (0, p_1], \end{cases}$$

$$s = s^-, \quad r = r^- \begin{cases} \textit{для } \mathbf{B}_{\max}, & \textit{если } q \in (\dfrac{1}{s^-}, p_2] \cup (0, p_1], \\ \textit{для } \mathbf{B}_{\min}, & \textit{если } q \in [p_2, 0) \cup [p_1, +\infty); \end{cases}$$

если $p_2 < p_1 < 0$, *то*

$$s = s^+, \quad r = r^+ \begin{cases} \textit{для } \mathbf{B}_{\max}, & \textit{если } q \in [p_2, p_1] \cup (0, \dfrac{1}{s^+}), \\ \textit{для } \mathbf{B}_{\min}, & \textit{если } q \in (-\infty, p_2] \cup [p_1, 0), \end{cases}$$

$$s = s^-, \quad r = r^- \begin{cases} \textit{для } \mathbf{B}_{\max}, & \textit{если } q \in (\dfrac{1}{s^-}, p_2] \cup [p_1 0), \\ \textit{для } \mathbf{B}_{\min}, & \textit{если } q \in [p_2, p_1] \cup (0, +\infty). \end{cases}$$

Замечание 6. Как мы видим, формулировка теоремы 2 получается более громоздкой из-за того, что при изменении знака q у функции Беллмана меняется соответствующая функция $\mathbf{M}$ с максимальной на минимальную и наоборот. Тем не менее для доказательства оценок будут использоваться именно функции Беллмана и переменные, приведённые выше в теореме 2. Дело в том, как ведут себя эти величины при дроблении интервала, на котором задан вес w, а именно процесс дробления лежит в основе доказательства. Если мы разбиваем интервал I на две части $I^{\pm}$, $I = I^+ \cup I^-$, с относительными длинами $\alpha^{\pm} = |I^{\pm}|/|I|$, $\alpha^+ + \alpha^- = 1$, то для любого веса w точка $x = (x_1, x_2) = (\langle w^{p_1}\rangle_I, \langle w^{p_1}\rangle_I)$ является выпуклой комбинацией точек $x^{\pm} = (x_1^{\pm}, x_2^{\pm}) = (\langle w^{p_1}\rangle_{I^{\pm}}, \langle w^{p_1}\rangle_{I^{\pm}})$ с коэффициентами $\alpha^{\pm}$: $x = \alpha^+ x^+ + \alpha^- x^-$.

По описанной причине, если один из показатели p_i равен нулю, в качестве соответствующей координаты мы будем брать среднее логарифма: $x_i = \langle \log w\rangle_I$.

Чтобы иметь возможность ссылаться на выражения, стоящие в правых частях формул (0.6)–(0.7), будем обозначать эти функции символами $M_{\max}(\xi_1, \xi_2; p_1, p_2, q, \delta)$ и $M_{\min}(\xi_1, \xi_2; p_1, p_2, q, \delta)$, т.е.

$$
M_{\max}(\xi_1, \xi_2; p_1, p_2, q, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \begin{cases} \xi_1, & \xi_1 = \xi_2, \\ +\infty, & \xi_1 > \xi_2, \end{cases} & q \in \Big[\dfrac{1}{s^+}, +\infty\Big], \\ \xi_1 \left(\dfrac{1 - qr^+}{1 - qs^+}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\dfrac{1 - p_1 s^+}{1 - p_1 r^+}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & q \in [-\infty, p_2] \cup \Big[p_1, \dfrac{1}{s^+}\Big), \\ \xi_1 \left(\dfrac{1 - qr^-}{1 - qs^-}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\dfrac{1 - p_1 s^-}{1 - p_1 r^-}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & q \in [p_2, p_1]; \end{cases}
$$

$$
M_{\min}(\xi_1, \xi_2; p_1, p_2, q, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \xi_1 \left(\dfrac{1 - qr^-}{1 - qs^-}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\dfrac{1 - p_1 s^-}{1 - p_1 r^-}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & q \in \Big(\dfrac{1}{s^-}, p_2\Big] \cup [p_1, +\infty), \\ \xi_1 \left(\dfrac{1 - qr^+}{1 - qs^+}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\dfrac{1 - p_1 s^+}{1 - p_1 r^+}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & q \in [p_2, p_1], \\ \begin{cases} \xi_1, & \xi_1 = \xi_2, \\ 0, & \xi_1 > \xi_2, \end{cases} & q \in \Big[-\infty, \dfrac{1}{s^-}\Big]. \end{cases}
$$

Выражения для функций $M_{\max}$ и $M_{\min}$ при предельных значенях параметров p_i, q и δ, при которых приведённые выше выражения формально не определены, являются пределами этих функций и формально выписаны в добавлении 4 (как правые части формул (4.1)–(4.42)).

Равенства $\mathbf{M}_{\max} = M_{\max}$ и $\mathbf{M}_{\min} = M_{\min}$ будут получены как следствия неравенств "$\leqslant$" и "$\geqslant$". Начнём с проверки более простой пары оценок.

Лемма 1. *Неравенства*

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \delta) &\geqslant M_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \delta),\\ \mathbf{M}_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, \delta) &\leqslant M_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, \delta)\end{aligned}$$

выполняются при всех ξ, для которых $\xi_2 \leqslant \xi_1 \leqslant \delta\xi_2$, и при всех $q \in [-\infty, +\infty]$, $-\infty \leqslant p_2 < p_1 \leqslant \infty$.

Эти неравенства будут доказаны прямым предъявлением экстремальной функции (как её найти, будет объяснено в Добавлении 2). Противоположные неравенства не удаётся проверить непосредственно, будет использована аппроксимационная процедура. А именно, будет доказана следующая лемма.

Лемма 2. *Неравенства*

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \delta) &\leqslant M_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \varepsilon),\\ \mathbf{M}_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, \delta) &\geqslant M_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, \varepsilon)\end{aligned}$$

выполняются при всех ξ, для которых $\xi_2 \leqslant \xi_1 \leqslant \delta\xi_2$, и при всех $q \in [-\infty, +\infty]$, $-\infty \leqslant p_2 < p_1 \leqslant \infty$ и при любых $\varepsilon > \delta$.

После доказательства леммы 2 результат теоремы 1 получается простым предельным переходом $\varepsilon \to \delta$. Этот предельный переход возможен, поскольку функция $M_{\min}(\xi; p_1, p_2, \delta)$ непрерывна по переменной δ, а функция $M_{\max}(\xi; p_1, p_2, \delta)$ непрерывна справа (она монотонно возрастает по δ и единственной точкой разрыва является точка, в которой она обращается в бесконечность, поэтому, если угодно, можно сослаться на то, что функция $M_{\max}^{-1}(\xi; p_1, p_2, \delta)$ непрерывна).

Лемму 2 мы будем доказывать не в терминах функций $\mathbf{M}$, а в терминах функций $\mathbf{B}$, связанных с первыми формулой (0.11). Доказательство леммы 2 начнём с проверки знакоопределённости второго дифференциала функций $\mathbf{B}$, то есть докажем, что одна из них является локально выпуклой, а другая – локально вогнутой. Функцию B, заданную в области Ω, будем называть локально выпуклой (или вогнутой), если для любой пары точек $x^\pm$ из Ω, для которых весь отрезок $[x^-, x^+]$, соединяющий эти две точки, лежит в Ω, и для любой пары неотрицательных чисел $\alpha^\pm$, таких что $\alpha^- + \alpha^+ = 1$, выполняется неравенство

$$B(\alpha^- x^- + \alpha^+ x^+) \leqslant \alpha^- B(x^-) + \alpha^+ B(x^+) \tag{0.12}$$

или, соответственно,

$$B(\alpha^- x^- + \alpha^+ x^+) \geqslant \alpha^- B(x^-) + \alpha^+ B(x^+). \tag{0.13}$$

Другими словами, функция B является локально вогнутой (выпуклой) в области Ω, если матрица вторых производных

$$\left\{\frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial x_j}\right\}$$

неположительна (неотрицательна) всюду в Ω.

Лемма 3. *Для всех конечных значений параметров p_i, q функция $B_{\max}$ является локально вогнутой в $\Omega_\delta(p_1, p_2)$, а функция $B_{\min}$ – локально выпуклой.*

Для бесконечных значений параметров в неравенствах (0.12) *и* (0.13) *нужно произвести следующие изменения: если $p_i = +\infty$ $(-\infty)$, то i-ю координату точки $\alpha^- x^- + \alpha^+ x^+$ надо заменить на $\max\{x_i^+, x_i^-\}$ (соответственно $\min\{x_i^+, x_i^-\}$). Если $q = +\infty$, то правые части этих неравенств следует заменить на $\max\{B(x_i^+), B(x_i^-)\}$, и на $\min\{B(x_i^+), B(x_i^-)\}$ при $q = -\infty$.*

В доказательстве леммы 2 у нас возникнет следующая ситуация: для заданного веса $w \in A^\delta_{p_1,p_2}(J)$, мы будем разбивать произвольный интервал I, $I \subset J$, на две части $I = I^- \cup I^+$, получая тем самым две точки из Ω_δ, $x^\pm = (\langle w^{p_1}\rangle_{I^\pm}, \langle w^{p_2}\rangle_{I^\pm})$, к которым мы захотим применить лемму 3. Для этого нам необходимо, чтобы весь промежуток $[x^-, x^+]$ лежал внутри Ω_δ, но, вообще говоря, это не всегда возможно. Тогда мы несколько расширим область и попытаемся разбить интервал I таким образом, чтобы промежуток $[x^-, x^+]$ помещался в область Ω_ε, $\varepsilon > \delta$. Существование такого разбиения обеспечивается следующей леммой.

Лемма 4. *Фиксируем числа δ и ε, такие что $\varepsilon > \delta > 1$. Тогда для произвольного веса w, $w \in A^{\delta}_{p_1,p_2}(I)$, существует разбиение $I = I^- \cup I^+$, $|I^\pm| = \alpha^\pm|I|$, для которого промежуток $[x^-, x^+]$ с концами в точках $x^\pm = (\langle w^{p_1}\rangle_{I^\pm}, \langle w^{p_2}\rangle_{I^\pm})$ целиком лежит в Ω_ε. Более того, параметры разбиения $\alpha^\pm$ могут быть выбраны отделёнными от 0 и 1 равномерно по w и, следовательно, равномерно также и по I.*

Теперь приступим к реализации намеченной программы.

Доказательство леммы 1. Поскольку равенство $\xi_2 = \xi_1$ имеет место тогда и только тогда, когда $w = \xi_1 = \mathrm{const}$, ясно, что $\mathbf{M}(\xi_1, \xi_1; p_1, p_2, q, \delta) = M(\xi_1, \xi_1; p_1, p_2, q, \delta) = \xi_1$ при всех $\xi_1 > 0$, q, p_1, $p_2 \in [-\infty, +\infty]$. Итак, нам нужно рассматривать $\delta > 1$ и точки ξ, подчиненные условию $\xi_1 > \xi_2$.

Фиксируем произвольную точку ξ, для которой $\xi_1 > \xi_2$. Пусть $a \in (0,1]$ и $J = [0,1]$. Положим

$$w_{c,a,\nu}(t) = \begin{cases} ca^\nu t^{-\nu} & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \\ c & \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Непосредственным вычислением проверяем, что

$$\langle w^\theta_{c,a,\nu}\rangle_J = \begin{cases} c^\theta \dfrac{1-(1-a)\theta\nu}{1-\theta\nu}, & \text{если} \quad \theta\nu < 1, \\ \infty, & \text{если} \quad \theta\nu \geqslant 1. \end{cases} \tag{0.14}$$

Рассмотрим сперва случай $-\infty < p_2 < p_1 < +\infty$. Тогда корректно определены величины $s^\pm$ и $r^\pm$. Напомню, что

$$s^\pm = u^\pm_{p_1,p_2}\Big(\frac{1}{\delta}\Big), \text{ то есть } (1-p_1 s)^{1/p_1}(1-p_2 s)^{-1/p_2} = \frac{1}{\delta},$$

и

$$r^\pm = u^\pm_{p_1,p_2}\Big(\frac{\xi_1}{\delta\xi_2}\Big), \text{ то есть } (1-p_1 r)^{1/p_1}(1-p_2 r)^{-1/p_2} = \frac{\xi_1}{\delta\xi_2}.$$

Чтобы получить экстремальную функцию для $\mathbf{M}$, возьмем

$$\nu = s, \quad a = 1 - \frac{r}{s}, \quad c = \xi_1 \left(\frac{1-p_1 s}{1-p_1 r}\right)^{\frac{1}{p_1}} \tag{0.15}$$

с подходящим выбором знаков для s и r, а именно, в соответствии с формулами (0.6)–(0.7):

$$s = s^+, \quad r = r^+ \quad \begin{cases} \text{для } \mathbf{M}_{\max}, & \text{если } q \in [-\infty, p_2] \cup [p_1, +\infty], \\ \text{для } \mathbf{M}_{\min}, & \text{если } q \in [p_2, p_1], \end{cases}$$
$$s = s^-, \quad r = r^- \quad \begin{cases} \text{для } \mathbf{M}_{\min}, & \text{если } q \in [-\infty, p_2] \cup [p_1, +\infty), \\ \text{для } \mathbf{M}_{\max}, & \text{если } q \in [p_2, p_1]. \end{cases}$$

Поскольку мы предположили, что выполняется условие $\delta > 1$, мы можем быть уверены, что $s^{\pm} \neq 0$, и величина a корректно определена. Более того, $a \in (0,1]$. Действительно, с одной стороны $\frac{r}{s} < 1$ (поскольку мы предположили, что $\xi_1 > \xi_2$, а следовательно, $|r^{\pm}| < |s^{\pm}|$), т.е. $a = \frac{s-r}{s} > 0$. С другой стороны $1 - a = \frac{r}{s} \geqslant 0$, т.е. $a \leqslant 1$. Что касается параметра ν, легко видеть, что $\nu = s$ обеспечивает конечность A_{p_1,p_2}-"нормы" веса w: $sp_i < 1$, т.е. $\frac{1}{s_-} < p_i < \frac{1}{s_+}$.

В Добавлении 3 вычислена A_{p_1,p_2}-"норма" функции $w_{c,a,\nu}$, она оказалась равной $(1 - p_1\nu)^{1/p_1}(1 - p_2\nu)^{-1/p_2}$. Если сюда подставить выбранное значение параметра ν, мы получим как раз число δ, т.е. $w_{c,a,\nu} \in A^{\delta}_{p_1,p_2}(J)$.

Используя формулу (0.14), проверим теперь, что вес $w_{c,a,\nu}$ представляет точку $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ в Ξ_δ. Во-первых,

$$\langle w^{\theta}_{c,a,\nu} \rangle_J = c^{\theta} \frac{1 - (r/s)\theta s}{1 - \theta s} = \xi_1^{\theta} \left(\frac{1 - p_1 s}{1 - p_1 r} \right)^{\frac{\theta}{p_1}} \frac{1 - \theta r}{1 - \theta s},$$

а согласно тождеству (0.8) равенство

$$\langle w^{\theta}_{c,a,\nu} \rangle_J^{\frac{1}{\theta}} = \xi_i \left(\frac{1 - p_i s}{1 - p_i r} \right)^{\frac{1}{p_i}} \left(\frac{1 - \theta r}{1 - \theta s} \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

справедливо при любом значении индекса $i = 1, 2$. Подставляя, $\theta = p_i$, получаем требуемые значения координат $\langle w^{p_i} \rangle = \xi_i$. И, наконец, при $\theta = q$

$$\langle w^{q}_{c,a,\nu} \rangle_J^{\frac{1}{q}} = \begin{cases} \xi_i \left(\frac{1 - p_i s}{1 - p_i r} \right)^{\frac{1}{p_i}} \left(\frac{1 - q r}{1 - q s} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{если} \quad qs < 1, \\ \infty, & \text{если} \quad s = s^+ \text{ и } q \geqslant \frac{1}{s^+}, \\ 0, & \text{если} \quad s = s^- \text{ и } q \leqslant \frac{1}{s^-} \end{cases}$$
$$= M(\xi_1, \xi_2, p_1, p_2, q, \delta)$$

для всех показателей $-\infty \leqslant q \leqslant \infty$.

Приведённые рассуждения завершают доказательство леммы 1 при любых значениях параметра q и для любых конечных значений параметров p_i. Напомню, что для предельных значений параметров следует пользоваться формальным соглашением, сделанным в начале статьи: при $p = 0$ выражение $(1-pt)^{1/p}$ читать как e^{-t}, а выражение $\langle w^p\rangle^{1/p}$ – как $e^{\langle \log w\rangle}$. Под выражением $\langle w^p\rangle^{1/p}$ мы условились понимать $\sup w$ при $p = +\infty$, и, соответственно, $\inf w$ при $p = -\infty$. Тем не менее, полезно проверить отдельно формулы для предельных значений показателей $q = \pm\infty$ непосредственно по определению. Например, при $q = -\infty$, выбирая $s = s^+$, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\max}(\xi; p_1, p_2, -\infty, \delta) \geqslant \inf_{t\in J} w_{c,a,s^+}(t) = c = \xi_1 \left(\frac{1-p_1 s^+}{1-p_1 r^+}\right)^{\frac{1}{p_1}}\\ = M_{\max}(\xi; p_1, p_2, -\infty, \delta),\end{aligned}$$

а при $s = s^-$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi; p_1, p_2, -\infty, \delta) \leqslant \inf_{t\in J} w_{c,a,s^-}(t) = 0 = M_{\min}(\xi; p_1, p_2, -\infty, \delta),$$

что соответствует формулам (4.1)–(4.2). Аналогично при $q = +\infty$ вычисляем супремум вместо инфимума и получаем неравенства в формулах (4.5)–(4.6).

Не так просто обстоит дело в том случае, когда хотя бы один из параметров p_i принимает бесконечное значение. В этом случае мы должны проверить, что функции $w_{c,a,\nu}$ для подходящих значений параметров являются экстремальными и доказывают соответствующие неравенства в соотношениях (4.7)–(4.8) и (4.11)–(4.12). В качестве примера рассмотрим случай $p_1 = +\infty$ т.е. формулы (4.7)–(4.8). Формальная сложность предельного перехода, как уже отмечалось во введении, состоит в том, что функция $u^+_{+\infty,p_2}$ не определена, а поточечные пределы значений функции $u^+_{p_1,p_2}$ при $p_1 \to +\infty$ тождественно равны нулю. А по существу различие состоит в том, что один экстремум достигается (тот, который отвечает существующему предельному значению $u^-_{+\infty,p_2}(t) = (1-t^{-p_2})/p_2$), а второй экстремум не достигается, и нам нужно строить экстремальную последовательность.

В первом случае мы возьмём функцию $w_{c,a,\nu}$ с параметрами

$$\nu = -\frac{\delta^{p_2}-1}{p_2}, \quad a = \frac{\delta^{p_2}\left[1-\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{p_2}\right]}{\delta^{p_2}-1}, \quad c = \xi_1,$$

что отвечает предельным значениям в формуле (0.15) при выборе знака "$-$". Как показано в Добавлении 3, A_{∞,p_2}-"норма" функции $w_{c,a,\nu}$ равна $(1-p_2\nu)^{1/p_2}$, что в нашем случае, как и раньше, даёт δ. Отметим, что $\nu = s^- = -(\delta^{p_2}-1)/p_2 < 0$, поэтому функция w^q не суммируема при $q \leqslant 1/s^- = p_2/(1-\delta^{p_2})$, и, следовательно, при этих значениях q мы имеем оценку

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;+\infty,p_2,q,\delta) \leqslant \langle w^q_{c,a,\nu}\rangle^{\frac{1}{q}}_{[0,1]} = 0 = M_{\min}(\xi;+\infty,p_2,q,\delta).$$

При прочих q вес w^q суммируем, и, согласно формуле (0.14),

$$\langle w^q_{c,a,\nu}\rangle^{\frac{1}{q}}_{[0,1]} = \xi_1\left(\frac{\dfrac{p_2}{q}+\left(\dfrac{\xi_2\delta}{\xi_1}\right)^{p_2}-1}{\dfrac{p_2}{q}+\delta^{p_2}-1}\right)^{\frac{1}{q}},$$

что даёт

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;+\infty,p_2,q,\delta) \leqslant M_{\min}(\xi;+\infty,p_2,q,\delta) \quad \text{при} \quad q<p_2$$

и

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;+\infty,p_2,q,\delta) \geqslant M_{\max}(\xi;+\infty,p_2,q,\delta) \quad \text{при} \quad q>p_2.$$

Ясно, что для $q \neq p_2$ тождество $\langle w^q\rangle^{1/q} = \xi_2$ выполняется лишь для точек, лежащих на "тривиальной" границе области, то есть при $\xi_1 = \xi_2$. То есть экстремум не достигается для точек, лежащих внутри области и на "нетривиальной" границе $\xi_1 = \delta\xi_2$, и для них нам нужно строить экстремальную последовательность. Для этого, используя только что построенную функцию w, рассмотрим семейство функций $\{\,w_\lambda\}_{0<\lambda<1}$:

$$w_\lambda(t) = \begin{cases} \langle w^{p_2}\rangle^{\frac{1}{p_2}}_{(0,\lambda)}, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant \lambda, \\ w(t), & \text{если } \lambda < t \leqslant 1. \end{cases}$$

Для произвольного неубывающего веса w на промежутке $[0,1]$ зададим на том же промежутке функцию φ_w:

$$\varphi_w(\beta) = w(\beta)\cdot\langle w^p\rangle^{-\frac{1}{p}}_{(0,\beta)}$$

и проверим, что $A_{+\infty,p}$-"норма" веса w равна супремуму функции φ_w. По определению $A_{+\infty,p}$-"норма" веса w – это

$$\sup_{0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1}\left\{\sup_{(\alpha,\beta)} w\cdot\langle w^p\rangle_{(\alpha,\beta)}^{-\frac{1}{p}}\right\}.$$

Так как вес w не убывает ($\nu<0\,!$), то $\sup_{(\alpha,\beta)} w = w(\beta)$ и выражение $\langle w^p\rangle_{(\alpha,\beta)}^{-\frac{1}{p}}$ является невозрастающей функцией параметра α при любых значениях p (в частности, и при $p=0$, когда выражение $\langle w^p\rangle^{-\frac{1}{p}}$ должно быть заменено на $e^{-\langle\log w\rangle}$). Поэтому

$$\sup_{0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1}\left\{\sup_{(\alpha,\beta)} w\cdot\langle w^p\rangle_{(\alpha,\beta)}^{-\frac{1}{p}}\right\} = \sup_{0\leqslant\alpha<\beta\leqslant 1}\left\{w(\beta)\cdot\langle w^p\rangle_{(\alpha,\beta)}^{-\frac{1}{p}}\right\}$$

$$= \sup_{0\leqslant\beta\leqslant 1}\left\{w(\beta)\cdot\langle w^p\rangle_{(0,\beta)}^{-\frac{1}{p}}\right\} = \sup_{0\leqslant\beta\leqslant 1}\varphi_w(\beta).$$

Поскольку

$$\varphi_{w_\lambda}(\beta) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0\leqslant\beta\leqslant\lambda,\\ \varphi_w(\beta), & \text{если } \lambda<\beta\leqslant 1,\end{cases}$$

$A_{+\infty,p_2}$-"норма" веса w_λ не превосходит $A_{+\infty,p_2}$-"норму" веса w, то есть $w_\lambda\in A^\delta_{+\infty,p_2}$. Кроме того очевидно, что все веса w_λ представляют ту же самую точку (ξ_1,ξ_2):

$$\sup_{[0,1]} w_\lambda = \sup_{[0,1]} w = \xi_1,\quad \sup_I\langle w_\lambda^{p_2}\rangle_I^{\frac{1}{p_2}} = \sup_I\langle w^{p_2}\rangle_I^{\frac{1}{p_2}} = \xi_2.$$

И наконец, при $\lambda\to 1$ функции w_λ поточечно сходятся к постоянной функции $w_1(t)=\xi_2$, оставаясь при этом ограниченными сверху константой ξ_1. Следовательно, можно перейти к пределу под знаком интеграла и получить $\langle w_\lambda^q\rangle_{[0,1]}\to\xi_2^q$, т.е. $\{w_\lambda\}$ является искомым экстремальным семейством.

Точно так же можно разобрать другой предельный случай $p_2=-\infty$. Отметим отдельно только тот простой факт, что при $p_1=+\infty$, $p_2=-\infty$ ни для оценки сверху, ни для оценки снизу нет экстремальной функции, а в качестве экстремального можно взять семейство ступенчатых функций, состоящих из двух ступенек:

$$w_\lambda(t) = \begin{cases}\xi_2, & \text{если } 0\leqslant t\leqslant\lambda,\\ \xi_1, & \text{если } \lambda<t\leqslant 1,\end{cases}$$

которое при $\lambda \to 0$ обеспечивает необходимое неравенство в формуле (4.19) и при $\lambda \to 1$ – в формуле (4.20).

Ещё несколько слов надо добавить про предельный случай $\delta = \infty$. Это – формальная запись того, что мы ищем супремум и инфимум выражения $\langle w^q \rangle^{\frac{1}{q}}$ без дополнительных ограничений на пробную функцию, а только при условии $\langle w^{p_1} \rangle^{\frac{1}{p_1}} = \xi_1$, $\langle w^{p_2} \rangle^{\frac{1}{p_2}} = \xi_2$. Поскольку экстремум вычисляется по множеству более широкому, чем $\bigcup\limits_{\delta>0} A^{\delta}_{p_1,p_2}$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \infty) &\geqslant \sup_{\delta>0} \mathbf{M}_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \delta) \\ &\geqslant \lim_{\delta\to\infty} M_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \delta);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, \infty) &\leqslant \inf_{\delta>0} \mathbf{M}_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, \delta) \\ &\leqslant \lim_{\delta\to\infty} M_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, \delta).\end{aligned}$$

Для примера проверим справедливость неравенств, соответствующих равенству (4.37), то есть в предположении $0 < p_2 < p_1$ вычислим пределы выражений, стоящих в правой части формулы (0.6).

Когда δ возрастает до $+\infty$, величины s^+ и r^+, убывая, стремятся к $\frac{1}{p_1}$. Поэтому первая строка в формуле (0.6) даёт $\mathbf{M}_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \infty) = +\infty$ при $q > p_1$, а вторая (где выберем $i = 2$): $\mathbf{M}_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \infty) \geqslant \xi_2$ при $q \leqslant p_2$. Чтобы получить оценку при $p_2 < q < p_1$, надо перейти к пределу в третьей строке формулы (0.6). При $\delta \to \infty$ величины s^- и r^- стремятся к $-\infty$, причём,

$$s^- \approx -\Big(\frac{\xi_2}{\xi_1}\Big)^{\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}} p_1^{\frac{p_2}{p_1-p_2}} p_2^{-\frac{p_1}{p_1-p_2}}, \quad r^- \approx -\Big(\frac{\delta\xi_2}{\xi_1}\Big)^{\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}} p_1^{\frac{p_2}{p_1-p_2}} p_2^{-\frac{p_1}{p_1-p_2}},$$

поэтому третья строка в формуле (0.6) ведёт себя как

$$\xi_2\Big(\frac{r^-}{s^-}\Big)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p_2}} \approx \xi_2\Big(\frac{\xi_2}{\xi_1}\Big)^{\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}(\frac{1}{q}-\frac{1}{p_2})} = \xi_1^{\frac{p_1(q-p_2)}{q(p_1-p_2)}} \xi_2^{\frac{p_2(p_1-q)}{q(p_1-p_2)}},$$

что даёт нам неравенство

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \infty) \geqslant \xi_1^{\frac{p_1(q-p_2)}{q(p_1-p_2)}} \xi_2^{\frac{p_2(p_1-q)}{q(p_1-p_2)}}$$

при $p_2 < q < p_1$. □

Доказательство леммы 3. Чтобы доказать лемму, нужно проверить, что матрица

$$\left\{\frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial x_j}\right\}_{i,j=1}^{2} \tag{0.16}$$

неположительна для $B_{\max}$ и неотрицательна $B_{\min}$. Для значений параметров p_i и q, отличных от 0 и $\pm\infty$, непосредственным вычислением получаем

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{(1-p_1 r)(1-p_2 r)}{p_1(p_2-p_1) r x_1}, \qquad \frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{(1-p_1 r)(1-p_2 r)}{p_2(p_1-p_2) r x_2},$$

$$\frac{\partial B}{\partial x_1} = \frac{q(p_2-q)}{p_1(p_2-p_1)}\,\frac{1-p_1 r}{x_1(1-qr)}\,B, \qquad \frac{\partial B}{\partial x_2} = \frac{q(p_1-q)}{p_2(p_1-p_2)}\,\frac{1-p_2 r}{x_2(1-qr)}\,B,$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2} = \frac{q(p_2-q)(q-p_1)}{p_1^2(p_2-p_1)^2}\,\frac{(1-p_1 r)^2}{x_1^2 r(1-qr)}\,B,$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x_1 \partial x_2} = -\frac{q(p_2-q)(q-p_1)}{p_1 p_2(p_2-p_1)^2}\,\frac{(1-p_1 r)(1-p_2 r)}{x_1 x_2 r(1-qr)}\,B,$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2} = \frac{q(p_2-q)(q-p_1)}{p_2^2(p_2-p_1)^2}\,\frac{(1-p_2 r)^2}{x_2^2 r(1-qr)}\,B.$$

Следовательно, квадратичная форма матрицы (0.16) имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial x_j}\Delta_i\Delta_j = \frac{q(p_2-q)(q-p_1)}{(p_2-p_1)^2}\,\frac{B}{r(1-qr)}\Big(\frac{1-p_1 r}{p_1 x_1}\Delta_1 - \frac{1-p_2 r}{p_2 x_2}\Delta_2\Big)^2. \tag{0.17}$$

Полученное выражение имеет нужный знак, поскольку величина $(p_2-q)(q-p_1)r$ положительна для $\mathbf{M}_{\min}$ и отрицательна для $\mathbf{M}_{\max}$ (см. (0.6)–(0.7)), поэтому (см. (0.11)) величина $q(p_2-q)(q-p_1)r$ положительна для $B_{\min}$ и отрицательна для $B_{\max}$.

Случай, когда один из показателей p_i равен нулю, отличается от рассмотренного лишь видом формул. Рассмотрим для примера случай $p_1 = 0$, $-\infty < p_2 < 0$. Тогда, согласно формулам (4.9)–(4.10),

$$B(x) = e^{q(x_1+r-s)}\frac{1-qr}{1-qs}$$

и, следовательно,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial r}{\partial x_1} &= \frac{1-p_2 r}{p_2 r}, & \frac{\partial r}{\partial x_2} &= -\frac{1-p_2 r}{p_2^2 r x_2},\\
\frac{\partial B}{\partial x_1} &= \frac{q(p_2-q)}{p_2(1-qr)}\,B, & \frac{\partial B}{\partial x_2} &= \frac{q^2(1-p_2 r)}{p_2^2 x_2(1-qr)}\,B,\\
\frac{\partial^2 B}{\partial x_1^2} &= \frac{q^2(p_2-q)}{p_2^2 r(1-qr)}\,B, & \frac{\partial^2 B}{\partial x_2^2} &= \frac{q^2(p_2-q)(1-p_2 r)^2}{p_2^4 x_2^2 r(1-qr)}\,B,\\
\frac{\partial^2 B}{\partial x_1 \partial x_2} &= -\frac{q^2(p_2-q)(1-p_2 r)}{p_2^3 x_2 r(1-qr)}\,B.
\end{aligned}
$$

Таким образом, квадратичная форма матрицы (0.16) имеет вид

$$
\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 B}{\partial x_i \partial x_j}\Delta_i\Delta_j = \frac{q^2(p_2-q)}{p_2^2}\,\frac{B}{r(1-qr)}\Big(\Delta_1 - \frac{1-p_2 r}{p_2 x_2}\Delta_2\Big)^2. \qquad (0.18)
$$

Это выражение имеет нужный знак, поскольку величина $q(p_2-q)r$ положительна для $\mathbf{M}_{\min}$ и отрицательна для $\mathbf{M}_{\max}$ (см. (4.9)–(4.10)), поэтому (см. (0.11)) величина $(p_2-q)r$ положительна для $B_{\min}$ и отрицательна для $B_{\max}$.

Формально ситуация для бесконечных показателей сильно отличается от рассмотренной. Обсудим, например, случай $p_1 = +\infty$ и, соответственно, формулы (4.7)–(4.8). Нам надо проверять обычное неравенство

$$
B(x^0) \geqslant \alpha^- B(x^-) + \alpha^+ B(x^+)
$$

для функции $B_{\max}$, и противоположное неравенство для $B_{\min}$, но теперь точка x^0 не является выпуклой комбинацией точек $x^\pm$ в обычном смысле, теперь $x_1^0 = \max\{x_1^\pm\}$, $x_2^0 = \alpha^- x_2^- + \alpha^+ x_2^+$. В силу симметрии точек $x^\pm$ выберем для определённости $x_1^+ = x_1^0$.

Если $B_{\max/\min}(x) = x_2^{q/p_2}$, то требуемая вогнутость (выпуклость) этой функции опять определяется знаком второй производной, и нам остаётся лишь отметить, что величина $q(q-p_2)$ имеет требуемый знак. А в том случае, когда

$$
B(x) = x_1^q \frac{\dfrac{p_2}{q} + \dfrac{x_2\delta^{p_2}}{x_1^{p_2}} - 1}{\dfrac{p_2}{q} + \delta^{p_2} - 1},
$$

мы воспользуемся линейностью функции B по аргументу x_2, и нужное неравенство будет обеспечиваться уже знаком первой производной по x_1 (напомню, что $x_1^+ = x_1^0 \geqslant x_1^-$):

$$\begin{aligned} B(x^0) - \bigl(\alpha^- B(x^-) + \alpha^+ B(x^+)\bigr) &= \bigl(\alpha^- B(x_1^+, x_2^-) + \alpha^+ B(x_1^+, x_2^+)\bigr) \\ &- \bigl(\alpha^- B(x_1^-, x_2^-) + \alpha^+ B(x_1^+, x_2^+)\bigr) = \alpha^- \bigl(B(x_1^+, x_2^-) - B(x_1^-, x_2^-)\bigr). \end{aligned}$$

По условию леммы весь отрезок $\{(x_1, x_2^-)\colon x_1^- \leqslant x_1 \leqslant x_1^+\})$ лежит в области Ω_δ, поэтому знак этого выражения совпадает со знаком производной

$$\frac{\partial B(x_1, x_2^-)}{\partial x_1} = \frac{q - p_2}{q} \cdot \frac{x_1^{q-1}}{1 + \dfrac{\delta^{p_2} - 1}{p_2} q} \cdot \frac{\dfrac{x_2 \delta^{p_2}}{x_1^{p_2}} - 1}{p_2},$$

который, в свою очередь, совпадает со знаком величины $q(q-p_2)$, так как вторая дробь положительна при $q > \frac{p_2}{1-\delta^{p_2}}$, а третья положительна при всех значениях параметров. Таким образом, мы получаем необходимое неравенство для функции $B_{\max}$ при $q(q-p_2) > 0$, и противоположное неравенство, т.е. необходимое для $B_{\min}$, при $q(q-p_2) < 0$. Вспоминая связь между функциями B и M, мы видим, что исследуемая функция удовлетворяет условию для $M_{\max}$ при $q - p_2 > 0$ и условию для $M_{\min}$ при $q - p_2 < 0$.

От общей ситуации сильно отличаются также случаи $q = \pm\infty$. Они совершенно симетричны, поэтому достаточно рассмотреть один из них, пусть это будет $q = +\infty$ (см. (4.5)–(4.6)). Нам нечего доказывать для функции $M_{\max}$, а для функции

$$M_{\min}(\xi) = B_{\min}(x) = \left(x_1 \frac{1 - p_1 s^-}{1 - p_1 r^-}\right)^{\frac{1}{p_1}}$$

мы должны проверять неравенство

$$B(x) \leqslant \max\{B(x^+), B(x^-)\}$$

для любой точки x, расположенной на отрезке, соединяющем произвольную пару точек x^+ и x^- из Ω_δ, при единственном условии, что указанный отрезок целиком лежит в Ω_δ. Другими словами, надо проверить, что функция B монотонна вдоль любого отрезка, лежащего в области определения. Отметим сперва, что два линейных соотношения

$$x_i = \frac{1-p_i r^-}{1-p_i s^-} A^{p_i}, \quad i=1,2, \quad r \in [s^-, 0], \quad A > 0,$$

параметрически задают прямолинейный отрезок, соединяющий точку (A^{p_1}, A^{p_2}) на нижней границе области Ω_δ с точкой $(\frac{A^{p_1}}{1-p_1 s^-}, \frac{A^{p_2}}{1-p_2 s^-})$ на верхней границе. Отметим, что это – отрезок касательный к верхней границе. Более того, на всём этом отрезке наша функция B принимает одно и то же значение $B(x) = A$. Теперь пусть точка x пробегает произвольный отрезок, содержащийся в области Ω_δ. Проведём через точку x касательную к верхней границе, и пусть, как раньше, $(A(x)^{p_1}, A(x)^{p_2})$ – координаты точки пересечения этой касательной с нижней границей. Геометрически очевидно, что эта точка монотонно зависит от точки x, то есть не меняет направления движения, когда x пробегает по выбранному отрезку, каковы бы ни были показатели p_i. Другими словами, A является монотонной функцией x вдоль любого отрезка. Поскольку мы только что проверили, что $A(x) = B(x)$, требуемое свойство функции B доказано.

Все прочие предельные случаи рассматриваются аналогично одному из уже описанных. Несколько особняком стоит предельный случай $\delta = \infty$ (формулы (4.37)–(4.42)), но соответствующие функции Беллмана столь просты, что необходимая проверка требуемой выпуклости/вогнутости (или соответствующих неравенств с минимумом/максимумом, в которые превращаются эти условия для предельных значений показателей) совершенно элементарна. □

Доказательство леммы 4. Для произвольного интервала I опишем процедуру его разбиения на две части I^- и I^+, $|I^\pm| = \alpha^\pm |I|$. Как и раньше, положим $x_i^\pm = \langle w^{p_i} \rangle_{I^\pm}$. Для всех α^+ отрезок, соединяющий точки $x^\pm$ (будем его обозначать символом $[x^-, x^+]$), содержит точку $x^0 = \alpha^- x^- + \alpha^+ x^+$, координаты которой – это соответствующие средние по всему интервалу I: $x_i^0 = \langle w^{p_i} \rangle_I$.

Возьмём сперва $\alpha^- = \alpha^+ = \frac{1}{2}$. Если весь отрезок $[x^-, x^+]$ лежит в области Ω_ε, мы зафиксируем это разбиение. В оставшейся части доказательства будем предполагать, что это не так, т.е. существует точка x на указанном отрезке, для которой $x_1^{1/p_1} > \varepsilon x_2^{1/p_2}$. Поскольку прямая пересекает график степенной функции не более, чем в двух точках, мы можем выбрать такой конец ζ нашего отрезка, что все точки

x, для которых $x_1^{1/p_1} > \varepsilon x_2^{1/p_2}$, лежат между x^0 и ζ. Зададим функцию $\rho(\alpha^+)$ следующим образом: для данного α^+ определим $\rho(\alpha^+)$ как максимальное значение величины $x_1^{1/p_1} x_2^{-1/p_2}$ при x, пробегающем отрезок между x^0 и ζ. При нашем предположении $\rho(\frac{1}{2}) > \varepsilon$. Начнём менять α^+, выбрав то направление, когда ζ стремится к x^0, т.е. будем увеличивать α^+, если $\zeta = x^+$, и уменьшать, если $\zeta = x^-$. Остановимся в тот момент, когда в первый раз наступит равенство $\rho(\alpha^+) = \varepsilon$. Это и будет нашей процедурой разбиения заданного интервала I. Теперь нужно проверить, что такой момент действительно наступит, и, более того, что соответствующее значение α^+ равномерно (относительно w и I) отделено от 0 и от 1.

Поскольку $(x_1^0)^{1/p_1}(x_2^0)^{-1/p_2} \leqslant \delta$, неравенство $x_1^{1/p_1} x_2^{-1/p_2} < \varepsilon$ выполняется на всём отрезке между x^0 и ζ, если ζ достаточно близко к x^0, т.е. $\rho(\alpha^+) < \varepsilon$ для соответствующих α^+. Функция ρ непрерывна, и, следовательно, существует значение α^+, для которого $\rho(\alpha^+) = \varepsilon$.

Таким образом, мы доказали, что описанная точка остановки существует, и осталось убедиться в том, что соответствующее значение α^+ не слишком близко к 0 и 1. Если $\zeta = x^+$, то $\alpha^+ > \frac{1}{2}$, и $\zeta_1 - x_1^0 = x_1^+ - x_1^0 = \alpha^-(x_1^+ - x_1^-)$. Симметричным образом, если $\zeta = x^-$, то $\alpha^- > \frac{1}{2}$, и $\zeta_1 - x_1^0 = x_1^- - x_1^0 = \alpha^+(x_1^- - x_1^+)$. Поэтому $|\zeta_1 - x_1^0| = \min\{\alpha^\pm\}|x_1^- - x_1^+|$.

При значении α^+, отвечаюшему точке остановки, прямая, проходящая через точки $x^\pm$ и x^0, касается графика функции $x_1^{1/p_1} x_2^{-1/p_2} = \varepsilon$ в некоторой точке, скажем, в точке τ. Уравнение касательной к графику функции $x_1^{1/p_1} x_2^{-1/p_2} = \text{const}$ в точке τ имеет вид

$$\frac{1}{p_2}\Big(\frac{x_2}{\tau_2} - 1\Big) = \frac{1}{p_1}\Big(\frac{x_1}{\tau_1} - 1\Big).$$

Эта прямая пересекает график функции $x_1^{1/p_1} x_2^{-1/p_2} = \delta$ в точках

$$x(\delta)^\pm = \Big(\tau_1\Big[1 - p_1 u^\pm_{p_1,p_2}\Big(\frac{\delta}{\varepsilon}\Big)\Big], \tau_2\Big[1 - p_2 u^\pm_{p_1,p_2}\Big(\frac{\delta}{\varepsilon}\Big)\Big]\Big),$$

а график функции $x_1^{1/p_1} x_2^{-1/p_2} = 1$ – в точках

$$x(1)^\pm = \Big(\tau_1\Big[1 - p_1 u^\pm_{p_1,p_2}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big], \tau_2\Big[1 - p_2 u^\pm_{p_1,p_2}\Big(\frac{1}{\varepsilon}\Big)\Big]\Big).$$

Итак, получилась следующая цепочка вложенных отрезков нашей прямой: $[x(\delta)^-, x(\delta)^+] \subset [x^0, \zeta] \subset [x^-, x^+] \subset [x(1)^-, x(1)^+]$. Поэтому

$$|x(\delta)_1^+ - x(\delta)_1^-| \leqslant |x_1^0 - \zeta_1| = \min\{\alpha^\pm\}|x_1^+ - x_1^-| \leqslant \min\{\alpha^\pm\}|x(1)_1^+ - x(1)_1^-|$$

и

$$\min\{\alpha^\pm\} \geqslant \frac{|x(\delta)_1^+ - x(\delta)_1^-|}{|x(1)_1^+ - x(1)_1^-|} = \frac{|u_{p_1,p_2}^+\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) - u_{p_1,p_2}^-\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)|}{|u_{p_1,p_2}^+\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - u_{p_1,p_2}^-\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)|}.$$

Мы видим, что эта оценка зависит только от p_i, δ и ε, но не от выбора w и I.

Предельный показатель $p_i = 0$ обслуживается приведённым выше доказательством. Для $p_i = \pm\infty$ идея доказательства остаётся той же, но требуются формальные изменения. Рассмотрим, к примеру, случай $p_2 = -\infty$. Не умаляя общности, можно считать, что $\varepsilon < 2\delta$, поскольку, если лемма справедлива для некоторого ε, то она справедлива и для всех бóльших ε. Так как $x_2^0 = \min\{x_2^\pm\}$ и обе точки $x^\pm$ лежат в Ω_δ, то по крайней мере одно из неравенств $(x_1^\pm)^{1/p_1} \leqslant \varepsilon x_2^0$ всегда выполнено. Возьмём сперва $\alpha^- = \alpha^+ = \frac{1}{2}$ и зафиксируем это разбиение, если оба неравенства справедливы. Если это не так, начнем изменять α, а именно, будем увеличивать α^+, если точка (x_1^+, x_2^0) лежит вне Ω_ε, и уменьшать его в противном случае. Благодаря симметрии достаточно рассмотреть одну из возможных ситуаций, скажем, случай, когда $(x_1^+)^{1/p_1} > \varepsilon x_2^0$ при $\alpha^+ = \frac{1}{2}$. Итак, мы начинаем увеличивать интервал I^+ (т.е. увеличивать α^+) и останавливаемся в тот момент, когда в первый раз наступит равенство $(x_1^+)^{1/p_1} = \varepsilon x_2^0$. Это и будет нашей процедурой разбиения заданного интервала I. Теперь нужно проверить, что такой момент действительно наступит, и, более того, что соответствующее значение α^+ равномерно (относительно w и I) отделено от 0 и от 1.

При $p_2 = -\infty$ точки $x^\pm$ не обязаны непрерывно зависеть от α^+, однако первые координаты $x_1^\pm$ зависят непрерывно, поэтому непрерывной является функция $\rho(\alpha^+) = (x_1^+)^{1/p_1}(x_2^0)^{-1}$. Мы предположили, что $\rho(\frac{1}{2}) > \varepsilon$. Если мы предъявим значение α^+, не зависящее от веса w и интервала I, при котором будет выполняться противоположное неравенство $\rho(\alpha^+) \leqslant \varepsilon$, то в силу непрерывности ρ отсюда будет следовать существование требуемого значения α^+ и его отделённость от 0 и 1.

Сперва рассмотрим случай $p_1 > 0$ и проверим, что $\alpha^+ = (\frac{\delta}{\varepsilon})^{p_1}$

удовлетворяет нужным требованиям:

$$(x_1^+)^{1/p_1} = \frac{\varepsilon}{\delta}(\alpha^+ x_1^+)^{1/p_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}(x_1^0)^{1/p_1} \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta}\delta x_2^0 = \varepsilon x_2^0.$$

Теперь пусть $p_1 < 0$ и возьмём $\alpha^+ = \frac{1-\delta^{p_1}}{1-\varepsilon^{p_1}}$. Поскольку $p_1 < 0$, условия

$$(x_1^0)^{1/p_1} \leqslant \delta x_2^0, \quad (x_1^-)^{1/p_1} \geqslant x_2^- = x_2^0$$

можно переписать в виде

$$x_1^0 \geqslant \delta^{p_1}(x_2^0)^{p_1}, \quad x_1^- \leqslant (x_2^0)^{p_1}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} x_1^+ &= \frac{x_1^0 - \alpha^- x_1^-}{\alpha^+} = \frac{1-\varepsilon^{p_1}}{1-\delta^{p_1}}x_1^0 - \frac{\delta^{p_1} - \varepsilon^{p_1}}{1-\delta^{p_1}}x_1^- \\ &\geqslant \Big(\frac{1-\varepsilon^{p_1}}{1-\delta^{p_1}}\delta^{p_1} - \frac{\delta^{p_1} - \varepsilon^{p_1}}{1-\delta^{p_1}}\Big)(x_2^0)^{p_1} = \varepsilon^{p_1}(x_2^0)^{p_1}, \end{aligned}$$

и поэтому опять выполняется требуемое неравенство

$$(x_1^+)^{1/p_1} \leqslant \varepsilon x_2^0.$$

Наконец, если $p_1 = 0$, то выбираем $\alpha^+ = \frac{\log\delta}{\log\varepsilon}$. Напомним, что область Ω_δ в этом случае описывается неравенствами

$$x_2 \leqslant e^{x_1} \leqslant \delta x_2,$$

поэтому выполняются соотношения

$$x_1^0 \leqslant \log\delta + \log x_2^0, \quad x_1^- \geqslant \log x_2^- = \log x_2^0,$$

и нам нужно проверить принадлежность точки (x_1^+, x_2^0) области Ω_ε:

$$\begin{aligned} x_1^+ &= \frac{x_1^0 - \alpha^- x_1^-}{\alpha^+} = \frac{(\log\varepsilon)x_1^0 - (\log\varepsilon - \log\delta)x_1^-}{\log\delta} \\ &\leqslant \frac{\log\varepsilon(\log\delta + \log x_2^0) - (\log\varepsilon - \log\delta)\log x_2^0}{\log\delta} = \log\varepsilon + \log x_2^0, \end{aligned}$$

то есть

$$e^{x_1^+} \leqslant \varepsilon x_2^0,$$

что и требовалось. □

Теперь мы готовы к доказательству основной леммы.

Доказательство леммы 2. Утверждение леммы означает, что для любого числа ε, $\varepsilon > \delta$, и для любого веса w, $w \in A^{\delta}_{p_1,p_2}(I)$, выполняются неравенства

$$M_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, \varepsilon) \leqslant \langle w^q \rangle_I^{\frac{1}{q}} \leqslant M_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \varepsilon).$$

Как условились, под выражением $\langle w^q \rangle_I^{\frac{1}{q}}$ мы понимаем $e^{\langle \log w \rangle_I}$ при $q = 0$ и $\sup_I w$ или $\inf_I w$ при $q = \pm\infty$, а точка $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ задаётся весом w по формуле $\xi_i = \langle w^{p_i} \rangle_I^{\frac{1}{p_i}}$, с тем же соглашением относительно выражения $\langle w^{pi} \rangle_I^{\frac{1}{p_i}}$ для предельных значений показателей p_i.

Как было отмечено в замечании 6, указанные неравенства будут доказываться в терминах функции B, то есть мы будем проверять справедливость неравенств

$$B_{\min}(x; p_1, p_2, q, \varepsilon) \leqslant \langle w^q \rangle_I \leqslant B_{\max}(x; p_1, p_2, q, \varepsilon) \tag{0.19}$$

для любого веса $w \in A^{\delta}_{p_1,p_2}(I)$ и любого $\varepsilon > \delta$. Для предельных значений q мы отдельно должны будем проверить справедливость неравенств

$$B_{\min}(x; p_1, p_2, +\infty, \varepsilon) \leqslant \sup_I w \leqslant B_{\max}(x; p_1, p_2, +\infty, \varepsilon), \tag{0.20}$$

$$B_{\min}(x; p_1, p_2, -\infty, \varepsilon) \leqslant \inf_I w \leqslant B_{\max}(x; p_1, p_2, -\infty, \varepsilon) \tag{0.21}$$

и

$$B_{\min}(x; p_1, p_2, 0, \varepsilon) \leqslant \langle \log w \rangle_I \leqslant B_{\max}(x; p_1, p_2, 0, \varepsilon). \tag{0.22}$$

Переменная x теперь пробегает область $\Omega_\delta = \Omega_\delta(p_1, p_2)$, зависящую не только от δ, то и от показателей p_i.

Сперва проверим неравенства (0.19)–(0.22) для ступенчатых функций w. Зафиксируем интервал I, функцию w, $w \in A^{\delta}_{p_1,p_2}(I)$, и число ε, $\varepsilon > \delta$. Начиная с произвольного интервала $I = I^{0,0}$, построим цепочку интервалов $I^{n,m}$ по правилам, описанным в лемме 4. Символом

$I^{n,m}$ обозначим интервалы, возникающие в n-м поколении следующим образом: $I^{n,2k} = (I^{n-1,k})^-$ и $I^{n,2k+1} = (I^{n-1,k})^+$, так что второй индекс пробегает значения от 0 до $2^n - 1$. Соответствующие средние будут помечаться той же парой индексов, и $\alpha^{n,m} = |I^{n,m}|/|I|$. Согласно лемме 3 мы можем записать следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} B_{\max}&(x^{0,0};p_1,p_2,q,\varepsilon) \\ &\geqslant \alpha^{1,0}B_{\max}(x^{1,0};p_1,p_2,q,\varepsilon) + \alpha^{1,1}B_{\max}(x^{1,1};p_1,p_2,q,\varepsilon) \\ &\geqslant \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha^{n,m}B_{\max}(x^{n,m};p_1,p_2,q,\varepsilon). \end{aligned} \tag{0.23}$$

Для $B_{\min}$ мы получаем аналогичную цепочку противоположных неравенств:

$$B_{\min}(x^{0,0};p_1,p_2,q,\varepsilon) \leqslant \sum_{m=0}^{2^n-1} \alpha^{n,m}B_{\min}(x^{n,m};p_1,p_2,q,\varepsilon). \tag{0.24}$$

Последняя сумма в (0.23) и (0.24) стремится к $\langle w^q\rangle_I$, когда $n \to \infty$. Действительно, для фиксированной ступенчатой функции $w \in A^\delta_{p_1,p_2}(J)$ множество точек $\{x = (\langle w^{p_1}\rangle_I, \langle w^{p_2}\rangle_I)\colon I \subset J\}$ является компактным подмножеством в Ω_δ, и, следовательно, непрерывная функция B ограничена на этом подмножестве, $B \leqslant M$, т.е. $B(x^{n,m};p_1,p_2,q,\varepsilon) \leqslant M$ (исключим случай $B = B_{\max} = \infty$, когда нам нечего доказывать). Итак, если N – количество точек разрыва ступенчатой функции w, то количество интервалов $I^{n,m}$, на которых функция w не является постоянной, не превосходит N. На всех остальных интервалах функция w постоянна, и следовательно, $B(x^{n,m};p_1,p_2,q,\varepsilon) = (x_1^{n,m})^q = w^q$, т.е. соответствующее слагаемое равно $\frac{1}{|I|}\int\limits_{I^{n,m}} w(t)^q dt$, и вся сумма отличается от $\langle w^q\rangle_I$ не более, чем на величину $NM\max_m \alpha^{m,n}$, которая стремится к нулю, ибо согласно лемме 4 значения $\alpha^\pm$ отделены от 0 и от 1, а стало быть, максимальная длина интервалов n-го поколения стремится к 0, когда $n \to \infty$.

В приведённом рассуждении мы неявно предполагали, что параметры p_i и q отличны от 0 и от $\pm\infty$. Но отметим, что все рассуждения остаются в силе и для предельных значений показателей за исключением $q = \pm\infty$, когда нам надо будет их слегка модифицировать. Когда мы говорим о точках вида $x = (\langle w^{p_1}\rangle_I, \langle w^{p_2}\rangle_I)$, то в предельном случае $p_i = 0$, координату $\langle w^{p_i}\rangle_I$, естественно, надо заменить на $\langle \log w\rangle_I$, на $\max_I w$ при $p_i = +\infty$, и на $\min_I w$ при $p_i = -\infty$. Если $q = 0$, то так же как выше мы рассматриваем средние $\langle \log w\rangle_I$ вместо $\langle w^q\rangle_I$. А вот при $q = \pm\infty$, согласно лемме 3, меняются сами формулы (0.23) и (0.24) – вместо взвешенной суммы мы будем иметь максимум или, соответственно, минимум:

$$B_{\max}(x^{0,0}; p_1, p_2, +\infty, \varepsilon) \geqslant \max_m\{B_{\max}(x^{n,m}; p_1, p_2, +\infty, \varepsilon)\}, \qquad (0.25)$$

$$B_{\min}(x^{0,0}; p_1, p_2, +\infty, \varepsilon) \leqslant \max_m\{B_{\min}(x^{n,m}; p_1, p_2, +\infty, \varepsilon)\}, \qquad (0.26)$$

и

$$B_{\max}(x^{0,0}; p_1, p_2, -\infty, \varepsilon) \geqslant \min_m\{B_{\max}(x^{n,m}; p_1, p_2, -\infty, \varepsilon)\}, \qquad (0.27)$$

$$B_{\min}(x^{0,0}; p_1, p_2, -\infty, \varepsilon) \leqslant \min_m\{B_{\min}(x^{n,m}; p_1, p_2, -\infty, \varepsilon)\}. \qquad (0.28)$$

Но в данном случае рассуждение ещё проще: как только при дроблении максимальная длина интервалов $I^{n,m}$ станет меньше половины длины самой высокой ступеньки функции w, так сразу при некотором m вес w на интервале $I^{n,m}$ будет принимать постоянное значение, равное $\sup_I w$, а стало быть и $B_{\max}(x^{n,m}) = \sup_I w$, поэтому уже за конечное число шагов без предельного перехода неравенства (0.25) и (0.26) превращаются в искомое неравенство (0.20). Аналогично неравенства (0.27) и (0.28) гарантированно дают (0.21), как только длина интервалов $I^{n,m}$ станет меньше половины длины самой низкой ступеньки функции w.

Итак, мы доказали справедливость неравенств (0.19)–(0.22) для ступенчатых функций w. Теперь проверим, что неравенства справедливы для любого ограниченного веса w, отделённого от нуля. Для этого возьмём произвольную последовательность ступенчатых функций w_n, почти всюду сходящуюся к w. При этом можно добиться того, чтобы средние $\langle w_n^{p_i}\rangle_I$ совпадали с исходными координатами $x_i = \langle w^{p_i}\rangle_I$. Но можно об этом и не заботиться, поскольку по теореме Лебега об ограниченной сходимости все координаты, а равно и оцениваемое среднее $\langle w_n^q\rangle_I$ будут сходиться к нужным предельным значениям. Так мы получаем требуемую оценку для произвольного ограниченного веса w, отделённого от нуля, для конечных показателей p_i, q. Чтобы обеспечить сходимость и для бесконечных значений показателей, достаточно наложить на последовательность весов w_n два дополнительных легко выполнимых условия: $\sup_I w_n = \sup_I w$, $\inf_I w_n = \inf_I w$.

Осталось распространить неравенства (0.19)–(0.22) на произвольные функции w, используя стандартную процедуру приближения ограниченными срезками

$$w_n(t) = \begin{cases} w(t), & \text{если} \quad w(t) < n, \\ n, & \text{если} \quad w(t) \geqslant n. \end{cases}$$

В неравенствах для w_n переходим к пределу, используя теорему о монотонной сходимости под знаком интеграла и получая сходимость всех средних, участвующих в неравенствах. Тем самым, точки x_n, отвечающие функциям w_n, сходятся к исходной точке x, и мы можем воспользоваться непрерывностью функций $B_{\max/\min}$ всюду, где они принимают конечные значения. Точно так же срезая w снизу, приближаем её функциями, отделёнными от нуля. □

Доказательство леммы 2 завершает доказательство теорем 1 и 2.

Добавление 1: как найти функцию Беллмана. Мы будем искать не функцию $\mathbf{M}(\xi)$, а функцию $\mathbf{B}(x)$, связанную с первой формулой (0.11)

$$\mathbf{B}(x) = \begin{cases} \mathbf{M}(\xi)^q, & q \neq 0, \quad q \neq \pm\infty, \\ \log \mathbf{M}(\xi), & q = 0, \\ \mathbf{M}(\xi), & q = \pm\infty, \end{cases}$$

от переменных

$$x_i = \begin{cases} \xi^{p_i}, & p_i \neq 0, \quad p_i \neq \pm\infty, \\ \log \xi_i, & p_i = 0, \\ \xi_i, & p_i = \pm\infty. \end{cases}$$

Как уже отмечалось в замечании 6, мы будем работать с переменными x_i, а не ξ_i, поскольку первые “аддитивно” себя ведут при разбиении отрезка. Если на интервале I задан вес w, которому соответствует точка

$$x^0 = (x_1^0, x_2^0), \quad x_i^0 = \begin{cases} \langle w^{p_i} \rangle_I, & p_i \neq 0, \quad p_i \neq \pm\infty, \\ \langle \log w \rangle_I, & p_i = 0, \\ \sup_I w, & p_i = +\infty, \\ \inf_I w, & p_i = -\infty, \end{cases}$$

то при разбиении интервала I на две части $I = I^+ \cup I^-$, $|I^\pm| = \alpha^\pm |I|$, точка x^0 становится выпуклой комбинацией (если $p_i \neq \pm\infty$) пары точек $x^\pm$, отвечающих весам $w^\pm = w|_{I^\pm}$:

$$x^0 = \alpha^- x^- + \alpha^+ x^+.$$

Аналогична причина перехода к функции $\mathbf{B}$, только тут при разбиении вместо равенства мы получим неравенство, т.е. условие выпуклости или вогнутости функции Беллмана $\mathbf{B}$. Сперва рассмотрим общий случай $q \neq 0$, $q \neq \pm\infty$ и так же разобьём интервал I на две части $I = I^+ \cup I^-$, $|I^\pm| = \alpha^\pm |I|$. Пусть $w^\pm$ – экстремальные веса (или "почти экстремальные", если экстремальной функции не существует), заданные, соответственно, на промежутках $I^\pm$, и для веса w на I, совпадающего с w^+ на I^+ и с w^- на I^-, напишем равенство

$$\langle w^q \rangle_I = \alpha^- \langle w^q \rangle_{I^-} + \alpha^+ \langle w^q \rangle_{I^+}.$$

Мы видим, что в правой части стоит выпуклая комбинация значений функции Беллмана $\mathbf{B}$ в точках $x^\pm$ (или почти этих значений, если экстремальной функции не существует), а среднее в левой части, по определению функции Беллмана, лежит между $\mathbf{B}_{\min}(x^0)$ и $\mathbf{B}_{\max}(x^0)$. Это рассуждение приводит нас к условию вогнутости функции $\mathbf{B}_{\max}$ и выпуклости функции $\mathbf{B}_{\min}$. Разумеется, остаётся не вполне ясным, почему построенный вес w должен быть допустимым, т.е. удовлетворять условию $\langle w^{p_1} \rangle_J^{1/p_1} \leqslant \delta \langle w^{p_2} \rangle_J^{1/p_2}$ для всех промежутков J, содержащихся в I, однако при эвристических рассуждениях этим можно не заниматься.

Далее проверим, что функции $\mathbf{B}$ должны иметь вид

$$\mathbf{B}(x_1, x_2; p_1, p_2, q, \delta) = \xi_2^q g(\xi_1/\xi_2; p_1, p_2, q, \delta), \tag{1.1}$$

где $g(\,\cdot\,; p_1, p_2, q, \delta)$ – функция на отрезке $[1, \delta]$, удовлетворяющая граничному условию $g(1; p_1, p_2, q, \delta) = 1$ и, кроме того, $g \geqslant 1$ при $q \geqslant p_2$ и $0 \leqslant g \leqslant 1$ при $q \leqslant p_2$.

Действительно, когда вес w пробегает всю область допустимых весов $A^\delta_{p_1,p_2}(J)$ (т.е. выполняется условие (0.1) для всех интервалов I, $I \subset J$), вес $\tilde{w} = tw$ тоже пробегает всю эту область, если t – произвольная положительная константа. Для средних от этих весов справедливы соотношения $\langle \tilde{w}^p \rangle_J^{1/p} = t \langle w^p \rangle_J^{1/p}$, поэтому $\tilde{\xi}_i = t\xi_i$. Вычисляя супремум (или инфимум) в тождестве $\langle \tilde{w}^q \rangle_J^{1/q} = t \langle w^q \rangle_J^{1/q}$, получаем

$$\mathbf{M}(\tilde{\xi}; p_1, p_2, q, \delta) = t\mathbf{M}(\xi; p_1, p_2, q, \delta).$$

Подставляя $t=\xi_2^{-1}$, приходим к соотношению

$$\mathbf{M}(\xi_1\xi_2^{-1},1;p_1,p_2,q,\delta)=\xi_2^{-1}\mathbf{M}(\xi_1,\xi_2;p_1,p_2,q,\delta),$$

и поэтому $\mathbf{M}(\xi)=\xi_2 G(\xi_1/\xi_2)$, где G – функция на интервале $[1,\delta]$, определяемая тождеством $G(y)=\mathbf{M}(y,1)$. Как уже отмечалось, функция $q\mapsto\langle w^q\rangle^{1/q}$ является монотонно возрастающей, поэтому $\mathbf{M}(\xi;p_1,p_2,q,\delta)\leqslant\xi_2$ при $q\leqslant p_2$ и $\mathbf{M}(\xi;p_1,p_2,q,\delta)\geqslant\xi_2$ при $q\geqslant p_2$. Следовательно, $G\geqslant 1$ при $q\geqslant p_2$ и $0\leqslant G\leqslant 1$ при $q\leqslant p_2$. Более того, так как тождество $\xi_2=\xi_1$ справедливо тогда и только тогда, когда $w=\xi_1=\mathrm{const}$, то $\mathbf{M}(1,1;p_1,p_2,q,\delta)=1$, т.е. $G(1;p_1,p_2,q,\delta)=1$.

Введём теперь переменную $y=\xi_1\xi_2^{-1}$, функцию $g(y)=G(y)^q$, тогда имеет место представление (1.1). Используя это представление, мы сосчитаем, как выглядит матрица вторых производных (0.16) "настоящей" функции Беллмана $\mathbf{B}=\mathbf{M}^q=\xi_2^q g(y)$ в терминах функции g:

$$\frac{\partial y}{\partial x_1}=\frac{1}{p_1}\frac{y}{x_1},\qquad \frac{\partial y}{\partial x_2}=-\frac{1}{p_2}\frac{y}{x_2},$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x_1}=\xi_2^q g'\frac{\partial y}{\partial x_1}=\frac{\xi_2^q y g'}{p_1x_1},$$

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x_2}=q\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}\xi_2^{q-1}g+\xi_2^q g'\frac{\partial y}{\partial x_2}=\frac{\xi_2^q}{p_2x_2}(qg-yg'),$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x_1^2}=\frac{\xi_2^q}{p_1}\Big(-\frac{yg'}{x_1^2}+\frac{1}{x_1}(g'+yg'')\frac{\partial y}{\partial x_1}\Big)=\frac{\xi_2^q}{p_1^2x_1^2}\big(y^2g''-(p_1-1)yg'\big),$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\xi_2^q}{p_2x_2}(qg'-g'-yg'')\frac{\partial y}{\partial x_2}=-\frac{\xi_2^q}{p_1p_2x_1x_2}\big(y^2g''-(q-1)yg'\big),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x_2^2}&=\Big(\frac{q\xi_2^{q-1}}{p_2x_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial x_2}-\frac{\xi_2^q}{p_2x_2^2}\Big)(qg-yg')+\frac{\xi_2^q}{p_2x_2}(qg'-g'-yg'')\frac{\partial y}{\partial x_2}\\&=\frac{\xi_2^q}{p_2^2x_2^2}\big(y^2g''-(2q-p_2-1)yg'+q(q-p_2)g\big)\end{aligned}$$

и матрица (0.16) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

$$= \xi_2^q \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{p_1 x_1} & 0 \\ \dfrac{1}{p_2 x_2} & \dfrac{1}{p_2 x_2} \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{p_1 x_1} & \dfrac{1}{p_2 x_2} \\ 0 & \dfrac{1}{p_2 x_2} \end{pmatrix}, \qquad (1.2)$$

где

$$R = \begin{pmatrix} y^2 g'' - (p_1 - 1) y g' & (p_1 - q) y g' \\ (p_1 - q) y g' & (p_2 - p_1) y g' - q(p_2 - q) g \end{pmatrix}. \qquad (1.3)$$

Если бы эта матрица была невырожденной, то в условиях (0.12)–(0.13) не могло бы быть равенства за исключением случая, когда $x^- = x^+$. Однако для экстремального веса w для функции $\mathbf{B}_{\max}$ (если таковой существует) справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\max}(x^0) = \langle w^q \rangle_I &= \alpha^- \langle w^q \rangle_{I^-} + \alpha^+ \langle w^q \rangle_{I^+} \\ &\leqslant \alpha^- \mathbf{B}_{\max}(x^-) + \alpha^+ \mathbf{B}_{\max}(x^+) \leqslant \mathbf{B}_{\max}(x^0). \end{aligned}$$

Таким образом, при невырожденной матрице (1.2) это приводит к равенству $x^+ = x^-$ для любого разбиения первоначального интервала I, что означает постоянство веса w. Поскольку для любой точки области Ω_δ, за исключением точек границы $\xi_1 = \xi_2$, это не так, матрица (1.2) обязана быть вырожденной.

Можно рассмотреть ситуацию более тщательно, когда нет экстремального веса, а мы располагаем лишь последовательностью весов, средние q-х степеней которых стремятся к значению функции $\mathbf{B}$, но мы не будем этого делать: рассуждения этого добавления – не доказательства, а всего лишь наводящие соображения, и их вполне достаточно для оправдания поиска вырожденной матрицы (1.2). Итак, положим определитель матрицы (1.3) равным нулю:

$$\big(y^2 g'' - (p_1 - 1) y g'\big)\big((p_2 - p_1) y g' - q(p_2 - q) g\big) = \big((p_1 - q) y g'\big)^2. \quad (1.4)$$

Условие вогнутости функции $\mathbf{B}_{\max}$ и выпуклости функции $\mathbf{B}_{\min}$ примет вид

$$yg'_{\max} - \frac{q(p_2-q)}{p_2-p_1} g_{\max} \leqslant 0 \leqslant yg'_{\min} - \frac{q(p_2-q)}{p_2-p_1} g_{\min}. \tag{1.5}$$

Решим уравнение (1.4). Введём новую переменную $h = \frac{yg'}{g}$, тогда $\frac{y^2g''}{g} = yh' + h^2 - h$, а уравнение (1.4) принимает вид

$$\big(yh' + h^2 - p_1 h\big)\big((p_2-p_1)h - q(p_2-q)\big) = (p_1-q)^2 h^2,$$

и следовательно,

$$\begin{aligned} &yh'\big((p_2-p_1)h - q(p_2-q)\big) \\ &\quad = (p_1-q)^2h^2 - \big((p_2-p_1)h - q(p_2-q)\big)\big(h^2 - p_1 h\big) \\ &\quad = -h\big((p_2-p_1)h^2 + (2qp_1 - p_1p_2 - qp_2)h + p_1 q(p_2-q)\big) \\ &\quad = -h(h-q)\big((p_2-p_1)h - p_1(p_2-q)\big), \end{aligned} \tag{1.6}$$

$$-\frac{\big((p_2-p_1)h - q(p_2-q)\big)}{h(h-q)\big((p_2-p_1)h - p_1(p_2-q)\big)} dh = \frac{dy}{y}, \tag{1.7}$$

$$\Big(\frac{1}{p_1 h} - \frac{1}{p_2(h-q)} + \frac{(p_2-p_1)^2}{p_1p_2\big((p_2-p_1)h - p_1(p_2-q)\big)}\Big) dh = \frac{dy}{y},$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_1}\log|h| - \frac{1}{p_2}\log|h-q| + \frac{p_1-p_2}{p_1p_2}\log|(p_2-p_1)h - p_1(p_2-q)| \\ = \log y + \mathrm{const}, \end{aligned}$$

$$y = \mathrm{const}\ \ |h|^{\frac{1}{p_1}}\ |h-q|^{-\frac{1}{p_2}}\ |(p_2-p_1)h - p_1(p_2-q)|^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}}. \tag{1.8}$$

Поскольку $g > 0$, условие (1.5) можно переписать в виде

$$h_{\max} \leqslant \frac{q(p_2-q)}{p_2-p_1} \leqslant h_{\min}. \tag{1.9}$$

Введём теперь более удобную переменную r с помощью формулы

$$r = \frac{(p_2-p_1)h - q(p_2-q)}{(p_2-p_1)h - p_1(p_2-q)} \quad \text{или} \quad h = \frac{q(p_2-q)}{p_2-p_1}\cdot\frac{1-p_1 r}{1-qr}. \tag{1.10}$$

Тогда

$$h-q=\frac{q(p_1-q)(1-p_2r)}{(p_2-p_1)(1-qr)},$$

$$(p_2-p_1)h-p_1(p_2-q)=-\frac{(p_2-q)(p_1-q)}{1-qr}.$$

Подставляя полученные выражения в решение (1.8), получаем формулу для y в терминах переменной r:

$$y=\delta(1-p_1r)^{\frac{1}{p_1}}(1-p_2r)^{-\frac{1}{p_2}}, \tag{1.11}$$

где δ – новый параметр, который обозначен именно буквой δ, поскольку в этом случае естественная область определения функции g окажется как раз нужным нам интервалом $[1,\delta]$. Действительно, мы знаем, что уравнение (1.11) относительно переменной r имеет ровно два решения $r^\pm=u^\pm_{p_1,p_2}(\frac{y}{\delta})$ при $y<\delta$. Максимальное значение $y=\delta$ достигается только при $r=0$. Значение $y=1$ принимается при $r^\pm=s^\pm\stackrel{\mathrm{def}}{=}u^\pm_{p_1,p_2}(\frac{1}{\delta})$. Знак переменной r выберем в зависимости от значения q и от того, какую функцию мы рассматриваем, $\mathbf{B}_{\max}$ или $\mathbf{B}_{\min}$. Отметим, что в отличие от h, переменная r не зависит от q: $r=r(y;p_1,p_2,\delta)$. Тождество (1.11) нам будет полезно также в следующих двух видах:

$$y=\Big(\frac{1-p_1r}{1-p_1s}\Big)^{\frac{1}{p_1}}\Big(\frac{1-p_2s}{1-p_2r}\Big)^{\frac{1}{p_2}},$$

$$\xi_1\Big(\frac{1-p_1s}{1-p_1r}\Big)^{\frac{1}{p_1}}=\xi_2\Big(\frac{1-p_2s}{1-p_2r}\Big)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Перепишем теперь уравнение для g в терминах переменной r:

$$\frac{dg}{g}=h\,\frac{dy}{y}=\frac{q(p_2-q)}{p_2-p_1}\cdot\frac{1-p_1r}{1-qr}\Big(\frac{1}{1-p_2r}-\frac{1}{1-p_1r}\Big)dr$$
$$=\left(\frac{q}{1-p_2r}-\frac{q}{1-qr}\right)dr.$$

Учитывая начальное условие $g|_{y=1}=g|_{r=s}=1$, получаем

$$\log g=\int\limits_r^s\left(\frac{q}{1-p_2t}-\frac{q}{1-qt}\right)dt=\frac{q}{p_2}\log\frac{1-p_2s}{1-p_2r}+\log\frac{1-qr}{1-qs},$$

т.е.

$$g(x;p_1,p_2,q,\delta)=\frac{1-qr}{1-qs}\Big(\frac{1-p_2s}{1-p_2r}\Big)^{\frac{q}{p_2}}.$$

Итак, мы получили выражение для функции Беллмана $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}(x;p_1,p_2,q,\delta)=x_2^{q/p_2}\frac{1-qr}{1-qs}\Big(\frac{1-p_2s}{1-p_2r}\Big)^{\frac{q}{p_2}},$$

и для функции $\mathbf{M}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(\xi;p_1,p_2,q,\delta)&=\xi_2\Big(\frac{1-qr}{1-qs}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{1-p_2s}{1-p_2r}\Big)^{\frac{1}{p_2}}\\&=\xi_1\Big(\frac{1-qr}{1-qs}\Big)^{\frac{1}{q}}\Big(\frac{1-p_1s}{1-p_1r}\Big)^{\frac{1}{p_1}}.\end{aligned}$$

Нам остаётся только выбрать знак величин r и s таким образом, чтобы удовлетворить условию (1.9).

Дифференцируя соотношение (1.10), мы видим, что производная

$$\frac{\partial h}{\partial r}=-\frac{q(p_2-q)(p_1-q)}{(p_2-p_1)(1-qr)^2}$$

не меняет знака. Для $\mathbf{B}_{\max}$ условие (1.9) можно переписать в виде $h(r)\leqslant h(0)$, а для $\mathbf{B}_{\min}$ должно выполняться обратное неравенство. Следовательно, для $\mathbf{B}_{\max}$ переменная r должна иметь знак, противоположный знаку производной $\frac{\partial h}{\partial r}$, т.е. $\operatorname{sign} r=\operatorname{sign}[q(p_2-q)(p_1-q)]$. Здесь получается довольно много вариантов в зависимости от знаков показателей p_1 и p_2. Однако ситуация гораздо проще для функции $\mathbf{M}(\xi)$: так как $\mathbf{M}_{\max}=\mathbf{B}_{\max}^{1/q}$ для положительных q и $\mathbf{M}_{\max}=\mathbf{B}_{\min}^{1/q}$ для отрицательных q, то у $\mathbf{M}_{\max}$ и $\mathbf{B}_{\max}$ переменная r имеет один и тот же знак при $q>0$ и противоположные знаки при $q<0$, то есть для $\mathbf{M}_{\max}$ должно быть $\operatorname{sign} r=\operatorname{sign}[(p_2-q)(p_1-q)]$. Таким образом, мы получаем те знаки, которые указаны в теореме 1: $r=r^+$, если $q<p_2$ или $q>p_1$, и $r=r^-$ при $p_2<q<p_1$. Соответственно, для $\mathbf{M}_{\min}$ нужно брать r противоположного знака.

Заметим, что для того, чтобы переменная y пробегала интервал $[1,\delta]$, переменная r^+ должна пробегать интервал $[0,s^+]$ или переменная r^- – интервал $[s^-,0]$. Условие (1.9), наложенное на h, означает, что h сохраняет свой знак, когда переменная r пробегает указанные интервалы. Поскольку

$$h(r) - h(0) = -\frac{q(p_2-q)(p_1-q)r}{(p_2-p_1)(1-qr)},$$

функция $r \mapsto 1-qr$ не должна менять знака на интервалах $r^+ \in [0, s^+]$ и $r^- \in [s^-, 0]$, таким образом мы можем использовать переменную r^+ только при $q < \frac{1}{s^+}$, а переменную r^- – при $q > \frac{1}{s^-}$. Это отражает то обстоятельство, что при $q \geqslant \frac{1}{s^+}$ функция $\mathbf{M}_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, \delta)$ равна бесконечности, а при $q \leqslant \frac{1}{s^-}$ функция $\mathbf{M}_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, \delta)$ равна нулю всюду, за исключением границы $\xi_1 = \xi_2$.

Итак, мы построили функцию Беллмана $\mathbf{B}$ и функцию $\mathbf{M}$ для произвольных показателей p_i, q, отличных от нуля и бесконечности. Простейший способ получить функцию Беллмана для этих особых показателей – это перейти к соответствующему пределу в выражениях (0.6)–(0.7), получить одну из формул (4.1)–(4.42), после чего уже перейти от функции $\mathbf{M}$ к функции $\mathbf{B}$.

Более строгий способ вывода этих выражений – повторить всю процедуру нахождения подходящего решения уравнения Беллмана, аналогично тому, как это было сделано для показателей общего вида. Рассмотрим сперва, например, случай $p_2 = 0$. Как и раньше, мы ищем вогнутую функцию $\mathbf{B}_{\max}$ и выпуклую функцию $\mathbf{B}_{\min}$ на некоторой области Ω_δ. Теперь функция $\mathbf{B}$ имеют вид

$$\mathbf{B}(x_1, x_2; p_1, 0, q, \delta) = e^{qx_2} g(x_1 e^{-p_1 x_2}; p_1, q, \delta), \tag{1.12}$$

где $g(\,\cdot\,; p_1, q, \delta)$ – функция на промежутке $[1, \delta]$, удовлетворяющие граничному условию $g(1; p_1, q, \delta) = 1$, а кроме того, $g \geqslant 1$ при всех значениях q, поскольку $e^{qx_2} \leqslant e^{q\langle \log w\rangle} \leqslant \langle w^q\rangle$. Всё это – следствия соотношения

$$\mathbf{B}(t^{p_1} x_1, x_2 + \log t; p_1, 0, q, \delta) = t^q \mathbf{B}(x_1, x_2; p_1, 0, q, \delta),$$

которое является результатом совместного рассмотрения двух семейств весов: w, $w \in A^\delta_{p_1,0}(J)$, и $\tilde{w} = tw$, где t – произвольная положительная постоянная. Граничное условие $g(1; p_1, q, \delta) = 1$ вытекает из того, что равенство $x_1 = e^{p_1 x_2}$ имеет место тогда и только тогда, когда $w = e^{x_2} = \mathrm{const}$, т.е. $\mathbf{B}(e^{p_1 x_2}, x_2; p_1, 0, q, \delta) = e^{qx_2}$.

Мы снова вводим новую переменную $y = x_1 e^{-p_1 x_2}$ и вычисляем матрицу (0.16), используя представление (1.12):

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = \frac{y}{x_1}, \qquad \frac{\partial y}{\partial x_2} = -p_1 y,$$
$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_1} = e^{(q-p_1)x_2} g', \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_2} = e^{qx_2}(qg - p_1 y g''),$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_1^2} = e^{(q-2p_1)x_2} g'', \qquad \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_1 \partial x_2} = e^{(q-p_1)x_2}\big((q-p_1)g' - p_1 y g''\big),$$
$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_2^2} = e^{qx_2}\big((q^2 g - p_1(2q-p_1) y g' + p_1^2 y^2 g'')\big) \qquad ;$$

значит, матрица (0.16) принимает вид

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = e^{qx_2} \begin{pmatrix} e^{-p_1 x_2} & 0 \\ -p_1 y & 1 \end{pmatrix} R \begin{pmatrix} e^{-p_1 x_2} & -p_1 y \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где

$$R = \begin{pmatrix} g'' & (q-p_1)g' \\ (q-p_1)g' & q^2 g - p_1^2 y g' \end{pmatrix}.$$

Как и раньше, требуем, чтобы эта матрица была вырожденной:

$$(q^2 g - p_1^2 y g')g'' = (q-p_1)^2 (g')^2 \tag{1.13}$$

и отрицательно определённой (для $\mathbf{B}_{\max}$), либо положительно определённой (для $\mathbf{B}_{\min}$):

$$p_1^2 y g'_{\min} - q^2 g_{\min} \leqslant 0 \leqslant p_1^2 y g'_{\max} - q^2 g_{\max}. \tag{1.14}$$

Как и прежде, делаем подстановку $h = \frac{yg'}{g}$, уравнение (1.13) принимает вид

$$h'(q^2 - p_1^2 h) y = h(p_1 h - q)^2.$$

Решая его, получаем

$$y = \frac{c_y h}{p_1 h - q} \exp\left(\frac{p_1 - q}{p_1 h - q}\right), \tag{1.15}$$

а неравенство (1.14) принимает вид

$$h_{\min} \leqslant \frac{q^2}{p_1^2} \leqslant h_{\max}. \tag{1.16}$$

Как и прежде, вводим переменную r:

$$r = \frac{p_1^2 h - q^2}{p_1 q(p_1 h - q)} \quad \text{или} \quad h = \frac{q^2(1-p_1 r)}{p_1^2(1-qr)}.$$

Тогда выражение (1.15) переписывается в виде

$$y = \delta(1-p_1 r)e^{p_1 r},$$

где $\delta = \frac{c_y}{p_1(q-p_1)}\exp(-\frac{p_1}{q})$, и, следовательно, $r = r^{\pm} = u^{\pm}(\frac{y}{\delta})$. Знак переменной r, как и прежде, определяется условием (1.16). Переписывая уравнение для g в терминах r, получим

$$\frac{dg}{g} = h\frac{dy}{y} = -\frac{q^2 r}{1-qr}dr = \Bigl(q - \frac{q}{1-qr}\Bigr)dr,$$

и, следовательно, как и прежде,

$$\log g(y) = \int\limits_s^r \Bigl(q - \frac{q}{1-qt}\Bigr)dt = q(r-s) + \log\frac{1-qr}{1-qs},$$

то есть

$$g(y) = \frac{1-qr}{1-qs}e^{q(r-s)}.$$

В результате получаем формулу

$$\mathbf{B}(x;p_1,0,q,\delta) = e^{qx_2}g(y;p_1,q,\delta) = e^{q(x_2+r-s)}\frac{1-qr}{1-qs}.$$

Знаки r и s выбираются в соответствии с условием (1.16). Формулы (4.13)–(4.14) мы получим, если возведём выражение для $\mathbf{B}$ в степень $1/q$ и вспомним тождество

$$\xi_1\Bigl(\frac{1-p_1 s}{1-p_1 r}\Bigr)^{\frac{1}{p_1}} = \xi_2 e^{r-s} = e^{x_2+r-s}\,.$$

Теперь перейдём к более трудному предельному случаю $p_i = \pm\infty$. Для примера рассмотрим один из возможных вариантов, пусть это будет $p_2 = -\infty$. Разумеется, чтобы найти кандидата на роль функции Беллмана, можно перейти к пределу $p_2 \to -\infty$ в формулах (0.6)–(0.7). Попытаемся, однако, приспособить к нашему частному случаю рассуждения, уже встречавшиеся в этом добавлении. Ситуация примечательна тем, что условие (0.12) больше не выражает обычную выпуклость функции, а условие (0.13) – обычную вогнутость.

Как и раньше, будем рассматривать три точки, лежащие в области $\Omega_\delta(p_1,-\infty)$: $x^\pm$ и $x^0=(\alpha^- x_1^- + \alpha^+ x_1^+, \min x_2^\pm)$. Для заданного веса w такая тройка возникает, если взять

$$x^0 = (\langle w^{p_1}\rangle_I, \inf_I w), \qquad x^\pm = (\langle w^{p_1}\rangle_{I^\pm}, \inf_{I^\pm} w),$$

где $I=I^-\cup I^+$ – разбиение интервала I на части длины $|I^\pm|=\alpha^\pm|I|$.

Предполагая функцию $\mathbf{B}$ достаточно гладкой, рассмотрим её разложение Тейлора в окрестности точки x^0 до членов второго порядка:

$$\mathbf{B}(x^\pm)\approx \mathbf{B}(x^0)+\sum_{i=1}^2\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_i}(x^0)(x_i^\pm - x_i^0) \\ +\frac12\sum_{i,j=1}^2\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x_i\partial x_j}(x^0)(x_i^\pm - x_i^0)(x_j^\pm - x_j^0). \quad (1.17)$$

Поскольку одно из значений $x_2^\pm$ совпадает с x_2^0, мы для определённости будем считать, что $x_2^- = x_2^0$ и $\Delta_2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} x_2^+ - x_2^0 \geqslant 0$. Напомним, что $x_1^0=\alpha^- x_1^- + \alpha^+ x_1^+$, и положим $\Delta_1 = x_1^+ - x_1^-$. Взяв линейную комбинацию выражений (1.17) с коэффициентами $\alpha^\pm$, получим

$$\alpha^-\mathbf{B}(x^-)+\alpha^+\mathbf{B}(x^+)-\mathbf{B}(x^0) \\ \approx \alpha^+\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x_2}\Delta_2+\frac12\alpha^-\alpha^+\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x_1^2}\Delta_1^2+\alpha^-\alpha^+\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x_1\partial x_2}\Delta_1\Delta_2+\frac12\alpha^+\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x_2}\Delta_2^2.$$

Для функции $\mathbf{B}_{\max}$ это выражение должно быть неположительно для всех малых Δ_1 и для положительных малых Δ_2. Это приводит к неравенствам

$$\frac{\partial\mathbf{B}_{\max}}{\partial x_2}\leqslant 0, \qquad \frac{\partial^2\mathbf{B}_{\max}}{\partial x_1^2}\leqslant 0.$$

Для функции $\mathbf{B}_{\min}$ должны выполняться противоположные неравенства. К этому нужно добавить условие вырожденности (которое, собственно, и даёт уравнение Беллмана), и, таким образом, мы получаем две возможности:

$$\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial x_1^2}=0, \quad \frac{\partial\mathbf{B}_{\max}}{\partial x_2}\leqslant 0, \quad \frac{\partial\mathbf{B}_{\min}}{\partial x_2}\geqslant 0; \qquad (1.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\max}}{\partial x_1^2} \leqslant 0, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{B}_{\min}}{\partial x_1^2} \geqslant 0. \tag{1.19}$$

Рассматривая вместе с весом $w \in A^{\delta}_{p_1,-\infty}$ семейство весов $\tilde{w} = tw$, получаем тождество

$$\mathbf{B}(t^{p_1}x_1, tx_2; p_1, -\infty, q, \delta) = t^q \mathbf{B}(x_1, x_2; p_1, -\infty, q, \delta), \quad t > 0.$$

Полагая $t = x_1^{-1/p_1}$, приходим к следующему соотношению:

$$\mathbf{B}\Big(1, x_1^{-\frac{1}{p_1}} x_2; p_1, -\infty, q, \delta\Big) = x_1^{-\frac{q}{p_1}} \mathbf{B}(x_1, x_2; p_1, -\infty, q, \delta).$$

Следовательно, $\mathbf{B}(x) = x_1^{\frac{q}{p_1}} g(x_1^{\frac{1}{p_1}} x_2^{-1})$, где g – функция на промежутке $[1, \delta]$, заданная тождеством $g(y) = \mathbf{B}(1, y^{-1})$.

Поскольку неравенство $\mathbf{B}(x)^{\frac{1}{q}} = \mathbf{M}(x) \geqslant x_1^{\frac{1}{p_1}}$ справедливо тогда и только тогда, когда $q \geqslant p_1$ (см. замечание 1), должно выполняться следующее неравенство для g: $0 \leqslant g \leqslant 1$, если $\min\{p_1, 0\} \leqslant q \leqslant \max\{p_1, 0\}$, и $g \geqslant 1$ в противном случае. Более того, так как тождество $x_2 = x_1^{1/p_1}$ справедливо тогда и только тогда, когда $w = x_1^{1/p_1} = \mathrm{const}$, то $\mathbf{B}(x_1, x_1^{1/p_1}; q, \delta) = x_1^q$, т.е. $g(1; p_1, q, \delta) = 1$.

Сперва найдём решение, удовлетворяющее условиям (1.18). Это должна быть функция, линейная по x_1, т.е.

$$\mathbf{B}(x) = a(x_2) + b(x_2)x_1 = x_1^{\frac{q}{p_1}} g(x_1^{\frac{1}{p_1}} x_2^{-1}).$$

Полагая $x_1 = x_2^{p_1}$, получим $a(x_2) = x_2^q - b(x_2)x_2^{p_1}$, откуда

$$x_2^q + b(x_2)(x_1 - x_2^{p_1}) = \mathbf{B}(x) = x_1^{\frac{q}{p_1}} g(x_1^{\frac{1}{p_1}} x_2^{-1}).$$

Следовательно,

$$b(x_2)x_2^{p_1-q} = \frac{(x_1^{\frac{1}{p_1}} x_2^{-1})^q g(x_1^{\frac{1}{p_1}} x_2^{-1}) - 1}{(x_1^{\frac{1}{p_1}} x_2^{-1})^{p_1} - 1} = \frac{y^q g(y) - 1}{y^{p_1} - 1} \stackrel{\mathrm{def}}{=} c = \mathrm{const}$$

и

$$g(y) = cy^{p_1-q} + (1-c)y^{-q},$$
$$\mathbf{B}(x) = cx_1x_2^{q-p_1} + (1-c)x_2^q.$$

Теперь перейдём ко второму условию в (1.18) и проверим знак производной по x_2:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_2} = c(q-p_1)x_1 x_2^{q-p_1-1} + (1-c)qx_2^{q-1} \\ = x_2^{q-1}\big(c(q-p_1)y^{p_1} + (1-c)q\big).$$

Это выражение должно сохранять знак во всей области Ω_δ, то есть, когда y пробегает весь интервал $[1,\delta]$. Если при $y=\delta$ производная не обращается в ноль, то мы получим функцию с нужным свойством "выпуклости"/"вогнутости" на большей области. Это будет так называемым суперрешением нашей задачи, а точная функция Беллмана не продолжается с сохранением требуемых свойств в бóльшую область. Поэтому константу c мы выберем так, чтобы производная обращалась в ноль в точках границы $y=\delta$, то есть

$$c(p_1-q)\delta^{p_1} + (1-c)q = 0,$$

$$c = \frac{q}{(p_1-q)\delta^{p_1}+q}.$$

Теперь, поскольку знак производной не меняется, его можно узнать, подставив значение $y=1$:

$$\operatorname{sign}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x_2} = \operatorname{sign}\big(c(q-p_1)+(1-c)q\big) = \operatorname{sign}\frac{q(q-p_1)}{q-p_1(1-\delta^{-p_1})^{-1}}.$$

В силу соотношения между функциями $\mathbf{B}$ и $\mathbf{M}$ мы получаем те выражения, что приведены в формулах (4.11)–(4.12).

Теперь рассмотрим второй случай, когда выполняются условия (1.19), откуда сразу же вытекает, что в представлении $\mathbf{B} = x_1^{q/p_1} g(x_1^{1/p_1}x_2^{-1})$ функция g постоянна, и, стало быть, $g=1$, т.е. $\mathbf{B} = x_1^{q/p_1}$. Чтобы понять, какую из двух функций, $\mathbf{B}_{\min}$ или $\mathbf{B}_{\max}$, она представляет, нужно только посмотреть на знак её второй производной:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial x_1^2} = \frac{q(q-p_1)}{p_1^2} x_1^{\frac{q}{p_1}-2},$$

поэтому $\mathbf{B}_{\max} = x_1^{q/p_1}$, если $\min\{p_1,0\} \leqslant q \leqslant \max\{p_1,0\}$, и $\mathbf{B}_{\min} = x_1^{q/p_1}$ в противном случае. Опять же, учитывая соотношения между

B и **M**, мы получаем, что $\mathbf{M}_{\max} = \xi_1$ при $q \leqslant p_1$ и $\mathbf{M}_{\min} = \xi_1$ при $q \geqslant p_1$. Это даёт нам вторую половину формул (4.11)–(4.12).

И последнее замечание в этом добавлении. Если мы посмотрим на формулы (4.37)–(4.42), то обнаружим, что у нас не было таких степенных решений. Оказывается, мы потеряли их, решая уравнение (1.6). Переходя к уравнению (1.7), мы поделили на полином третьей степени, потеряв тем самым три постоянных решения, когда h тождественно равно одному из корней этого полинома, а именно,

$$h = 0 \quad \Longrightarrow \quad g = 1 \quad \Longrightarrow \quad M(\xi) = \xi_2,$$

$$h = q \quad \Longrightarrow \quad g = y^q \quad \Longrightarrow \quad M(\xi) = \xi_1,$$

$$h = \frac{p_1(p_2 - q)}{p_2 - p_1} \quad \Longrightarrow \quad g = y^{\frac{p_1(p_2-q)}{p_2-p_1}} \quad \Longrightarrow$$

$$M(\xi) = \xi_2 \left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{\frac{p_1(p_2-q)}{p_2-p_1}} = \xi_1^{\frac{p_1(q-p_2)}{p_1-p_2}} \xi_2^{\frac{p_2(p_1-q)}{p_1-p_2}}.$$

Это в точности и есть три потерянных решения, которые нам нужны в случае $\delta = \infty$.

Добавление 2: как найти экстремальную функцию. В доказательстве леммы 1 требуемая экстремальная функция была предъявлена без каких бы то ни было пояснений. Теперь мы объясним, как её найти.

Поскольку для экстремальной функции в (0.19)–(0.22) имеет место равенство с соответствующей стороны (для $\mathbf{B}_{\min}$, разумеется, своя экстремальная функция, а для $\mathbf{B}_{\max}$ – своя), необходимо равенство на каждом шаге разбиения в цепочке неравенств (0.23)–(0.24). Это означает, что в процессе разбиения мы должны “идти” только вдоль векторного поля, задаваемого векторами из ядра матрицы (0.16). Из (0.17) мы получаем уравнение траекторий, на которых функции **B** являются линейными:

$$\frac{1 - p_1 r}{p_1 x_1} dx_1 = \frac{1 - p_2 r}{p_2 x_1} dx_2. \tag{2.1}$$

Соответствующие траектории – это семейство отрезков касательных

$$p_1 b^{-p_2} x_2 - p_2 (\delta b)^{-p_1} x_1 = p_1 - p_2 \tag{2.2}$$

к графику функции $x_1^{1/p_1}x_2^{-1/p_2}=\delta$ в точке $\big((\delta b)^{p_1}, b^{p_2}\big)$ между точкой касания и точкой $\big((\delta b)^{p_1}(1-p_1 s), b^{p_2}(1-p_2 s)\big)$ пересечения с другой границей области Ω_δ, а именно, $x_1^{1/p_1}x_2^{-1/p_2}=1$. Проверим это утверждение.

Вместе с уравнением (2.1) нужно использовать определение величины r: $r=u^{\pm}_{p_1,p_2}\big(\frac{x_1^{1/p_1}}{\delta x_2^{1/p_2}}\big)$, т.е.

$$\delta(1-p_1 r)^{1/p_1}(1-p_2 r)^{-1/p_2}=x_1^{1/p_1}x_2^{-1/p_2}, \tag{2.3}$$

откуда

$$\frac{(p_2-p_1)r\,dr}{(1-p_1 r)(1-p_2 r)}=\frac{dx_1}{p_1x_1}-\frac{dx_2}{p_2x_2}.$$

Из этого уравнения и уравнения (2.1) получаем

$$x_1(r)=x_1(0)(1-p_1 r),\quad x_2(r)=x_2(0)(1-p_2 r). \tag{2.4}$$

Если взять $x_2(0)=b^{p_2}$ в качестве свободного параметра, то из уравнения (2.3) с $r=0$ получаем $x_1(0)=(\delta b)^{p_1}$, и, исключая r из (2.4), получаем уравнение (2.2). На самом деле мы построили два семейства отрезков

$$\omega_\delta^+(b)=\{x=\big((\delta b)^{p_1}(1-p_1 r), b^{p_2}(1-p_2 r)\big)\colon 0\leqslant r\leqslant s^+\},$$
$$\omega_\delta^-(b)=\{x=\big((\delta b)^{p_1}(1-p_1 r), b^{p_2}(1-p_2 r)\big)\colon s^-\leqslant r\leqslant 0\}.$$

Каждое из них покрывает всю область Ω_δ:

$$\Omega_\delta=\bigcup_{b>0}\omega_\delta^+(b)=\bigcup_{b>0}\omega_\delta^-(b).$$

Функции $\mathbf{B}_{\max}$ и $\mathbf{B}_{\min}$ являются линейными на соответствующих отрезках (нужно брать тот же знак у ω, какой выбирается для r в выражении для $\mathbf{B}$ согласно формулам теоремы 2). Действительно,

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(x)&=x_i^{\frac{q}{p_i}}\frac{1-qr}{1-qs}\left(\frac{1-p_i s}{1-p_i r}\right)^{\frac{q}{p_i}}\\&=\big(x_i(0)(1-p_i r)\big)^{\frac{q}{p_i}}\frac{1-qr}{1-qs}\left(\frac{1-p_i s}{1-p_i r}\right)^{\frac{q}{p_i}}\\&=\frac{1-qr}{1-qs}\big(x_i(0)(1-p_i s)\big)^{\frac{q}{p_i}}.\end{aligned}$$

Заметим, что существует еще одна “допустимая траектория” – та граница области, которая является огибающей семейства отрезков $\omega_\delta^+(b)$ (или $\omega_\delta^-(b)$): $x_1^{1/p_1}x_2^{-1/p_2}=\delta$.

Сперва рассмотрим случай, когда точки лежат на этой границе: $x_2^0 = b^{p_2}$, b – произвольное положительное число и $x_1^0 = (\delta b)^{p_1}$. Пусть $I=[0,1]$. Разобьем этот интервал в некоторой точке a: $I^-=[0,a]$, $I^+=[a,1]$. Точки $x^\pm$ обязаны лежать на нашей “допустимой траектории”, т.е. на графике функции $x_1^{1/p_1}x_2^{-1/p_2}=\delta$ с одной стороны от точки x^0 (пусть это будет точка x^-) и на прямой $p_1b^{-p_2}x_2 - p_2(\delta b)^{-p_1}x_1 = p_1 - p_2$ с другой (точка x^+). Но, строго говоря, невозможно, чтобы такие три точки лежали на одной прямой, поскольку прямая, проходящая через x^+ и x^0, является касательной, а прямая, проходящая через x^- и x^0, пересекает кривую $x_1^{1/p_1}x_2^{-1/p_2}=\delta$ в этих двух точках. Поэтому допустимое разбиение может быть только инфинитезимальным, и мы можем предсталять его как процесс отрезания от правого конца отрезка бесконечно малых интервалов. При этом правая точка x^+ будет скользить по границе $x_1^{1/p_1}x_2^{-1/p_2}=1$ (на бесконечно малом интервале естественно считать функцию постоянной, равной значению в соответствующей точке), а левая – по границе $x_1^{1/p_1}x_2^{-1/p_2}=\delta$. Тогда при всех $a\in[0,1]$ мы можем записать тождество, означающее, что точка x^- остаётся на границе области:

$$\Big(\frac{1}{a}\int\limits_0^a w(t)^{p_1}\,dt\Big)^{\frac{1}{p_1}}\Big(\frac{1}{a}\int\limits_0^a w(t)^{p_2}\,dt\Big)^{-\frac{1}{p_2}}=\delta. \tag{2.5}$$

Если ввести функцию

$$v(a)=\int\limits_0^a w(t)^{p_1}\,dt,$$

то после подстановки $w(t)=v'(t)^{1/p_1}$ в (2.5) получим

$$\delta^{p_2}\int\limits_0^a v'(t)^{p_2/p_1}\,dt = a\Big(\frac{v}{a}\Big)^{p_2/p_1}.$$

Дифференцирование этого равенства приводит к уравнению

$$\big(1-\frac{p_2}{p_1}\big)t^{-\frac{p_2}{p_1}}v^{\frac{p_2}{p_1}}+\frac{p_2}{p_1}t^{1-\frac{p_2}{p_1}}v^{\frac{p_2}{p_1}-1}=\delta^{p_2}(v')^{\frac{p_2}{p_1}}$$

или
$$\left(\frac{v}{tv'}\right)^{\frac{1}{p_1}}\left(1-\frac{p_2}{p_1}\left(1-\frac{tv'}{v}\right)\right)^{\frac{1}{p_2}}=\delta.$$

Если мы введём новую функцию $\psi=\frac{1}{p_1}\left(1-\frac{tv'}{v}\right)$, то последнее уравнение перепишется в виде

$$(1-p_1\psi)^{-\frac{1}{p_1}}(1-p_2\psi)^{\frac{1}{p_2}}=\delta=(1-p_1s)^{-\frac{1}{p_1}}(1-p_2s)^{\frac{1}{p_2}},$$

откуда ясно, что наше уравнение имеет два решения

$$\psi=u^{\pm}_{p_1,p_2}\left(\frac{1}{\delta}\right)=s^{\pm}.$$

Следовательно,
$$1-\frac{tv'}{v}=p_1s,$$
$$\frac{dv}{v}=(1-p_1s)\frac{dt}{t},$$
$$v=\mathrm{const}\cdot t^{1-p_1s},$$
$$w=(v')^{1/p_1}=\mathrm{const}\cdot t^{-s}.$$

Поскольку мы знаем, что $\langle w^{p_1}\rangle=x_1^0$, легко получаем значение константы: $\mathrm{const}^{p_1}=x_1^0(1-p_1s)$. Итак,

$$w=(x_1^0)^{1/p_1}(1-p_1s)^{1/p_1}t^{-s}. \tag{2.6}$$

Пусть теперь x^0 – произвольная точка области Ω_δ. Тогда выберем параметр b так, чтобы точка x^0 лежала на отрезке ω_b, то есть координаты точки x^0 удовлетворяли уравнению (2.2), и сделаем следующее разбиение: $x^-=\big((\delta b)^{p_1},b^{p_2}\big)$, $x^+=\big((\delta b)^{p_1}(1-p_1s),b^{p_2}(1-p_2s)\big)$. Так как точка x^+ отвечает значению $r=s$ в (2.4), точка x^- – значению $r=0$, а точка x^0 – значению $r=r^0=u_{p_1,p_2}((x_1^0)^{1/p_1}(x_2^0)^{-1/p_2}\delta^{-1})$, уравнения (2.4) дают следующие соотношения:

$$x_i^0=x_i^-(1-p_ir^0),\quad x_i^+=x_i^-(1-p_is).$$

Для точки разбиения $a=\alpha^-$ получаем

$$a=\alpha^-=\frac{x_i^0-x_i^+}{x_i^--x_i^+}=1-\frac{r^0}{s}.$$

Поскольку $(x_1^+)^{1/p_1} = (x_2^+)^{1/p_2}$, функция w постоянна на I^+, т.е.

$$w|_{I^+} = (x_1^+)^{1/p_1} = \Big(x_1^0 \frac{1-p_1 s}{1-p_1 r^0}\Big)^{\frac{1}{p_1}},$$

а на промежутке I^- нужно взять экстремальную функцию (2.6), перенормировав её по отношению к этому интервалу:

$$w|_{I^-} = w = (x_1^-)^{1/p_1}(1-p_1 s)^{1/p_1}\Big(\frac{t}{a}\Big)^{-s} = \Big(x_1^0 \frac{1-p_1 s}{1-p_1 r^0}\Big)^{\frac{1}{p_1}}\Big(\frac{t}{a}\Big)^{-s}.$$

Это и даёт нам экстремальную функцию, использовавшуюся в доказательстве леммы 1 (см. (0.15)).

Добавление 3: как вычислить A_{p_1,p_2}-"норму" экстремальной функции. Несмотря на симметрию задачи относительно показателей p_1, p_2, мне не удалось найти более простого, чем в [1], способа вычисления A_{p_1,p_2}-"нормы", поэтому и для нашей, более общей ситуации будем следовать той довольно искусственной схеме, которая была предложена в упомянутой статье.

Поскольку A_{p_1,p_2}-"норма" (т. е. минимальное значение величины δ в оценке (0.1)) не меняется при умножении веса на константу, мы можем вычислять супремум выражения

$$\langle w^{p_1}\rangle_I^{\frac{1}{p_1}} \langle w^{p_2}\rangle_I^{-\frac{1}{p_2}} \tag{3.1}$$

для веса

$$w_{a,\nu}(t) = \begin{cases} a^\nu t^{-\nu} & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant a, \\ 1 & \text{при} \quad a \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Рассмотрим интервалы $I=[\alpha,\beta]$ с условием $0 \leqslant \alpha < a \leqslant \beta \leqslant 1$. Среднее $\langle w^p\rangle_{[0,1]}^{1/p}$ конечно, если $p\nu < 1$. Непосредственным вычислением получаем:

$$\langle w^p\rangle_{[\alpha,\beta]} = \frac{\beta(1-p\nu) + ap\nu - \alpha^{1-p\nu}a^{p\nu}}{(1-p\nu)(\beta-\alpha)}. \tag{3.2}$$

Введём две новых переменных:

$$\lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\alpha^{1-p_i\nu}a^{p_i\nu}}{\beta(1-p_i\nu)+ap_i\nu},$$

предполагая, естественно, что $p_i\nu < 1$. Из условия $0 \leqslant \alpha < a \leqslant \beta$ вытекают неравенства $0 \leqslant \lambda_i < 1$. Действительно, $\beta(1-p_i\nu)+ap_i\nu = (\beta-a)(1-p_i\nu)+a \geqslant a$, и, следовательно,

$$\lambda_i \leqslant \frac{\alpha^{1-p_i\nu}a^{p_i\nu}}{a} = \Big(\frac{\alpha}{a}\Big)^{1-p_i\nu} < 1.$$

Отметим, что $\lambda_i = 0$ тогда и только тогда, когда $\alpha = 0$. Введём еще один параметр:

$$K = \Big(1-p_1\nu+\frac{a}{\beta}p_1\nu\Big)^{\frac{1}{p_1}}\Big(1-p_2\nu+\frac{a}{\beta}p_2\nu\Big)^{-\frac{1}{p_2}} = (1-p_1\tau)^{\frac{1}{p_1}}(1-p_2\tau)^{-\frac{1}{p_2}},$$

где переменная $\tau = \nu(1-\frac{a}{\beta})$ меняется в области определения функции (0.5), которая, как мы знаем, принимает значения от 0 до 1. Таким образом, $0 < K \leqslant 1$. Переписывая выражение (3.1) в новых терминах, получаем

$$\langle w^{p_1}\rangle_I^{\frac{1}{p_1}}\langle w^{p_2}\rangle_I^{-\frac{1}{p_2}} = K\delta(1-\lambda_1)^{\frac{1}{p_1}}(1-\lambda_2)^{-\frac{1}{p_2}}\big(1-\frac{\alpha}{\beta}\big)^{\frac{1}{p_2}-\frac{1}{p_1}},$$

где

$$\delta = (1-p_1\nu)^{\frac{1}{p_1}}(1-p_2\nu)^{-\frac{1}{p_2}}. \tag{3.3}$$

Если $\alpha = 0$, то выражение $\langle w^{p_1}\rangle_I^{\frac{1}{p_1}}\langle w^{p_2}\rangle_I^{-\frac{1}{p_2}} = K\delta$ достигает своего максимального значения δ при $K = 1$, т.е. при $\beta = a$. Поэтому в дальнейшем мы будем считать, что $\alpha > 0$, и, стало быть, $\lambda_i > 0$. Далее мы заменим дробь $\frac{\alpha}{\beta}$ величиной $K^{-\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}\lambda_1^{-\frac{p_2}{p_1-p_2}}\lambda_2^{\frac{p_1}{p_1-p_2}}$. Мы можем это сделать, поскольку

$$K\lambda_1^{\frac{1}{p_1}}\lambda_2^{-\frac{1}{p_2}} = \Big(\frac{\alpha^{1-p_1\nu}a^{p_1\nu}}{\beta}\Big)^{\frac{1}{p_1}}\Big(\frac{\alpha^{1-p_2\nu}a^{p_2\nu}}{\beta}\Big)^{-\frac{1}{p_2}} = \Big(\frac{\alpha}{\beta}\Big)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}}. \tag{3.4}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}&\langle w^{p_1}\rangle_I^{\frac{1}{p_1}}\langle w^{p_2}\rangle_I^{-\frac{1}{p_2}} \\ &= K\delta(1-\lambda_1)^{\frac{1}{p_1}}(1-\lambda_2)^{-\frac{1}{p_2}}\left(1-K^{-\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}\lambda_1^{-\frac{p_2}{p_1-p_2}}\lambda_2^{\frac{p_1}{p_1-p_2}}\right)^{\frac{p_1-p_2}{p_1p_2}}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Для того, чтобы показать, что A_{p_1,p_2}-“норма” веса $w_{a,\nu}$ равна δ, нам достаточно проверить, что функция φ,

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, K) \stackrel{\text{def}}{=} (1-\lambda_1)^{\frac{1}{p_1}}(1-\lambda_2)^{-\frac{1}{p_2}}\left(1 - K^{-\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}\lambda_1^{-\frac{p_2}{p_1-p_2}}\lambda_2^{\frac{p_1}{p_1-p_2}}\right)^{\frac{p_1-p_2}{p_1p_2}},$$

заданная на подмножестве $\{(\lambda_1,\lambda_2,K)\colon K^{p_1p_2}\lambda_1^{p_2}\lambda_2^{-p_1} > 1\}$ куба $(0,1)\times(0,1)\times(0,1]$, не превосходит 1. Данное ограничение необходимо, чтобы функция φ была корректно определена, и вытекает оно из равенства (3.4) и нашего первоначального соглашения $p_1 > p_2$. Заметим, что нам не нужно специально рассматривать интервалы с $\beta < a$, поскольку для таких β выражение (3.1) не зависит от a (a^ν – мультипликативная константа), и мы можем взять выражение (3.1) с $a = \beta$. Интервалы с $\alpha \geqslant a$ тоже рассматривать не нужно, поскольку для них выражение (3.1) равно 1.

Оставшиеся выкладки вполне формальны: сперва ищем максимум функции φ по переменной λ_1,

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\lambda_1} = (1-\lambda_1)^{\frac{1}{p_1}-1}(1-\lambda_2)^{-\frac{1}{p_2}}\left(1 - K^{-\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}\lambda_1^{-\frac{p_2}{p_1-p_2}}\lambda_2^{\frac{p_1}{p_1-p_2}}\right)^{\frac{p_1-p_2}{p_1p_2}-1} \times \frac{K^{-\frac{p_1p_2}{p_1-p_2}}\lambda_1^{-\frac{p_1}{p_1-p_2}}\lambda_2^{\frac{p_1}{p_1-p_2}} - 1}{p_1},$$

Последняя дробь – монотонно убывающая функция от λ_1 при всех p_i ($p_2 < p_1$). Поэтому функция $\varphi(\,\cdot\,,\lambda_2,K)$ принимает максимальное значение при $\lambda_1 = \lambda_2K^{-p_2}$:

$$\psi(\lambda_2,K) = \varphi(\lambda_2K^{-p_2},\lambda_2,K) = \left(\frac{1-\lambda_2K^{-p_2}}{1-\lambda_2}\right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Для обоснования последнего утверждения надо только убедиться, что найденная точка экстремума лежит в том подмножестве единичного куба, где определена функция φ. Во-первых, заметим, что для любой точки этого подмножества выполняется неравенство $\lambda_2K^{-p_2} < 1$: если $p_2 > 0$, то $p_1 > 0$, и $\lambda_2K^{-p_2} < \lambda_1^{p_2/p_1} < 1$, а если $p_2 < 0$, то $\lambda_2K^{-p_2} \leqslant \lambda_2 < 1$. Теперь если $\lambda_2 < \min\{K^{p_2},1\}$, $K \leqslant 1$, то точка (λ_1,λ_2,K) при $\lambda_1 = \lambda_2K^{-p_2}$ лежит в нашей области, поскольку

$$K^{p_1p_2}\lambda_1^{p_2}\lambda_2^{-p_1} = \left(\lambda_2K^{-p_2}\right)^{p_2-p_1} > 1.$$

Функция ψ – монотонно убывающая функция от λ_2. Действительно,

$$\frac{\partial\psi(\lambda_2,K)}{\partial\lambda_2}=\frac{(1-\lambda_2K^{-p_2})^{\frac{1}{p_2}-1}}{(1-\lambda_2)^{\frac{1}{p_2}+1}}\cdot\frac{1-K^{-p_2}}{p_2}\leqslant 0.$$

Таким образом, максимальное значение ψ равно 1 при $\lambda_2=0$, а следовательно, $\varphi\leqslant 1$, что и требовалось доказать.

Теперь отдельно убедимся в том, что в предельных случаях формула для A_{p_1,p_2}-"нормы" веса $w_{a,\nu}$ остаётся прежней, а именно:

$$\begin{array}{rlll}
e^{\nu}(1-p_2\nu)^{\frac{1}{p_2}} & \text{при} & p_1=0, & p_2\nu<1,\\
e^{-\nu}(1-p_1\nu)^{-\frac{1}{p_1}} & \text{при} & p_2=0, & p_1\nu<1,\\
(1-p_2\nu)^{\frac{1}{p_2}} & \text{при} & p_1=+\infty, & p_2\nu<1,\\
(1-p_1\nu)^{-\frac{1}{p_1}} & \text{при} & p_2=-\infty, & p_1\nu<1,\\
e^{\nu} & \text{при} & p_1=0, & p_2=-\infty,\quad \nu>0,\\
e^{-\nu} & \text{при} & p_2=0, & p_1=+\infty,\quad \nu<0,
\end{array}$$

а при всех прочих значениях ν A_{p_1,p_2}-"норма" веса $w_{a,\nu}$ равна бесконечности.

Случай, когда один из показателей обращается в ноль, практически не отличается от разобранного общего случая – во всех выкладках надо просто делать оговорённую в начале статьи замену: $(1+pt)^p\to e^p$. Рассмотрим в качестве примера случай $p_2=0$. Здесь нам надо найти

$$\sup_{I\subset[0,1]}\langle w_{a,\nu}^{p_1}\rangle_I^{\frac{1}{p_1}}e^{-\langle\log w_{a,\nu}\rangle_I}. \tag{3.6}$$

Теперь

$$\lambda_1=\frac{\alpha^{1-p_i\nu}a^{p_i\nu}}{\beta(1-p_i\nu)+ap_i\nu}=\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{a^{p_1\nu}\alpha^{-p_1\nu}}{1-p_1\tau},$$

$$\lambda_2=\frac{\alpha}{\beta}\quad\text{и}\quad K=(1-p_1\tau)^{\frac{1}{p_1}}e^{\tau},$$

где, как и раньше, $\tau=\nu(1-\frac{a}{\beta})$. Предельная форма соотношения (3.4) выглядит следующим образом:

$$K\Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{\frac{1}{p_1}}=e^{\tau}\Big(\frac{a}{\alpha}\Big)^{\nu}.$$

С его помощью преобразуем среднее значение логарифма

$$\langle \log w_{a,\nu} \rangle_{[\alpha,\beta]} = \frac{\nu}{\beta-\alpha}\Big(a - \alpha - \alpha \log \frac{a}{\alpha}\Big)$$
$$= \nu - \tau - \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} \log \left[K \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{\frac{1}{p_1}} \right]$$

Подставляя полученное выражение вместе со средним значением степени (3.2)

$$\langle w_{a,\nu}^{p_1} \rangle_{[\alpha,\beta]} = \frac{(1-p_1\tau)(1-\lambda_1)}{(1-p_1\nu)(1-\lambda_2)}$$

в формулу (3.6), получим

$$\langle w_{a,\nu}^{p_1} \rangle_{[\alpha,\beta]}^{\frac{1}{p_1}} e^{-\langle \log w_{a,\nu} \rangle_{[\alpha,\beta]}}$$
$$= \left(\frac{(1-p_1\tau)(1-\lambda_1)}{(1-p_1\nu)(1-\lambda_2)} \right)^{\frac{1}{p_1}} \exp\left\{ \tau - \nu + \frac{\lambda_2}{1-\lambda_2} \log \left[K \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{\frac{1}{p_1}} \right] \right\}$$
$$= \delta K^{\frac{1}{1-\lambda_2}} \Big(\frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_2}\Big)^{\frac{1}{p_1}} \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{\frac{\lambda_2}{p_1(1-\lambda_2)}},$$

где символом δ обозначена искомая норма: $\delta = e^{-\nu}(1-p_1\nu)^{-\frac{1}{p_1}}$.

Исследование полученной функции

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, K) \stackrel{\text{def}}{=} K^{\frac{1}{1-\lambda_2}} \Big(\frac{1-\lambda_1}{1-\lambda_2}\Big)^{\frac{1}{p_1}} \Big(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\Big)^{\frac{\lambda_2}{p_1(1-\lambda_2)}},$$

заданной на открытом единичном кубе, ещё проще, чем раньше. Функция φ непрерывна по λ_1 вплоть до границы, где она обращается в ноль, поскольку $p_1 > 0$. Сосчитаем логарифмическую производную по λ_1:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_1} \log \varphi(\lambda_1, \lambda_2, K) = \frac{\lambda_2}{p_1(1-\lambda_2)} \cdot \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{p_1} \cdot \frac{1}{1-\lambda_1}$$
$$= \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{p_1 \lambda_1 (1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}.$$

Она обращается в ноль в единственной точке $\lambda_1 = \lambda_2$. Поскольку функция φ неотрицательна, это – точка максимума, поэтому

$$\varphi(\lambda_1, \lambda_2, K) \leqslant \varphi(\lambda_2, \lambda_2, K) = K^{\frac{1}{1-\lambda_2}} \leqslant 1,$$

что и требовалось.

Теперь обратимся к случаю бесконечных показателей. В качестве примера рассмотрим случай $p_2 = -\infty$. Проверять мы должны, что $A_{p_1,-\infty}$-“норма” веса $w_{a,\nu}$ конечна, когда $\nu > 0$ и $p_1\nu < 1$, и она равна $\delta = (1 - p_1\nu)^{-1/p_1}$. При отрицательных ν имеем $\inf w = 0$, а при $p_1\nu \geqslant 1$ расходится интеграл от w^{p_1}, то есть при этих условиях вес не принадлежит классу $A_{p_1,-\infty}$. Поэтому далее предполагаем, что $\nu > 0$, то есть вес $w_{a,\nu}$ убывает.

Для любого монотонно убывающего веса w справедливы тождества

$$\sup_{0\leqslant\alpha<\beta\leqslant1}\left\{\langle w^{p_1}\rangle_{(\alpha,\beta)}^{1/p_1}\cdot\sup_{(\alpha,\beta)}\frac{1}{w}\right\} = \sup_{0\leqslant\alpha<\beta\leqslant1}\left\{\langle w^{p_1}\rangle_{(\alpha,\beta)}^{1/p_1}\cdot\frac{1}{w(\beta)}\right\}$$

$$= \sup_{0\leqslant\beta\leqslant1}\left\{\langle w^{p_1}\rangle_{(0,\beta)}^{1/p_1}\cdot\frac{1}{w(\beta)}\right\}.$$

Так как для нашего веса верно равенство $w(\beta) = \mathrm{const}$ при $\beta > a$, то

$$\sup_{I\subset[0,1]}\left\{\langle w^{p_1}\rangle_{I}^{1/p_1}\cdot\sup_{I}\frac{1}{w}\right\} = \sup_{0\leqslant\beta\leqslant a}\left\{\langle w^{p_1}\rangle_{(0,\beta)}^{1/p_1}\cdot\frac{1}{w(\beta)}\right\}.$$

Далее, $\langle w^{p_1}\rangle_{(0,\beta)} = \frac{1}{1-p_1\nu}\left(\frac{a}{\beta}\right)^{p_1\nu}$ при $\beta \leqslant a$, и поэтому

$$\sup_{I\subset[0,1]}\left\{\langle w^{p_1}\rangle_{I}^{1/p_1}\cdot\sup_{I}\frac{1}{w}\right\} = \sup_{0\leqslant\beta\leqslant a}\left\{\frac{1}{(1-p_1\nu)^{1/p_1}}\left(\frac{a}{\beta}\right)^{\nu}\cdot\left(\frac{\beta}{a}\right)^{\nu}\right\}$$

$$= \frac{1}{(1-p_1\nu)^{1/p_1}} = \delta.$$

Добавление 4: Частные случаи теоремы 1. Здесь собраны явные выражения формул (0.6)–(0.7) для предельных значений показателей p_i и q. Поскольку при $\xi_1 = \xi_2$ вес w – постоянная функция, для таких точек справедливо равенство $\mathbf{M}_{\max}(\xi) = \mathbf{M}_{\min}(\xi) = \xi_1$. Чтобы не выделять этот граничный случай, всегда будем предполагать, что $\xi_1 > \xi_2$.

Сперва рассмотрим предельные значения показателя q:

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;p_1,p_2,-\infty,\delta) = \xi_1\left(\frac{1-p_1s^+}{1-p_1r^+}\right)^{\frac{1}{p_1}}, \tag{4.1}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;p_1,p_2,-\infty,\delta) = 0, \tag{4.2}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;p_1,p_2,0,\delta)=\begin{cases}\xi_1 e^{s^+-r^+}\left(\dfrac{1-p_1s^+}{1-p_1r^+}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & p_1p_2>0,\\ \xi_1 e^{s^--r^-}\left(\dfrac{1-p_1s^-}{1-p_1r^-}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & p_1p_2<0,\end{cases} \tag{4.3}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;p_1,p_2,0,\delta)=\begin{cases}\xi_1 e^{s^--r^-}\left(\dfrac{1-p_1s^-}{1-p_1r^-}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & p_1p_2>0,\\ \xi_1 e^{s^+-r^+}\left(\dfrac{1-p_1s^+}{1-p_1r^+}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & p_1p_2<0,\end{cases} \tag{4.4}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;p_1,p_2,+\infty,\delta)=+\infty, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;p_1,p_2,+\infty,\delta)=\xi_1\left(\frac{1-p_1s^-}{1-p_1r^-}\right)^{\frac{1}{p_1}}. \tag{4.6}$$

Теперь перечислим те случаи, когда показатели p_i принимают предельные значения:

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;+\infty,p_2,q,\delta)=\begin{cases}\xi_1\left(\dfrac{\frac{p_2}{q}+\left(\frac{\xi_2\delta}{\xi_1}\right)^{p_2}-1}{\frac{p_2}{q}+\delta^{p_2}-1}\right)^{\frac{1}{q}}, & q\geqslant p_2,\\ \xi_2, & q\leqslant p_2,\end{cases} \tag{4.7}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;+\infty,p_2,q,\delta)=\begin{cases}\xi_2, & q\geqslant p_2,\\ \xi_1\left(\dfrac{\frac{p_2}{q}+\left(\frac{\xi_2\delta}{\xi_1}\right)^{p_2}-1}{\frac{p_2}{q}+\delta^{p_2}-1}\right)^{\frac{1}{q}}, & \dfrac{p_2}{1-\delta^{p_2}}<q\leqslant p_2,\\ 0, & q\leqslant\dfrac{p_2}{1-\delta^{p_2}},\end{cases} \tag{4.8}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;0,p_2,q,\delta)=\begin{cases}+\infty, & q\geqslant\dfrac{1}{s^+},\\ \xi_1 e^{r^+-s^+}\left(\dfrac{1-qr^+}{1-qs^+}\right)^{\frac{1}{q}}, & q\in[-\infty,p_2]\cup[0,\dfrac{1}{s^+}),\\ \xi_1 e^{r^--s^-}\left(\dfrac{1-qr^-}{1-qs^-}\right)^{\frac{1}{q}}, & p_2\leqslant q\leqslant 0,\end{cases} \tag{4.9}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;0,p_2,q,\delta)=\begin{cases}\xi_1 e^{r^- - s^-}\left(\dfrac{1-qr^-}{1-qs^-}\right)^{\frac{1}{q}}, & q\in(\dfrac{1}{s^-},p_2]\cup[0,+\infty],\\ \xi_1 e^{r^+ - s^+}\left(\dfrac{1-qr^+}{1-qs^+}\right)^{\frac{1}{q}}, & p_2\leqslant q\leqslant 0,\\ 0, & q\leqslant\dfrac{1}{s^-},\end{cases}\tag{4.10}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;p_1,-\infty,q,\delta)=\begin{cases}+\infty, & q\geqslant p_1\big(1-\dfrac{1}{\delta^{p_1}}\big)^{-1},\\ \xi_2\left(\dfrac{\dfrac{p_1}{q}+\left(\dfrac{\xi_1}{\xi_2\delta}\right)^{p_1}-1}{\dfrac{p_1}{q}+\dfrac{1}{\delta^{p_1}}-1}\right)^{\frac{1}{q}}, & p_1\leqslant q<p_1\big(1-\dfrac{1}{\delta^{p_1}}\big)^{-1}\\ \xi_1, & q\leqslant p_1,\end{cases}\tag{4.11}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;p_1,-\infty,q,\delta)=\begin{cases}\xi_1, & q\geqslant p_1,\\ \xi_2\left(\dfrac{\dfrac{p_1}{q}+\left(\dfrac{\xi_1}{\xi_2\delta}\right)^{p_1}-1}{\dfrac{p_1}{q}+\dfrac{1}{\delta^{p_1}}-1}\right)^{\frac{1}{q}}, & q\leqslant p_1,\end{cases}\tag{4.12}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;p_1,0,q,\delta)=\begin{cases}+\infty, & q\geqslant\frac{1}{s^+},\\ \xi_1\left(\dfrac{1-qr^+}{1-qs^+}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\dfrac{1-p_1s^+}{1-p_1r^+}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & q\in[-\infty,0]\cup[p_1,\dfrac{1}{s^+}),\\ \xi_1\left(\dfrac{1-qr^-}{1-qs^-}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\dfrac{1-p_1s^-}{1-p_1r^-}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & 0\leqslant q\leqslant p_1;\end{cases}\tag{4.13}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;p_1,0,q,\delta)=\begin{cases}\xi_1\left(\dfrac{1-qr^-}{1-qs^-}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\dfrac{1-p_1s^-}{1-p_1r^-}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & q\in(\frac{1}{s^-},0]\cup[p_1,+\infty],\\ \xi_1\left(\dfrac{1-qr^+}{1-qs^+}\right)^{\frac{1}{q}}\left(\dfrac{1-p_1s^+}{1-p_1r^+}\right)^{\frac{1}{p_1}}, & 0\leqslant q\leqslant p_1,\\ 0, & q\leqslant\dfrac{1}{s^-}.\end{cases}\tag{4.14}$$

Ещё одна группа формул, где оба показателя p_i принимают предельные значения:

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;+\infty,0,q,\delta)=\begin{cases}\xi_1\left(\dfrac{1+q\log\dfrac{\xi_2\delta}{\xi_1}}{1+q\log\delta}\right)^{\frac{1}{q}}, & q\geqslant 0,\\ \xi_2, & q\leqslant 0,\end{cases}\tag{4.15}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;+\infty,0,q,\delta)=\begin{cases}\xi_2, & q\geqslant 0,\\ \xi_1\left(\dfrac{1+q\log\dfrac{\xi_2\delta}{\xi_1}}{1+q\log\delta}\right)^{\frac{1}{q}}, & -\dfrac{1}{\log\delta}<q\leqslant 0,\\ 0, & q\leqslant-\dfrac{1}{\log\delta},\end{cases}\tag{4.16}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;0,-\infty,q,\delta)=\begin{cases}+\infty, & q\geqslant\dfrac{1}{\log\delta},\\ \xi_2\left(\dfrac{1-q\log\dfrac{\xi_2\delta}{\xi_1}}{1-q\log\delta}\right)^{\frac{1}{q}}, & 0\leqslant q<\dfrac{1}{\log\delta},\\ \xi_2, & q\leqslant 0,\end{cases}\tag{4.17}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;0,-\infty,q,\delta)=\begin{cases}\xi_1, & q\geqslant 0,\\ \xi_2\left(\dfrac{1-q\log\dfrac{\xi_2\delta}{\xi_1}}{1-q\log\delta}\right)^{\frac{1}{q}}, & q\leqslant 0,\end{cases}\tag{4.18}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;+\infty,-\infty,q,\delta)=\xi_1,\tag{4.19}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;+\infty,-\infty,q,\delta)=\xi_2.\tag{4.20}$$

И, наконец, группа формул, где q и один из показателей p_i принимают предельные значения:

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;p_1,-\infty,0,\delta)=\begin{cases}\xi_1, & p_1\geqslant 0,\\ \xi_2\exp\left[\dfrac{1}{p_1\delta^{p_1}}\left(\left(\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{p_1}-1\right)\right] & p_1\leqslant 0,\end{cases}\tag{4.21}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;p_1,-\infty,0,\delta)=\begin{cases}\xi_2\exp\left[\dfrac{1}{p_1\delta^{p_1}}\left(\left(\dfrac{\xi_1}{\xi_2}\right)^{p_1}-1\right)\right] & p_1\geqslant 0,\\ \xi_1, & p_1\leqslant 0,\end{cases}\tag{4.22}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;p_1,-\infty,+\infty,\delta)=+\infty,\tag{4.23}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;p_1,-\infty,+\infty,\delta)=\xi_1,\tag{4.24}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;p_1,0,-\infty,\delta)=\xi_2e^{s^+-r^+},\tag{4.25}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;p_1,0,-\infty,\delta)=0,\tag{4.26}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;p_1,0,+\infty,\delta)=+\infty, \tag{4.27}$$
$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;p_1,0,+\infty,\delta)=\xi_2 e^{s^- - r^-}, \tag{4.28}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;+\infty,p_2,0,\delta)=\begin{cases}\xi_2, & p_2\geqslant 0,\\ \xi_1\exp\left[\dfrac{\delta^{p_1}}{p_2}\left(\left(\dfrac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{p_2}-1\right)\right] & p_2\leqslant 0,\end{cases} \tag{4.29}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;+\infty,p_2,0,\delta)=\begin{cases}\xi_1\exp\left[\dfrac{\delta^{p_1}}{p_2}\left(\left(\dfrac{\xi_2}{\xi_1}\right)^{p_2}-1\right)\right] & p_2\geqslant 0,\\ \xi_2, & p_2\leqslant 0,\end{cases} \tag{4.30}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;+\infty,p_2,-\infty,\delta)=\xi_2, \tag{4.31}$$
$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;+\infty,p_2,-\infty,\delta)=0, \tag{4.32}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;0,p_2,-\infty,\delta)=\xi_1 e^{r^+ - s^+}, \tag{4.33}$$
$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;0,p_2,-\infty,\delta)=0, \tag{4.34}$$

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;0,p_2,+\infty,\delta)=+\infty, \tag{4.35}$$
$$\mathbf{M}_{\min}(\xi;0,p_2,+\infty,\delta)=\xi_1 e^{r^- - s^-}. \tag{4.36}$$

Пока мы рассматривали ситуацию, когда есть ограничение на взаимное поведение средних $\langle w^{p_i}\rangle_I^{1/p_i}$, а именно, накладывалось условие

$$\langle w^{p_1}\rangle_I^{1/p_1}\leqslant\delta\langle w^{p_2}\rangle_I^{1/p_2}\qquad\forall I\subset J.$$

А теперь мы рассмотрим случай, когда нет никаких ограничений, что можно трактовать как предельный переход $\delta\to+\infty$.

Формулы будут несколько отличаться в зависимости от знаков показателей p_i. Если $0<p_2<p_1$, то

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi;p_1,p_2,q,+\infty)=\begin{cases}+\infty, & p_1<q\leqslant+\infty,\\ \xi_1^{\frac{p_1(q-p_2)}{q(p_1-p_2)}}\xi_2^{\frac{p_2(p_1-q)}{q(p_1-p_2)}}, & p_2\leqslant q\leqslant p_1,\\ \xi_2, & -\infty\leqslant q\leqslant p_2,\end{cases} \tag{4.37}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, +\infty) = \begin{cases} \xi_1^{\frac{p_1(q-p_2)}{q(p_1-p_2)}} \xi_2^{\frac{p_2(p_1-q)}{q(p_1-p_2)}}, & q \in (0, p_2] \cup [p_1, +\infty], \\ \xi_2, & p_2 \leqslant q < p_1, \\ 0, & -\infty \leqslant q \leqslant 0; \end{cases} \tag{4.38}$$

если $p_2 \leqslant 0 \leqslant p_1$, то

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, +\infty) = \begin{cases} +\infty, & p_1 < q \leqslant +\infty, \\ \xi_1, & p_2 < q \leqslant p_1, \\ \xi_2, & -\infty \leqslant q \leqslant p_2, \end{cases} \tag{4.39}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, +\infty) = \begin{cases} \xi_1, & p_1 \leqslant q \leqslant +\infty, \\ \xi_2, & p_2 \leqslant q < p_1, \\ 0, & -\infty \leqslant q < p_2; \end{cases} \tag{4.40}$$

если $p_2 < p_1 < 0$, то

$$\mathbf{M}_{\max}(\xi; p_1, p_2, q, +\infty) = \begin{cases} +\infty, & 0 \leqslant q \leqslant +\infty, \\ \xi_1^{\frac{p_1(q-p_2)}{q(p_1-p_2)}} \xi_2^{\frac{p_2(p_1-q)}{q(p_1-p_2)}}, & q \in [-\infty, p_2] \cup [p_1, 0], \\ \xi_1, & p_2 < q \leqslant p_1, \end{cases} \tag{4.41}$$

$$\mathbf{M}_{\min}(\xi; p_1, p_2, q, +\infty) = \begin{cases} \xi_1, & p_1 \leqslant q \leqslant +\infty, \\ \xi_1^{\frac{p_1(q-p_2)}{q(p_1-p_2)}} \xi_2^{\frac{p_2(p_1-q)}{q(p_1-p_2)}}, & p_2 \leqslant q \leqslant p_1, \\ 0, & -\infty \leqslant q < p_2. \end{cases} \tag{4.42}$$

Литература

1. В. И. Васюнин, *Точная константа в обратном неравенстве Гёльдера для макенхауптовских весов.* — Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 1, 73–117.
2. А. А. Кореновский, *Об обратном неравенстве Гёльдера.* — Математические заметки **81** (2007), вып. 3, 361–373.
3. Ф. Л. Назаров, С. Р. Треиль, *Охота на функцию Беллмана: приложения к оценкам сингулярных интегральных операторов и к другим классическим задачам гармонического анализа.* — Алгебра и анализ **8** (1996), вып. 5, 32–162.
4. О. Шлепаков. Дипломная работа, Одесский национальный университет имени И. И. Мечникова, 2007.
5. A. Volberg, *Bellman approach to some problems in harmonic analysis.* — Équations aux Dérivées Partielles, Exposé **XX** (2002).

Vasyunin V. I. Mutual estimates of L^p-norms, and the Bellman function.

A description of the possible values of the L^p-norm of a function is obtained under fixed L^p-norms for two other values of p and under a natural multiplicative restriction, like the Muckenhoupt condition. Among special cases of our results, we mention simple interpolation inequalities between two L^p-norms, as well as nontrivial ones, such as the Gehring inequality or the reverse Hölder inequality for Mackenhoupt weights. The method of the paper is construction of the true Bellman function for the corresponding extremal problem.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: vasyunin@pdmi.ras.ru

Поступило 30 марта 2008 г.