Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 355, 2008 г.

А. В. Васин

ГРАНИЧНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ В СЛАБЫХ КЛАССАХ ЛИПШИЦА

1. Введение

Пусть E – подмножество единичной окружности $\mathbb{T}$, $\omega(t)$ – модуль непрерывности, $\Lambda_\omega(E)$ – соответствующее пространство Липшица, т.е. пространство, состоящее из таких функций f, что $\sup \frac{|f(x)-f(y)|}{\omega(x-y)} < \infty$; A_ω – подкласс в $\Lambda_\omega(\mathbb{T})$, состоящий из функций, допускающих аналитическое продолжение в круг $\mathbb{D}$. Множество E назовём интерполяционным для ω, если оператор сужения сюръективен: $A_\omega|_E = \Lambda_\omega(E)$. Для гёльдеровых модулей непрерывности $\omega(t) = t^\alpha, 0 < \alpha \leq 1$, а также для всех самосопряжённых модулей непрерывности с условием Бари:

$$\widetilde{\omega}(x) = \int\limits_0^x \frac{\omega(t)}{t} dt < C\omega(x), \tag{B}$$

вопросы интерполяции (не только граничной) решены полностью в работах Дынькина [2], Широкова [5] и Бруны [6].

Теорема А. *Множество $E \subset \mathbb{T}$ для модулей $\omega \in$ (B) является интерполяционным тогда и только тогда, когда E – пористое множество.*

Условие пористости (K), введённое Коточиговым [4], означает следующее: для любой дуги $I \subset \mathbb{T}$ найдётся свободная от точек множества E дуга $J \subset I$ такая, что $|J| > C|I|$, где константа C не зависит от I. Второй формой условия пористости является следующая оценка с константой C, не зависящей от дуги I:

$$\frac{1}{|I|} \int\limits_I \log \frac{1}{\rho(z)} |dz| \leq \log \frac{1}{|I|} + C, \tag{K}$$

где $\rho(z) = \operatorname{dist}(z, E)$. Условие пористости (K) существенно сильнее

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант No. 08-01-00358 .

принадлежности функции $\log\frac{1}{\rho(z)}$ классу BLO (функций ограниченной нижней осцилляции):

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I \log\frac{1}{\rho(z)}|dz| \le \inf_I \log\frac{1}{\rho(z)} + C. \qquad \text{(BLO)}$$

Например, типичная последовательность из класса BLO на прямой – это $\{\frac{1}{n}\}$, в то время как типичная пористая последовательность – $\{2^{-n}\}$.

Заметим, что Широков [5] показал, что условие (K) достаточно для интерполяции для любого модуля непрерывности. Что касается необходимости, то в [1] из неравенства Иенсена выводится необходимое условие интерполяции, аналогичное условию (K) во второй форме:

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I \log\frac{1}{\omega(\rho(z))}|dz| \le \log\frac{1}{\omega(|I|)} + C$$

с единой константой C для всех дуг I. Таким образом, зазор между необходимым условием и достаточным условием (K) велик. Основная цель данной работы – предъявить более согласованные необходимые и достаточные условия для некоторых модулей непрерывности.

2. Формулировка основных результатов

Пусть $\omega_\alpha(t) = \exp(-\log^\alpha \frac{1}{t})$, $0 < \alpha < 1$, – слабый модуль непрерывности. Необходимое условие для данного модуля имеет вид:

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I \log^\alpha\frac{1}{\rho(z)}|dz| \le \log^\alpha\frac{1}{|I|} + C$$

и влечет еще одно более слабое условие, подобное условию пористости (K) в первой форме, а именно: для любой дуги $I \subset \mathbb{T}$ найдётся свободная от точек E дуга $J \subset I$ такая, что $\omega_\alpha(|J|) > C\omega_\alpha(|I|)$, где константа C не зависит от I. Последнее условие на множество и на модуль непрерывности естественно назвать условием слабой пористости; будем обозначать его символом (ω_αK). Если потребуем дополнительно, что $\log\frac{1}{\rho}$ принадлежит классу BMO функций ограниченной средней осцилляции, то получим достаточное условие для интерполяции.

Основная теорема. (1) *Если множество E интерполяционное для $\omega_\alpha(t)$, то*

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I \log^\alpha \frac{1}{\rho(z)}|dz| \le \log^\alpha \frac{1}{|I|} + C.$$

(2) *Если $\log\frac{1}{\rho(z)} \in \mathrm{BMO}$ и выполняется $(\omega_\alpha K)$, то E интерполяционное для $\omega_\alpha(t)$.*

Требуется доказать только часть 2 (достаточность). В такой формулировке достаточное условие и по форме, и по существу напоминает необходимое условие. Кроме того, возможно некоторое усиление результатов в духе теоремы Широкова [5].

Следствие. *В условиях теоремы (часть 2) множество E является интерполяционным для любого модуля непрерывности $\omega(t) > \omega_\alpha^A(t)$, $A > 0$, $t \to 0$.*

Схема доказательства основной теоремы следует методам работы [5] за небольшим исключением, вместо оператора Коши в конструкции оператора продолжения участвует ядро Шварца на кривой Лаврентьева, что влечёт постоянные изменения в оригинальном доказательстве Широкова. В п. 3 строится специальная липшицева область, содержащая круг. В п. 4 в этой области строится внешняя функция с модулем $|g(z)| \asymp \omega_\alpha(z)$. Здесь и далее выражение $a \asymp b$ означает, что существует константа $C > 0$, такая что $\frac{1}{C}a < b < Ca$. В последнем п. 5 осуществляется конструкция продолжения.

3. Специальная липшицева область

Нам потребуется область чуть большая, чем единичный круг $\mathbb{D}$. Пусть $E \subset \mathbb{T}$, на концах дуг J_k, дополнительных к E, построим, следуя [5], дуги I_k во внешность круга $\mathbb{D}$ под углом $\alpha < \frac{\pi}{4}$. Полученная кривая $\Gamma = \bigcup I_k \cup E$ является кривой Лаврентьева (chord-arc) и ограничивает область $\Omega \supset \mathbb{D}$. Расстояния между точками E по Γ и по $\mathbb{T}$ эквивалентны, поэтому если $\rho_\Gamma(z)$ (или $\rho(z)$) – расстояния от точки z до множества E, взятые по Γ (или по $\mathbb{T}$), соответственно, то функции $\log\frac{1}{\rho_\Gamma(z)}$ (или $\log\frac{1}{\rho(z)}$) принадлежат соответствующим классам BMO одновременно.

Пусть τ – конформное отображение Ω на $\mathbb{D}$, τ_{-1} – обратное отображение.

Лемма 1. (1) [5; 7] *(квазиконформность). Пусть I – дуга кривой Γ, J – дуга в Ω с одним из концов $z \in I$, тогда условия $|I| \asymp |J|$ и $|\tau(I)| \asymp |\tau(J)|$ эквивалентны.*

(2) [2; 7]. *Производные τ' и τ'_{-1} удовлетворяют условию A_2 Макенхаупта, т.е. существует такая константа C, что для любой дуги $I \subset \Gamma$ имеем*

$$\int\limits_I |\tau'||dz| \int\limits_I |\tau'|^{-1}|dz| \le C|I|^2 \tag{A$_2$}$$

и аналогично для τ_{-1}.

(3) $\log \frac{1}{\rho_\Gamma(z)} = \phi + \widetilde{\psi}$, *где ϕ и ψ ограничены на Γ.*

Для доказательства последнего пункта достаточно ввиду конформной инвариантности класса BMO получить подобное разложение для конформного образа функции $\log \frac{1}{\rho_\Gamma(z)}$ на $\mathbb{T}$.

4. Специальная внешняя функция

Лемма 2. *Существует внешняя функция g в Ω такая, что $|g| \asymp e^{A \log^\alpha \frac{1}{\rho(z)}}$, и, в отличие от [5], накладывается требование на мнимую часть g: $|\operatorname{Im} g| \le Ce^{A \log^\alpha \frac{1}{\rho(z)}} \log^{\alpha-1} \frac{1}{\rho(z)}$, где $\rho(z) = \operatorname{dist}(z, E)$, $z \in \Omega$.*

Доказательство. Ввиду замечания в начале пункта 3 перед леммой 1 получаем, что $\log \frac{1}{\rho(z)} \in \mathrm{BMO}(\Gamma)$, тогда лемма 1.3 дает, что $\log \frac{1}{\rho} = \phi + \widetilde{\psi}$, где ϕ и ψ ограничены на Γ. Пусть $g = \exp(\log \frac{1}{\rho} - \phi - i\psi)$ – внешняя функция с ограниченным аргументом, тогда функция $g_\alpha = \exp(\log \frac{1}{\rho} - \phi - i\psi)^\alpha$ имеет аргумент, стремящийся к нулю при $\rho(z) \to 0$:

$$\log |g_\alpha| = \Big[\Big(\log \frac{1}{\rho} - \phi\Big)^2 + \psi^2\Big]^{\frac{\alpha}{2}} \asymp \log^\alpha \frac{1}{\rho} + O\Big(\log^{\alpha-1} \frac{1}{\rho}\Big),$$

$$|\arg g_\alpha| \asymp \log^\alpha \frac{1}{\rho} \log^{-1} \frac{1}{\rho} = \log^{\alpha-1} \frac{1}{\rho},$$

поэтому $|g_\alpha| \asymp |\operatorname{Re} g_\alpha| \asymp e^{\log^\alpha \frac{1}{\rho}}$, $|\operatorname{Im} g_\alpha| \le Ce^{\log^\alpha \frac{1}{\rho}} \log^{\alpha-1} \frac{1}{\rho}$. Аналогичные оценки справедливы для функции g_α^A для любого $A > 0$:

$$|g_\alpha^A| \asymp e^{A \log^\alpha \frac{1}{\rho}},$$

$$|\operatorname{Im} g_\alpha^A| \le C_{A,\alpha} e^{A \log^\alpha \frac{1}{\rho}} \log^{\alpha-1} \frac{1}{\rho}.$$

Лемма 3. *Для любого $A > 0$, для функций $e^{A\log^\alpha\frac{1}{\rho}}\log^{1-\alpha}\frac{1}{\rho}$ и $e^{A\log^\alpha\frac{1}{\rho}}$ справедлива оценка типа усиленного условия A_1 Макенхаупта*

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I e^{A\log^\alpha\frac{1}{\rho}}\log^{\alpha-1}\frac{1}{\rho}|dz| \le C_A e^{A\log^\alpha\frac{1}{|I|}}\log^{\alpha-1}\frac{1}{|I|} \qquad (\widetilde{\mathrm{A}_1})$$

и, аналогично,

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I e^{A\log^\alpha\frac{1}{\rho}}|dz| \le C_A e^{A\log^\alpha\frac{1}{|I|}}.$$

Доказательство. Докажем требуемое для первой из приведенных функций. Рассуждения для второй функции аналогичны и даже чуть проще. Если $\log\frac{1}{\rho}\in \mathrm{BMO}$, то $(\frac{1}{\rho})^\delta$ удовлетворяет условию A_1 Макенхаупта для некоторого $\delta > 0$ [7], т.е.

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I \left(\frac{1}{\rho}\right)^\delta |dz| < C\inf_I\left(\frac{1}{\rho}\right)^\delta \asymp \left(\frac{1}{|J|}\right)^\delta,$$

где J – самая большая свободная дуга, входящая в I. Функция $e^{A\log^\alpha t}\log^{\alpha-1}t$ вогнута при больших t, откуда

$$\frac{1}{|I|}\int\limits_I e^{A\log^\alpha\frac{1}{\rho}}\log^{\alpha-1}\frac{1}{\rho}|dz| \le C e^{A\log^\alpha\frac{1}{|J|}}\log^{\alpha-1}\frac{1}{|J|}.$$

С другой стороны, условие $(\omega_\alpha \mathrm{K})$ влечёт, что $\log^\alpha\frac{1}{|J|} < \log^\alpha\frac{1}{|I|} + C$, откуда ввиду возрастания функции $e^{Ax}x^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}$ при больших x получаем

$$\dots \le C_1 e^{A\log^\alpha\frac{1}{I}}\left(\log^\alpha\frac{1}{|I|}+C\right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \le C_A e^{A\log^\alpha\frac{1}{|I|}}\log^{\alpha-1}\frac{1}{|I|},$$

что и требовалось.

Лемма 4. *Для функции g_α^A внутри области Ω справедлива такая же оценка, как и на границе области:*

$$|g_\alpha^A| \asymp e^{A\log^\alpha\frac{1}{\rho(z)}}.$$

Доказательство. Пусть $g = g_\alpha^A$, функции g^* и Mg – это, соответственно, максимальная некасательная функция и максимальная функция Харди-Литлвуда для g. Пусть $I = I_z = \{\xi \in \Gamma, |\xi - z| \le 2\rho(z)\}$. Тогда

$$|g(z)| \le C \inf_I |g^*(\xi)| \le C \inf_I Mg \le C_1 \inf_I |g(\xi)|.$$

Первое неравенство справедливо по определению некасательной максимальной функции, второе неравенство следует из максимальной теоремы, а третье – из условия A_1. Но на границе $|g| \asymp e^{A \log^\alpha \frac{1}{\rho}}$, поэтому

$$\inf_I |g(\xi)| \asymp e^{A \log^\alpha \frac{1}{|J|}},$$

где J – самая большая свободная дуга, входящая в I. Если теперь воспользоваться условием $(\omega_\alpha \mathrm{K})$, то можно заменить $|J|$ на $|I|$, что и требовалось.

5. Построение оператора продолжения

Достаточно уметь продолжать вещественные функции. Определим интеграл типа Шварца на липшицевой кривой при помощи конформной пересадки из единичного круга:

$$Sf(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\xi) \frac{\tau'(\xi)}{\tau(\xi)} \frac{\tau(\xi) + \tau(z)}{\tau(\xi) - \tau(z)} d\xi,$$

где τ – конформное отображение области Ω на $\mathbb{D}$, а τ_{-1} – обратное отображение. Если функция f гармонически продолжена внутрь области Ω, то $\mathrm{Re}\, Sf(z) = f(z)$. Если $f(z)$ аналитична, то $f(z) - S(\mathrm{Re}\, f)(z) = ic$ для некоторой мнимой константы. Пусть g_α^A – функция, построенная в лемме 2, $g = i g_\alpha^A$, тогда $S(\mathrm{Re}\, g - ic) = g$.

Пусть теперь f – вещественная функция из $\Lambda_\omega(E)$. Вначале продолжим её каким-нибудь способом до функции $\widetilde{f} \in \Lambda_\omega(\Gamma)$ (по Уитни или кусочно-линейно). Тогда требуемый оператор продолжения задается формулой

$$F(z) = Tf(z) = \frac{1}{g} S\big(f(\mathrm{Re}(g - ic))\big)(z).$$

Доказательство основной теоремы. Поскольку на константах данное преобразование инвариантно, то если мы покажем, что для любых точек $z \in \mathbb{D}$ и $z_0 \in \Gamma$ таких, что $|z - z_0| = \operatorname{dist}(z, E)$, выполняется оценка

$$|F(z) - f(z_0)| \le C\omega(|z - z_0|),$$

мы видим, что ввиду рассуждений из [5], функция F дает искомое продолжение. Разобьем Γ на дуги $I_k : I2^k < |\xi - z| \le I2^{k+1}$, где $I = \rho(z)$, тогда

$$|F(z) - f(z_0)| \le \frac{C}{|g(z)|} \sum_k \omega(I_k) \int\limits_{I_k} \frac{|\tau'(\xi)||\operatorname{Re} g - ic|}{|\tau(\xi) - \tau(z)|} |d\xi|,$$

т.к. $|\tau(\xi) + \tau(z)| \le 2$, $|\tau(\xi)| = 1$.

По лемме 1 имеем $|\tau(\xi) - \tau(z)| \asymp |\tau(I_k)|$, поэтому для внутреннего интеграла получим

$$\int\limits_{I_k} \frac{|\tau'(\xi)||\operatorname{Re} g - ic|}{|\tau(\xi) - \tau(z)|} |d\xi| \le \frac{C}{|\tau(I_k)|} \int\limits_{I_k} |\tau'(\xi)||\operatorname{Re} g - ic||d\xi| \le$$

(по неравенству Шварца)

$$\le \frac{C}{|\tau(I_k)|} \Big(\int\limits_{I_k} |\tau'(\xi)|^2 |d\xi| \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{I_k} |\operatorname{Re} g - ic|^2 |d\xi| \Big)^{1/2} \le$$

(делая замену переменой)

$$\le \frac{C}{|\tau(I_k)|} \Big(\int\limits_{\tau I_k} \frac{1}{|\tau'_{-1}(\xi)|} |d\xi| \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{I_k} |\operatorname{Re} g - ic|^2 |d\xi| \Big)^{1/2} \le$$

(по условию A_2 леммы 1.2)

$$\le \frac{C_1}{|\tau(I_k)|} \Big(\frac{\tau(I_k)^2}{\int\limits_{\tau(I_k)} |\tau'_{-1}(\xi)||d\xi|} \Big)^{1/2} \Big(\int\limits_{I_k} |\operatorname{Re} g - ic|^2 |d\xi| \Big)^{1/2} \le$$

$$\le \Big(\frac{C_2}{|I_k|} \int\limits_{I_k} |\operatorname{Re} g - ic|^2 |d\xi| \Big)^{1/2} \le$$

(по лемме 3 функция g удовлетворяет усиленному условию $\widetilde{\mathrm{A}}_1$, откуда вытекает следующая оценка)

$$\leq C_3 e^{A\log^\alpha \frac{1}{|I_k|}} \log^{\alpha-1}\frac{1}{|I_k|}.$$

Поэтому, поскольку $|I_k| \asymp I2^k$, суммируя, получим при $A = 2$ с учетом леммы 4

$$|F(z) - f(z_0)| \leq C_4 e^{-2\log^\alpha \frac{1}{|I|}} \sum_k e^{-\log^\alpha \frac{1}{|I|2^k}} e^{2\log^\alpha \frac{1}{|I|2^k}} \log^{\alpha-1}\frac{1}{|I|2^k}$$

$$\leq C_5 e^{-2\log^\alpha \frac{1}{|I|}} \int\limits_I^1 e^{\log^\alpha \frac{1}{t}} \log^{\alpha-1}\frac{1}{t} dt/t \leq$$

(вычисляя соответствующий интеграл)

$$\leq C_6 e^{-\log^\alpha \frac{1}{\rho(z)}} \qquad \square.$$

При доказательстве следствия надо выбрать такое A, чтобы $\omega(t)e^{-A\log^\alpha \frac{1}{t}} \to 0$ при $t \to 0$, а далее рассуждать как в последних выкладках.

Автор благодарен А. М. Коточигову за полезные консультации.

Литература

1. А. В. Васин, *Об одном необходимом условии для интерполяции функциями класса Липшица.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **315** (2004), 39–42.
2. Е. М. Дынькин, *Множества свободной интерполяции для классов Гёльдера.* — Математический сборник **109** (1979), 107–128.
3. Е. М. Дынькин, *Оценки аналитических функций в жордановых областях.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **73** (1977), 70–90.
4. А. М. Коточигов, ***Интерполяция** аналитическими функциями, гладкими вплоть до границы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **30** (1972), 167–169.
5. Н. А. Широков, *Свободная интерполяция в пространствах $C^A_{r,\omega}$.* — Математический сборник **117** (1982), 337–368.
6. J. Bruna, *Les ensembles d'interpolation des $A^p(D)$.* — C.r. Acad. Sci. **AB290** (1980), No. 1, 25–27.
7. Ch. Pommerenke, *Boundary behavior of conformal maps.* Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.

Vasin A. V. Boundary interpolation in the weak Lipschitz classes.

For the Lipschitz spaces with the weak modules of continuity $\omega_\alpha(t) = \exp(-\log^\alpha \frac{1}{t})$, $0 < \alpha < 1$, conditions sufficient for interpolation are found that are very close to being necessary.

СПГУВК
факультет информационных технологий
E-mail: avvasin@ mail.ru

Поступило 15 апреля 2008 г.