Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 355, 2008 г.

Д. З. Аров, Н. А. Роженко

К ТЕОРИИ ПАССИВНЫХ СИСТЕМ СОПРОТИВЛЕНИЯ С ПОТЕРЯМИ КАНАЛОВ РАССЕЯНИЯ

1. Введение

Настоящая работа посвящена изучению пассивных систем сопротивления с потерями каналов рассеяния. В завершающей части статьи исследованию подлежат пассивные системы сопротивления, основные операторы которых принадлежат классу C_0 сжатий в гильбертовом пространстве, имеющих минимальную функцию в смысле [14].

Ранее первым автором была выполнена серия работ [1–8], посвященная теории пассивных линейных стационарных систем с потерями каналов рассеяния. В этих работах важное место занимает развитие метода Дарлингтона реализации таких систем на случай нерациональных передаточных функций, матриц рассеяния и сопротивления, что привело к выделению класса матриц рассеяния и сопротивления, имеющих мероморфное псевдопродолжение во внешность единичного круга $\mathbb{D}_e$ для систем с дискретным временем, и левую или нижнюю полуплоскость $\mathbb{C}_-$ для систем с непрерывным временем с ограниченной характеристикой Неванлинны в этой области. Основное внимание при этом было уделено системам рассеяния, меньше – системам сопротивления, которым посвящена работа [1], см. также [4].

В работе [11] авторами было предложено и исследовано новое представление матриц сопротивления (матриц-функций класса Каратеодори), имеющих псевдопродолжение, которое может рассматриваться как аналог D-представления матрицы рассеяния в виде блока двусторонне внутренней функции, исследованного первым автором в [5, 6, 2] и независимо Девилдом в [19], а также Хелтоном и Дугласом в [18]. В этом аналоге матрица сопротивления $c(z)$ представляется в виде (2,2)-блока $J_{p,m}$-внутренней матрицы-функции $A(z)$:

$$A(z) = \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) & 0 \\ \gamma(z) & \delta(z) & I_p \\ 0 & I_p & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta(z) = c(z)$$

$$\text{с} \quad J_{p,m} = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p \\ 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix},$$

где $m = m_c$,

$$m_c := \operatorname{rank} \operatorname{Re} c(\zeta) \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1$$

– минимальное число потерянных каналов рассеяния.

В работе [12] авторами была прослежена двусторонняя связь между различными типами таких представлений (минимальными, оптимальными и др.) и соответствующими пассивными реализациями (минимальными, оптимальными и др.) аналогично тому, как это было сделано в работе [2] для D-представлений матриц рассеяния. Были исследованы произвольные пассивные системы сопротивления с потерями каналов рассеяния, а затем – имеющие основными операторами сжатия классов $C_{0\cdot}$, $C_{\cdot 0}$ и C_{00} в смысле, определенном в [14]. Предложенное авторами в [12] новое определение пассивной системы сопротивления без потерь каналов рассеяния в общем случае охватывает более широкий класс примеров и равносильно общепринятому в случае, когда $c(z)$ имеет мероморфное псевдопродолжение.

Представленные в настоящей статье результаты, касающиеся пассивных систем сопротивления с основными операторами класса C_0, являются аналогами результатов, полученных первым автором в работе [2] для пассивных систем рассеяния с основными операторами класса C_0.

В работе рассматриваются линейные системы с дискретным временем. Полученные результаты могут быть перенесены на системы с непрерывным временем стандартным методом, путем рассмотрения преобразования Келли над системами, операторами и комплексным аргументом, см., например, [3].

Используемые обозначения и терминология.

Все рассматриваемые в работе пространства Гильберта предполагаются сепарабельными, под подпространством понимается замкнутый линеал в этом пространстве;

$\mathbb{C}$ – множество комплексных чисел;

$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ – открытый единичный круг;

$\mathbb{D}_e = \{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| \leqslant \infty\}$ – внешность единичного круга в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$;

I_X – единичный оператор в пространстве X;

$\bigvee\limits_n \mathfrak{D}_n$ – наименьшее подпространство, содержащее все множества $\mathfrak{D}_n$ в рассматриваемом гильбертовом пространстве;

$P_{\mathfrak{D}}$ – ортопроектор на подпространство $\mathfrak{D}$;

$A|_{\mathfrak{D}}$ – сужение оператора A на подпространство $\mathfrak{D}$;

$\mathbb{B}(U, Y)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих из гильбертового пространства U в гильбертово пространство Y, $\mathbb{B}(U) := \mathbb{B}(U, U)$;

H^1 – класс голоморфных в $\mathbb{D}$ скалярных функций $h(z)$ таких, что

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left|h(re^{i\mu})\right| d\mu < \infty;$$

$L^2(U)$ – гильбертово пространство слабо измеримых при $|\zeta| = 1$ функций $h(\zeta)$ со значениями из пространства Гильберта U таких, что

$$\|h\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|\zeta|=1} \|h(\zeta)\|^2 \, |d\zeta| = \sum_{-\infty}^{\infty} \|h_k\|^2 < \infty,$$

где $h(\zeta) = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} h_k \zeta^k$ – разложение в ряд Фурье функции $h \in L^2(U)$;

$$H^2(U) = \{h(\zeta) \in L^2(U) : h(\zeta) = \sum_{0}^{\infty} h_k \zeta^k\}$$

– пространство, отождествляемое с пространством Харди функций $h(z) = \sum\limits_0^{\infty} h_k z^k$, действующих из $\mathbb{D}$ в гильбертово пространство U таких, что $\|h\|^2 = \sum\limits_0^{\infty} \|h_k\|^2 < \infty$, путем отождествления функции $h(z)$ с ее некасательным граничным значением $h(\zeta)$;

$H^2(U,Y)$ – класс голоморфных в $\mathbb{D}$ функций $h(z)$ со значениями из $\mathbb{B}(U,Y)$ таких, что $h(z)u \in H^2(Y)$ для любого $u \in U$;

$$f^{\sim}(z) = f(\overline{z})^*, \quad f^{\#}(z) = f(1/\overline{z})^*.$$

2. Пассивные системы рассеяния и сопротивления

Все результаты, представленные в этом параграфе без доказательств, подробно изложены в работах [1–8].

2.1. Линейные стационарные динамические системы и их передаточные функции

Эволюция линейной стационарной динамической системы $\Sigma = (A,B,C,D;X,U,Y)$ с дискретным временем n с гильбертовыми пространствами входных данных U, выходных данных Y и внутренних состояний X описывается уравнениями

$$\begin{cases} x(n+1) = Ax(n) + Bu(n), \\ y(n) = Cx(n) + Du(n), \end{cases}$$

где $x(n) \in X$, $u(n) \in U$, $y(n) \in Y$ $(n \geqslant 0)$ и

$$A \in \mathbb{B}(X), \quad B \in \mathbb{B}(U,X), \quad C \in \mathbb{B}(X,Y), \quad D \in \mathbb{B}(U,Y).$$

Пусть

$$X_\Sigma^c = \bigvee_{k \geqslant 0} A^k BU, \quad X_\Sigma^o = \bigvee_{k \geqslant 0} (A^*)^k C^* Y.$$

Система Σ называется *управляемой*, если $X = X_\Sigma^c$; *наблюдаемой*, если $X = X_\Sigma^o$; *простой*, если $X = X_\Sigma^c \vee X_\Sigma^o$.

Система $\widehat{\Sigma} = (\widehat{A},\widehat{B},\widehat{C},\widehat{D};\widehat{X},U,Y)$ называется *дилатацией* системы $\Sigma = (A,B,C,D;X,U,Y)$, если X является подпространством в $\widehat{X}$, и для некоторых подпространств $\mathfrak{D}_*$ и $\mathfrak{D}$ пространства $\widehat{X}$ имеем

$$\begin{gathered} \widehat{X} = \mathfrak{D}_* \oplus X \oplus \mathfrak{D}, \quad \widehat{A}^*\mathfrak{D}_* \subset \mathfrak{D}_*, \\ \widehat{A}\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}, \quad \widehat{B}^*\mathfrak{D}_* = \{0\}, \quad \widehat{C}\mathfrak{D} = \{0\} \end{gathered} \tag{2.1}$$

и

$$A = P_X \widehat{A}|_X, \quad B = P_X \widehat{B}, \quad C = \widehat{C}|_X, \quad D = \widehat{D}. \tag{2.2}$$

При этом система Σ называется *сужением системы* $\widehat{\Sigma}$. Система Σ называется *минимальной*, если она не имеет нетривиальных сужений, т.е. если она не является дилатацией никакой другой системы. Известно, что система Σ является минимальной тогда и только тогда, когда она управляема и наблюдаема, т.е. $X = X^c_\Sigma = X^o_\Sigma$.

Передаточной функцией системы Σ называется $\mathbb{B}(U,Y)$-значная функция θ_Σ, определяемая по формуле

$$\theta_\Sigma(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B, \quad z \in \Lambda_A,$$

где Λ_A – множество точек $z \in \mathbb{C}$, для которых существует ограниченный обратный оператор $(I-zA)^{-1}$ на всем пространстве, а также $z=\infty$, если оператор A ограниченно обратим.

Для голоморфных в окрестности точки $z=0$ функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ будем писать $f_1 \simeq f_2$, если $f_1(z) \equiv f_2(z)$ в окрестности точки $z=0$. Если $\widehat{\Sigma}$ – дилатация системы Σ, то $\theta_{\widehat{\Sigma}} \simeq \theta_\Sigma$. Если $\theta \simeq \theta_\Sigma$, то система Σ называется реализацией функции $\theta(z)$, если, кроме того, Σ – минимальная система, то тогда она называется минимальной реализацией функции $\theta(z)$.

Две системы $\Sigma_i = (A_i, B_i, C_i, D_i; X_i, U, Y)$, $i = 1,2$, называются подобными (унитарно подобными), если существует оператор $R \in \mathbb{B}(X_1, X_2)$ с $R^{-1} \in \mathbb{B}(X_2, X_1)$ (или, соответственно, унитарный оператор) такой, что

$$A_2 = RA_1R^{-1}, \quad B_2 = RB_1, \quad C_2 = C_1R^{-1}, \quad D_2 = D_1.$$

Если для основного оператора A системы Σ выполняется условие

$$\text{(a)} \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} A^n = 0, \quad \text{или} \quad \text{(b)} \quad s\text{-}\lim_{n\to\infty} (A^*)^n = 0,$$

или оба условия (a) и (b) одновременно, то система Σ называется соответственно устойчивой, $*$-устойчивой или двусторонне устойчивой. Если при этом A – сжатие, то для него пишут: (a) $A \in C_{0\cdot}$, (b) $A \in C_{\cdot 0}$ или $A \in C_{00}$, соответственно.

2.2. Пассивные системы рассеяния, матрицы рассеяния

Система $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$ называется *консервативной системой рассеяния*, если оператор

$$M_\Sigma = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \Big(\in \mathbb{B}(X \oplus U, X \oplus Y)\Big)$$

является унитарным, т.е. имеют место равенства

$$M_\Sigma^* M_\Sigma = I_{X\oplus U}, \quad M_\Sigma M_\Sigma^* = I_{X\oplus Y}.$$

Если оператор M_Σ системы Σ является сжатием, то Σ называется пассивной системой рассеяния. Произвольная пассивная система рассеяния является сужением некоторой консервативной системы рассеяния и дилатацией некоторой минимальной пассивной системы рассеяния, см. [3].

Передаточная функция $\theta_\Sigma(z)$ пассивной системы рассеяния называется *матрицей рассеяния.*

Заметим, что в спектральной теории неунитарных операторов совокупность $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$ такая, что M_Σ – унитарный оператор, называется унитарным узлом, оператор A при этом называется основным оператором, а матрица рассеяния консервативной системы рассеяния – характеристической функцией унитарного узла, см. [16].

Основной оператор A пассивной системы рассеяния является сжатием, и потому $\mathbb{D} \subset \Lambda_A$. Известно, что сужение матрицы рассеяния произвольной пассивной системы рассеяния на единичный круг $\mathbb{D}$ принадлежит классу $S(U,Y)$ голоморфных в $\mathbb{D}$ функций $s(z)$ со значениями из $\mathbb{B}(U,Y)$, удовлетворяющих условию $\|s(z)\| \leqslant 1$ в $\mathbb{D}$. Произвольная функция $\theta(z)$ класса $S(U,Y)$ является сужением на $\mathbb{D}$ матрицы рассеяния некоторой простой консервативной системы рассеяния, определяемой по θ с точностью до унитарного подобия, см. [2–4, 16].

Для произвольной функции $s(z)$ класса $S(U,Y)$ существует

$$s\text{-}\lim_{r\uparrow 1} s(r\zeta) = s(\zeta) \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1.$$

Через $S_{\rm in}(U,Y)$ будем обозначать подкласс функций $b(z)$ класса $S(U,Y)$, являющихся двусторонне внутренними, т.е. таких $b \in S(U,Y)$, которые принимают п.в. при $|\zeta| = 1$ унитарные значения:

$$b(\zeta)^* b(\zeta) = I_U, \quad b(\zeta) b(\zeta)^* = I_Y \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1. \tag{2.3}$$

Функция $b \in S(U,Y)$ называется внутренней ($*$-внутренней), если для нее п.в. при $|\zeta| = 1$ выполняется первое (второе) равенство в (2.3). Простая консервативная система рассеяния является устойчивой, $*$-устойчивой или двусторонне устойчивой тогда и только тогда, когда сужение на $\mathbb{D}$ ее матрицы рассеяния является внутренней, $*$-внутренней функцией или принадлежит классу $S_{\rm in}(U,Y)$, соответственно, см. [2, 16].

2.3. Пассивные системы сопротивления, матрицы сопротивления

Система $\Sigma = (A, B, C, D; X, U, Y)$ является *пассивной системой сопротивления*, если $Y = U$ и имеет место неравенство

$$\begin{bmatrix} I - A^*A & C^* - A^*B \\ C - B^*A & 2\mathrm{Re}\,D - B^*B \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{2.4}$$

Пассивную систему сопротивления Σ, учитывая, что $Y = U$, будем записывать короче: $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$. Система сопротивления $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ является пассивной тогда и только тогда, когда таковой является сопряженная система $\Sigma^* = (A^*, C^*, B^*, D^*; X, U)$, т.е. выполняется условие

$$\begin{bmatrix} I - AA^* & B - AC^* \\ B^* - CA^* & 2\mathrm{Re}\,D - CC^* \end{bmatrix} \geqslant 0. \tag{2.5}$$

Действительно, условие (2.4) равносильно следующему

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C^* \\ C & 2\mathrm{Re}\,D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A^* \\ B^* \end{bmatrix} [\,A \quad B\,] & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \geqslant 0,$$

что, согласно методу “Schur complement”, эквивалентно неравенству

$$\begin{bmatrix} I & C^* & A^* \\ C & 2\mathrm{Re}\,D & B^* \\ A & B & I \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Снова применяя “Schur complement” к последнему соотношению, получим

$$\begin{bmatrix} I & B \\ B^* & 2\mathrm{Re}\,D \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} [\,A^* \quad C^*\,] \geqslant 0,$$

что равносильно условию (2.5). Приведенное доказательство было сообщено первому автору (1991 г.) японским математиком Hara, учеником T. Ando, однако второй автор получил его независимо.

Пасивная система сопротивления $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ является *консервативной* системой сопротивления, если в (2.4) и (2.5) имеют место знаки равенства. Ясно, что система $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ является консервативной системой сопротивления тогда и только тогда, когда ее основной оператор A является унитарным в X, $C = B^*A$ и $2\mathrm{Re}\, D = B^*B$. Такая система является простой тогда и только тогда, когда

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} A^n BU = X.$$

Произвольная пассивная система сопротивления является сужением некоторой консервативной системы сопротивления и дилатацией некоторой минимальной пассивной системы сопротивления, см. [3].

Лемма 1. *Сужение* $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ *пассивной системы сопротивления* $\widehat{\Sigma} = (\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}; \widehat{X}, U)$ *является пассивной системой сопротивления.*

Доказательство. Так как $\widehat{\Sigma}$ является дилатацией системы Σ, то для произвольных $x \in X$ и $u \in U$ в силу (2.1) и (2.2) имеем

$$\widehat{A}x = P_X\widehat{A}x + P_{\mathfrak{D}}\widehat{A}x = Ax + P_{\mathfrak{D}}\widehat{A}x,$$

$$\widehat{B}u = P_X\widehat{B}u + P_{\mathfrak{D}}\widehat{B}u = Bu + P_{\mathfrak{D}}\widehat{B}u,$$

$$\widehat{C}x = Cx, \quad 2\mathrm{Re}\, \widehat{D}u = 2\mathrm{Re}\, Du.$$

Используя эти соотношения, получаем для любых $x \in X(\subset \widehat{X})$ и $u \in U$:

$$\left(\begin{bmatrix} I - \widehat{A}^*\widehat{A} & \widehat{C}^* - \widehat{A}^*\widehat{B} \\ \widehat{C} - \widehat{B}^*\widehat{A} & 2\mathrm{Re}\, \widehat{D} - \widehat{B}^*\widehat{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}\right)$$

$$= \|x\|^2 - \|\widehat{A}x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u, \widehat{C}x) - 2\mathrm{Re}\,(\widehat{A}x, \widehat{B}u) + (2\mathrm{Re}\, \widehat{D}u, u) - \|\widehat{B}u\|^2$$

$$= \|x\|^2 - \|Ax\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u, Cx) - 2\mathrm{Re}\,(Ax, Bu) + (2\mathrm{Re}\, Du, u) - \|Bu\|^2$$

$$-\|P_{\mathfrak{D}}\widehat{A}x\|^2 - \|P_{\mathfrak{D}}\widehat{B}u\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(P_{\mathfrak{D}}\widehat{B}u, P_{\mathfrak{D}}\widehat{A}x)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} I - A^*A & C^* - A^*B \\ C - B^*A & 2\mathrm{Re}\, D - B^*B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}\right) - \|P_{\mathfrak{D}}\widehat{A}x + P_{\mathfrak{D}}\widehat{B}u\|^2 \geqslant 0.$$

Отсюда сразу получаем

$$\begin{bmatrix} I - A^*A & C^* - A^*B \\ C - B^*A & 2\mathrm{Re}\, D - B^*B \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Лемма доказана.

Передаточные функции $\theta_\Sigma(z) = D + zC(I - zA)^{-1}B$ пассивных систем сопротивления называются *матрицами сопротивления*. У произвольной пассивной системы сопротивления Σ основной оператор A является сжатием, поэтому $\mathbb{D} \subset \Lambda_A$ и ее матрица сопротивления определена и аналитична в $\mathbb{D}$. Сужения на единичный круг $\mathbb{D}$ матриц сопротивления пассивных систем сопротивления составляют класс $\ell(U)$ голоморфных в $\mathbb{D}$ функций $c(z)$ со значениями из $\mathbb{B}(U)$, для которых $\operatorname{Re} c(z) \geqslant 0$ в $\mathbb{D}$. Произвольная функция $c \in \ell(U)$ является сужением на $\mathbb{D}$ матрицы сопротивления некоторой простой консервативной системы сопротивления, определяемой по функции $c(z)$ с точностью до унитарного подобия. Заметим, что матрица сопротивления θ_{Σ^*} сопряженной пассивной системы сопротивления Σ^* к пассивной системе сопротивления Σ такова, что $\theta_{\Sigma^*}(z) = \theta_\Sigma^{\sim}(z)$, $z \in \mathbb{D}$.

Консервативная система сопротивления $\widehat{\Sigma} = (\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}; \widehat{X}, U)$, являющаяся дилатацией пассивной системы сопротивления $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$, называется минимальной консервативной дилатацией системы Σ, если она не является дилатацией никакой другой консервативной системы сопротивления, которая также является дилатацией системы Σ. Такая минимальная консервативная дилатация $\widehat{\Sigma}$ для Σ всегда существует и определяется по Σ с точностью до унитарного подобия с оператором подобия R таким, что $RX = X$.

Рассмотрим минимальную консервативную дилатацию $\widehat{\Sigma} = (\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}; \widehat{X}, U)$ системы Σ. Существуют подпространства $\mathfrak{D}_\pm$ в $\widehat{X}$ такие, что

$$\widehat{X} = \mathfrak{D}_- \oplus X \oplus \mathfrak{D}_+, \quad \widehat{A}^{\pm 1}\mathfrak{D}_\pm \subset \mathfrak{D}_\pm \quad \text{и} \quad \widehat{B}^*\mathfrak{D}_- = \{0\}, \quad \widehat{C}\mathfrak{D}_+ = \{0\}.$$

Пусть $\mathfrak{L}_- := \bigcap\limits_{n \geqslant 0} (\widehat{A}^*)^n \mathfrak{D}_-$ и $\mathfrak{L}_+ := \bigcap\limits_{n \geqslant 0} \widehat{A}^n \mathfrak{D}_+$. Покажем, что $\mathfrak{L}_\pm = \{0\}$. Имеем $\widehat{B}^*\mathfrak{L}_- = \{0\}$ и $\widehat{C}\mathfrak{L}_+ = \{0\}$. Пусть $\mathfrak{L}_- \neq \{0\}$. Положим

$$\widehat{X}_1 := \widehat{X} \ominus \mathfrak{L}_-, \quad \mathfrak{D}'_- := \mathfrak{D}_- \ominus \mathfrak{L}_-, \quad \widehat{A}_1 := \widehat{A}|_{\widehat{X}_1},$$

$$\widehat{B}_1 := \widehat{B}, \quad \widehat{C}_1 := \widehat{C}|_{\widehat{X}_1}, \quad \widehat{D}_1 := \widehat{D},$$

тогда будем иметь:

$$\widehat{X}_1 = \mathfrak{D}'_- \oplus X \oplus \mathfrak{D}_+, \quad \widehat{A}_1^*\mathfrak{D}'_- \subset \mathfrak{D}'_-,$$

$$\widehat{A}_1\mathfrak{D}_+ \subset \mathfrak{D}_+, \quad \widehat{B}_1^*\mathfrak{D}'_- = \{0\}, \quad \widehat{C}_1\mathfrak{D}_+ = \{0\},$$

$\widehat{A}_1$ – унитарный оператор в $\widehat{X}_1$ и

$$\widehat{C}_1 = \widehat{C}|_{\widehat{X}_1} = \widehat{B}^* \widehat{A}|_{\widehat{X}_1} = \widehat{B}^* \widehat{A}_1 = \widehat{B}_1^* \widehat{A}_1,$$

$$\widehat{B}_1^* \widehat{B}_1 = \widehat{B}^* \widehat{B} = 2\mathrm{Re}\, \widehat{D} = 2\mathrm{Re}\, \widehat{D}_1.$$

Таким образом, в случае, когда $\mathfrak{L}_- \neq \{0\}$, получаем консервативную систему сопротивления $\widehat{\Sigma}_1 = (\widehat{A}_1, \widehat{B}_1, \widehat{C}_1, \widehat{D}_1; \widehat{X}_1, U)$, являющуюся дилатацией системы Σ и сужением системы $\widehat{\Sigma}$. Получили противоречие тому, что $\widehat{\Sigma}$ является минимальной консервативной дилатацией пассивной системы сопротивления Σ. Аналогичная ситуация возникает и когда $\mathfrak{L}_+ \neq \{0\}$. Следовательно, $\mathfrak{L}_\pm = \{0\}$, и операторы $V_\pm := \widehat{A}^{\pm}|_{\mathfrak{D}_\pm}$ являются простыми полуунитарными, т.е. отображающими $\mathfrak{D}_\pm$ изометрически в себя и не имеющими унитарных частей. В дальнейшем операторы $V_\pm$ интерпретируются как потерянные внутренние каналы рассеяния консервативной системы сопротивления $\widehat{\Sigma}$ и потерянные внешние каналы рассеяния пассивной системы сопротивления Σ.

2.4. Оптимальные и $*$-оптимальные пассивные системы сопротивления

Пассивная система сопротивления $\Sigma_o = (A_o, B_o, C_o, D_o; X_o, U)$ с матрицей сопротивления $\theta_{\Sigma_o}(z)$ называется *оптимальной*, если для любой другой пассивной системы сопротивления $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ с матрицей сопротивления $\theta_\Sigma(z) \equiv \theta_{\Sigma_o}(z)$ в $\mathbb{D}$ при любых $u(k) \in U$ и $n \geqslant 0$ выполняется условие

$$\Big\| \sum_{k=0}^{n} A_o^k B_o u(k) \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{k=0}^{n} A^k B u(k) \Big\|.$$

Для оптимальной системы сопротивления Σ_o всегда $X^c_{\Sigma_o} \subset X^o_{\Sigma_o}$. Поэтому управляемая оптимальная система сопротивления всегда является наблюдаемой, а значит, и минимальной.

Наблюдаемая пассивная система сопротивления $\Sigma_1 = (A_1, B_1, C_1, D_1; X_1, U)$ называется $*$-*оптимальной*, если для любой другой наблюдаемой пассивной системы сопротивления $\Sigma = (A, B, C, D; \ X, U)$ с той же матрицей сопротивления в $\mathbb{D}$ имеем

$$\Big\| \sum_{k=0}^{n} A^k B u(k) \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{k=0}^{n} A_1^k B_1 u(k) \Big\|, \quad \forall\, u(k), \quad n \geqslant 0.$$

Из произвольной консервативной системы сопротивления $\widehat{\Sigma}$ с матрицей сопротивления $\theta_{\widehat{\Sigma}} = c(\in \ell(U))$ в $\mathbb{D}$ можно получить минимальные пассивные системы сопротивления $\Sigma_\circ$ и $\Sigma_\bullet$ сужением системы $\widehat{\Sigma}$ на подпространства $X = X_\circ$ и $X = X_\bullet$, соответственно, где

$$X_\circ = \overline{P_{X^o_{\widehat{\Sigma}}} X^c_{\widehat{\Sigma}}}, \quad X_\bullet = \overline{P_{X^c_{\widehat{\Sigma}}} X^o_{\widehat{\Sigma}}}. \tag{2.6}$$

Более того, полученные минимальные пассивные системы сопротивления $\Sigma_\circ$ и $\Sigma_\bullet$ являются оптимальной и $*$-оптимальной, соответственно. Для функции $c \in \ell(U)$ минимальная оптимальная и минимальная $*$-оптимальная реализации определяются с точностью до унитарного подобия.

Система $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ является $*$-оптимальной и минимальной пассивной системой сопротивления тогда и только тогда, когда сопряженная система $\Sigma^* = (A^*, C^*, B^*, D^*; X, U)$ является оптимальной и минимальной пассивной системой сопротивления. Доказательство этого факта для систем рассеяния см. в [13], для систем сопротивления доказательство аналогичное.

2.5. Компоненты пассивной системы сопротивления с сингулярной и абсолютно непрерывной спектральными функциями

Известно, см., например, [17], что для произвольного унитарного оператора A, действующего в некотором гильбертовом пространстве X, существует единственное разложение этого пространства в ортогональную сумму $X = X_s \oplus X_a$ двух приводящих этот оператор подпространств X_s и X_a, таких, что, если E_μ – спектральная функция оператора A, то для любого $x_a \in X_a$ функция $(E_\mu x_a, x_a)$ абсолютно непрерывна, а для любого $x_s \in X_s$ функция $(E_\mu x_s, x_s)$ сингулярна, т.е. $\frac{d}{d\mu}(E_\mu x_s, x_s) = 0$ п.в. При этом говорят, что на X_s оператор A индуцирует унитарный оператор с сингулярным спектром, а на X_a – унитарный оператор с абсолютно непрерывным спектром.

В свою очередь, согласно теореме Лангера каждому сжатию T в пространстве Гильберта X соответствует единственное разложение этого пространства в ортогональную сумму $X = X_0 \oplus X_1$, где X_0 и X_1 – подпространства, приводящие T и такие, что часть T в X_0 унитарна, а часть T в X_1 вполне неунитарна, т.е. не имеет унитарной части, см. [14, теорема 3.2].

Всякое сжатие T в гильбертовом пространстве X обладает унитарной дилатацией A в пространстве $\widehat{X}$, содержащем X как подпространство, т.е. таким унитарным оператором A, что $T^n = P_X A^n|_X$, $(n \geqslant 0)$, минимальной в том смысле, что

$$\widehat{X} = \bigvee_{-\infty}^{\infty} A^n X.$$

Такая минимальная унитарная дилатация определяется с точностью до унитарного подобия.

Пусть оператор $A \in \mathbb{B}(\widehat{X})$ является минимальной унитарной дилатацией сжатия $T \in \mathbb{B}(X)$. Если $X = X_0 \oplus X_1$ – разложение X на подпространства X_0 и X_1, приводящие T и такие, что часть T в X_0 унитарна, а часть T в X_1 вполне неунитарна, и $T = T_0 \oplus T_1$ – соответствующее разложение самого сжатия T, то $A = T_0 \oplus A_{T_1}$, где A_{T_1} – минимальная унитарная дилатация простого сжатия T_1, а $\widehat{X} = X_0 \oplus \widehat{X}_1$, где $\widehat{X}_1 = \vee_{-\infty}^{\infty} A_{T_1}^n X_1$. При этом на $\widehat{X}_1$ оператор A индуцирует унитарный оператор с абсолютно непрерывным спектром, см. [14]. Поэтому, если $\widehat{X} = \widehat{X}_s \oplus \widehat{X}_a$ – разложение пространства $\widehat{X}$ на подпространства $\widehat{X}_s$ и $\widehat{X}_a$, где оператор A индуцирует унитарный оператор с сингулярным спектром и унитарный оператор с абсолютно непрерывным спектром, соответственно, то $\widehat{X}_s \subset X_0$.

Известно, что для функции $c(z)$ класса $\ell(U)$ существуют ортогональное разложение единицы $\widetilde{E}_\mu$ в некотором гильбертовом пространстве $\widetilde{X}$ и оператор $\widetilde{B} \in \mathbb{B}(U, \widetilde{X})$ такие, что $\widetilde{X} = \bigvee\limits_{\mu \in [-\pi,\pi]} \widetilde{E}_\mu \widetilde{B} U$ и

$$c(z) = i\,\mathrm{Im}\, c(0) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\mu}+z}{e^{i\mu}-z} d\sigma(\mu), \quad \text{где} \quad \sigma(\mu) = \pi \widetilde{B}^* \widetilde{E}_\mu \widetilde{B}, \tag{2.7}$$

см., например, [15, 17, 3]. Функция $\sigma(\mu)$, $\mu \in [-\pi, \pi]$, является неотрицательной неубывающей $\mathbb{B}(U)$-значной и называется спектральной функцией функции $c(z)$. Говорят, что функция $c \in \ell(U)$ имеет абсолютно непрерывную спектральную функцию, если при любом $u \in U$ функции $\sigma_u(\mu) := (\sigma(\mu)u, u)_U$ являются абсолютно непрерывными на $[-\pi, \pi]$. В этом случае будем писать, что $c \in \ell_a(U)$. Если же у $c \in \ell(U)$ спектральная функция такова, что при любом $u \in U$ производная $\sigma'_u(\mu)$ равна нулю п.в., то говорят, что c имеет сингулярную спектральную функцию. Для функций $c \in \ell(U)$ с таким свойством будем записывать $c \in \ell_s(U)$. Рассмотрим систему $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}; \widetilde{X}, U)$ с коэффициентами

$$\widetilde{A} = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\mu} d\widetilde{E}_\mu, \quad \widetilde{C} = \widetilde{B}^* \widetilde{A}, \quad \widetilde{D} = i \operatorname{Im} c(0) + \frac{1}{2} \widetilde{B}^* \widetilde{B}.$$

Она является простой консервативной системой сопротивления с матрицей сопротивления $\theta_{\widetilde{\Sigma}}(z) = c(z)$ при $z \in \mathbb{D}$, и определяется по матрице сопротивления с точностью до унитарного подобия.

Для $c \in \ell(U)$, используя разложение пространства $\widetilde{X}$ в сумму двух приводящих унитарный оператор $\widetilde{A}$ подпространств $\widetilde{X}_s$ и $\widetilde{X}_a$, на первом из которых $\widetilde{A}$ индуцирует унитарный оператор с сингулярным спектром, а на втором – унитарный оператор с абсолютно непрерывным спектром, получаем, что спектральная функция $\sigma(\mu)$ функции $c(z)$ представима в виде суммы $\sigma(\mu) = \sigma_a(\mu) + \sigma_s(\mu)$ абсолютно непрерывной и сингулярной компонент $\sigma_a(\mu)$ и $\sigma_s(\mu)$, соответственно. Поэтому произвольную функцию $c(z)$ класса $\ell(U)$ можно представить в виде $c(z) = c_a(z) + c_s(z)$, где $c_a \in \ell_a(U)$ и $c_s \in \ell_s(U)$.

Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ – пассивная система сопротивления с матрицей сопротивления $\theta_\Sigma(z) = c(z)$ в $\mathbb{D}$. Как отмечалось ранее, основной оператор A системы Σ является сжатием в пространстве X. Пусть X_s – максимальное подпространство в X, на котором A индуцирует унитарный оператор с сингулярным спектром, и положим $X_a = X \ominus X_s$. Рассмотрим системы $\Sigma_s = (A_s, B_s, C_s, D_s; X_s, U)$ с передаточной функцией θ_{Σ_s} и $\Sigma_a = (A_a, B_a, C_a, D_a; X_a, U)$ с передаточной функцией θ_{Σ_a}, у которых

$$A_s = A|_{X_s}, \quad B_s = P_{X_s} B, \quad C_s = B_s^* A_s, \quad D_s = i \operatorname{Im} D + \frac{1}{2} B_s^* B_s$$

и

$$A_a = A|_{X_a}, \quad B_a = P_{X_a} B, \quad C_a = C|_{X_a}, \quad D_a = D - D_s.$$

Система Σ_s является консервативной системой сопротивления по построению. Система Σ_a является пассивной системой сопротивления. Действительно, используя определение ее операторов и представление $X = X_s \oplus X_a$, получаем

$$\begin{aligned} &2\operatorname{Re} D_a - B_a^* B_a = 2\operatorname{Re}(D - D_s) - B_a^* B_a \\ =&2\operatorname{Re} D - 2\operatorname{Re}\left(i \operatorname{Im} D + \frac{1}{2} B_s^* B_s\right) - B_a^* B_a \\ =&2\operatorname{Re} D - B_s^* B_s - B_a^* B_a = 2\operatorname{Re} D - B^* B, \end{aligned}$$

и тогда для любых $x \in X_a$ и $u \in U$

$$\left(\begin{bmatrix} I - A_a^* A_a & C_a^* - A_a^* B_a \\ C_a - B_a^* A_a & 2\mathrm{Re}\, D_a - B_a^* B_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right)$$

$$= \|x\|^2 - \|A_a x\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u, C_a x) - 2\mathrm{Re}\,(A_a x, B_a u) + ((2\mathrm{Re}\, D_a - B_a^* B_a)u, u)$$

$$= \|x\|^2 - \|Ax\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(u, Cx) - 2\mathrm{Re}\,(Ax, Bu) + ((2\mathrm{Re}\, D - B^* B)u, u)$$

$$= \left(\begin{bmatrix} I - A^* A & C^* - A^* B \\ C - B^* A & 2\mathrm{Re}\, D - B^* B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ u \end{bmatrix} \right) \geqslant 0.$$

При этом $\theta_\Sigma = \theta_{\Sigma_s} + \theta_{\Sigma_a}$.

Пусть $\sigma(\mu)$ – спектральная функция матрицы сопротивления $c(z)$ исходной системы Σ. Тогда $\sigma(\mu) = \sigma_a(\mu) + \sigma_s(\mu)$, где $\sigma_a(\mu)$ и $\sigma_s(\mu)$ – абсолютно непрерывная и сингулярная компоненты. Покажем, что $\sigma_a(\mu)$ и $\sigma_s(\mu)$ являются спектральными функциями матриц сопротивления $c_a := \theta_{\Sigma_a}$ и $c_s := \theta_{\Sigma_s}$ систем Σ_a и Σ_s, соответственно.

В самом деле, это очевидно, если Σ – консервативная система. В случае, когда это не так, рассмотрим минимальную консервативную дилатацию $\widehat{\Sigma} = (\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}; \widehat{X}, U)$ системы Σ. Существуют подпространства $\mathfrak{D}_\pm$ в $\widehat{X}$ такие, что

$$\widehat{X} = \mathfrak{D}_- \oplus X \oplus \mathfrak{D}_+, \quad \widehat{A}^{\pm 1}\mathfrak{D}_\pm \subset \mathfrak{D}_\pm, \quad \widehat{B}^*(\mathfrak{D}_- \oplus \widehat{A}\mathfrak{D}_+) = \{0\},$$

и операторы $V_\pm := \widehat{A}^{\pm 1}|_{\mathfrak{D}_\pm}$ являются простыми полуунитарными. Части оператора $\widehat{A}$ на подпространствах $\vee_{n>0}\widehat{A}^{\mp n}\mathfrak{D}_\pm$ имеют абсолютно непрерывный спектр, поэтому часть оператора $\widehat{A}$ с сингулярным спектром совпадает с A_s. Если теперь определить системы $\widehat{\Sigma}_s$ и $\widehat{\Sigma}_a$ по $\widehat{\Sigma}$ так же, как ранее были определены Σ_s и Σ_a по Σ, то получим, что $\widehat{\Sigma}_s$ совпадает с Σ_s, а $\widehat{\Sigma}_a$ является дилатацией системы Σ_a. Поэтому $\sigma_s(\mu)$ и $\sigma_a(\mu)$ являются спектральными функциями для $\theta_{\Sigma_s} = (\theta_{\widehat{\Sigma}_s})$ и $\theta_{\Sigma_a} = (\theta_{\widehat{\Sigma}_a})$.

Система Σ с матрицей сопротивления $c(z)$ в $\mathbb{D}$ является минимальной, если минимальными являются ее компоненты Σ_s и Σ_a. Система Σ_s является минимальной в том и только в том случае, когда она является простой. Тогда она определяется по $\sigma_s(\mu)$ и $\mathrm{Im}\, c(0)$ с точностью до унитарного подобия, и ее основной оператор A_s является унитарным. Таким образом, исследование минимальной пассивной системы сопротивления Σ сводится к исследованию ее компоненты Σ_a с матрицей сопротивления $c_a \in \ell_a(U)$.

3. Матрицы сопротивления двусторонне устойчивых систем

3.1. Пассивные системы сопротивления с потерями каналов рассеяния

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть $c \in \ell(U)$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *любая пассивная система сопротивления, являющаяся реализацией функции $c(z)$, есть консервативная система сопротивления;*

(2) *простая консервативная система сопротивления, являющаяся реализацией функции $c(z)$, минимальна;*

(3) *факторизационные неравенства*

$$\varphi(z)^*\varphi(z) \leqslant 2\mathrm{Re}\, c(z), \quad \psi(z)\psi(z)^* \leqslant 2\mathrm{Re}\, c(z), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.1}$$

имеют лишь нулевые решения в классах аналитических в $\mathbb{D}$ функций, значениями которых являются линейные ограниченные операторы, действующие между гильбертовыми пространствами.

Доказательство. Предположим, что для $c \in \ell(U)$ выполняется условие (1). Пусть Σ – минимальная пассивная система сопротивления с матрицей сопротивления $c(z)$ в $\mathbb{D}$. Согласно условию (1), система Σ является консервативной. Тогда, в силу минимальности, Σ есть простая консервативная система сопротивления, являющаяся реализацией функции $c(z)$. Так как система Σ минимальна, то имеет место условие (2).

Эквивалентность условий (2) и (3) доказана в предложении 4 в [4]. Пусть справедливо условие (3). Тогда, согласно теореме 1 в [4], все минимальные пассивные системы сопротивления с матрицей сопротивления $c(z)$ в $\mathbb{D}$ являются консервативными. Рассмотрим произвольную пассивную систему сопротивления Σ, являющуюся реализацией функции $c(z)$. Эта система, согласно статье [3], является дилатацией некоторой минимальной пассивной системы сопротивления Σ_0 с матрицей сопротивления $c(z)$ в $\mathbb{D}$. Так как система Σ_0 консервативна, то пассивная система сопротивления Σ является консервативной, и, следовательно, имеет место условие (1). Лемма доказана.

Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ – простая консервативная система сопротивления с матрицей сопротивления $\theta_\Sigma(z) \equiv c(z)$ в $\mathbb{D}$, не являющаяся наблюдаемой. Обозначим $\mathfrak{D}_+ = X \ominus X^o_\Sigma$. Будем иметь $A\mathfrak{D}_+ \subset \mathfrak{D}_+$,

$C\mathfrak{D}_+ = \{0\}$. Более того, оператор $V_+ := A|_{\mathfrak{D}_+} (\in \mathbb{B}(\mathfrak{D}_+))$ является простым полуунитарным.

Если же система Σ не управляема, то для подпространства $\mathfrak{D}_- := X \ominus X^c_\Sigma$ получим $A^*\mathfrak{D}_- \subset \mathfrak{D}_-$, $B^*\mathfrak{D}_- = \{0\}$, и оператор $V_- := A^*|_{\mathfrak{D}_-} (\in \mathbb{B}(\mathfrak{D}_-))$ будет простым полуунитарным.

Пусть теперь Σ – пассивная система сопротивления, не являющаяся консервативной. Рассмотрим консервативную систему сопротивления $\widehat{\Sigma} = (\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}; \widehat{X}, U)$, которая является минимальной консервативной дилатацией системы Σ. Тогда, как показано в п. 2.3, операторы $V_\pm = \widehat{A}^{\pm 1}|_{\mathfrak{D}_\pm}$ являются простыми полуунитарными. Они интерпретируются как потерянные внутренние каналы рассеяния консервативной системы сопротивления $\widehat{\Sigma}$ и потерянные внешние каналы рассеяния пассивной системы сопротивления Σ, которые теряются при переходе от $\widehat{\Sigma}$ к Σ.

В связи с этим в работе [12, п. 2.3], авторами был введен в рассмотрение класс пассивных систем сопротивления с потерями каналов рассеяния. А именно, под системой сопротивления без потерь каналов рассеяния понимается такая пассивная система сопротивления Σ, сужение матрицы сопротивления $c(z)$ которой на $\mathbb{D}$ удовлетворяет одному из условий леммы 2. В противном случае пассивная система сопротивления Σ называется пассивной системой сопротивления с потерями каналов рассеяния.

Пусть консервативная система сопротивления $\widehat{\Sigma}$ является минимальной консервативной дилатацией пассивной системы сопротивления Σ с потерями каналов рассеяния. Тогда, если система $\widehat{\Sigma}$ является простой, то пассивная система сопротивления Σ называется *системой с минимальными потерями каналов рассеяния.* Таким образом, произвольная пассивная система сопротивления Σ с минимальными потерями каналов рассеяния является сужением некоторой простой консервативной системы сопротивления $\widehat{\Sigma}$.

Важным для нас является случай, когда $c \in \ell_a(U)$ и ненулевые решения $\varphi \in H^2(U, Y_\varphi)$ и $\psi^\sim \in H^2(U, U_\psi)$ имеют уже факторизационные уравнения

$$\begin{aligned} &(1) \qquad \varphi(\zeta)^*\varphi(\zeta) = 2\mathrm{Re}\, c(\zeta), \\ &(2) \qquad \psi(\zeta)\psi(\zeta)^* = 2\mathrm{Re}\, c(\zeta), \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1, \end{aligned} \tag{3.2}$$

понимаемые в том смысле, что для любого $u \in U$ п.в. при $|\zeta| = 1$

$$\begin{aligned} \lim_{r\uparrow 1} \|\varphi(r\zeta)u\|^2 &= \lim_{r\uparrow 1} 2\mathrm{Re}\,(c(\zeta)u, u), \\ \lim_{r\uparrow 1} \|\psi(r\zeta)^*u\|^2 &= \lim_{r\uparrow 1} 2\mathrm{Re}\,(c(\zeta)u, u). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Уравнения (3.3) могут быть записаны в виде: для любого $u \in U$

$$\|\varphi(e^{i\mu})u\|^2 = 2\sigma_u'(\mu), \quad \|\psi(e^{i\mu})^*u\|^2 = 2\sigma_u'(\mu), \quad \text{п.в. на} \quad [-\pi, \pi], \tag{3.4}$$

где

$$\varphi(e^{i\mu})u = \lim_{r\uparrow 1} \varphi(re^{i\mu})u, \quad \psi(e^{i\mu})^*u = \lim_{r\uparrow 1} \psi(re^{i\mu})^*u \quad \text{п.в. на} \quad [-\pi, \pi],$$

а $\sigma_u(\mu) = (\sigma(\mu)u, u)$ и $\sigma(\mu)$ – спектральная функция функции $c(z)$. Если же $c \in \ell_s(U)$, то все пассивные системы сопротивления с такой матрицей сопротивления в $\mathbb{D}$ являются системами без потерь каналов рассеяния, так как в этом случае для любого $u \in U$ имеем

$$\lim_{r\uparrow 1} \varphi(r\zeta)u = 0, \quad \lim_{r\uparrow 1} \psi(r\zeta)^*u = 0 \quad \text{п.в. при} \ |\zeta| = 1.$$

Следует отметить, что обычно пассивная система сопротивления с матрицей сопротивления $c(z)$ называется системой без потерь, если для произвольного $u \in U$ справедливо соотношение $(\mathrm{Re}\, c(\zeta)u, u) = 0$ п.в. при $|\zeta| = 1$, или, другими словами, если $c \in \ell_s(U)$. Предложенное здесь определение в общем случае охватывает более широкий класс пассивных систем без потерь каналов рассеяния. В самом деле, если $c(z)$ – скалярная функция класса ℓ_a такая, что функция $\ln|\sigma'(\mu)|$ не суммируема на $[-\pi, \pi]$, то факторизационные задачи (3.1) имеют лишь нулевое решение, и потому, согласно лемме 2, произвольная пассивная система сопротивления с матрицей сопротивления $c(z)$ в $\mathbb{D}$ является консервативной системой сопротивления без потерь каналов рассеяния в определенном выше смысле.

В случае разрешимости задач (3.2) множества их решений соответственно описываются формулами

$$\varphi(z) = b_1(z)\varphi_c(z), \quad \psi(z) = \psi_c(z)b_2(z),$$

где φ_c – внешнее решение задачи (1) в (3.2) со значениями из $\mathbb{B}(U, Y_{\varphi_c})$, т.е.

$$\bigvee_{n\geqslant 0} z^n\varphi_c(z)U = H^2(Y_{\varphi_c}),$$

ψ_c – $*$-внешнее решение задачи (2) в (3.2) со значениями из $\mathbb{B}(U_{\psi_c}, U)$, что означает, что $\psi_c^\sim$ является внешней функцией, а b_1 и b_2 – произвольные внутренняя и $*$-внутренняя функции со значениями из $\mathbb{B}(Y_{\varphi_c}, Y_\varphi)$ и $\mathbb{B}(U_\psi, U_{\psi_c})$ соответственно; $\dim Y_{\varphi_c} \leqslant \dim Y_\varphi$, $\dim U_{\psi_c} \leqslant \dim U_\psi$.

При нормировке $\varphi_c(0)|_{Y_{\varphi_c}} > 0$, $\psi_c(0)^*|_{U_{\psi_c}} > 0$, $Y_{\varphi_c} \subset U$, $U_{\psi_c} \subset U$ функции φ_c и ψ_c однозначно определяются по c. В случае, когда $\dim U < \infty$, размерность пространств Y_{φ_c} и U_{ψ_c} определяется равенством

$$\dim Y_{\varphi_c} = \operatorname{rank} \operatorname{Re} c(\zeta) = \dim U_{\psi_c} \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1,$$

так что в случае разрешимости факторизационных задач (3.2) величина

$$m_c = \operatorname{rank} \operatorname{Re} c(\zeta) = \dim [\operatorname{Re} c(\zeta) U]$$

постоянна п.в. при $|\zeta| = 1$.

В работах [1] и [10] первым автором установлено, что 1) минимальная и оптимальная система сопротивления является устойчивой тогда и только тогда, когда ее матрица сопротивления $c(z)$ принадлежит классу $\ell_a(U)$ и для нее разрешима первая факторизационная задача в (3.2); 2) минимальная и $*$-оптимальная система сопротивления является $*$-устойчивой тогда и только тогда, когда ее матрица сопротивления c лежит в $\ell_a(U)$ и для нее разрешима вторая факторизационная задача в (3.2).

3.2. Двусторонне (J_1, J_2)-внутренние SI-дилатации функций класса $\ell(U)$

Согласно [12], произвольная пассивная система сопротивления $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ с потерями каналов рассеяния является частью некоторой системы $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}; X, \widetilde{U}, \widetilde{Y})$ с внешними пространствами $\widetilde{U} = U_1 \oplus U \oplus U$ и $\widetilde{Y} = Y_1 \oplus U \oplus U$, такой, что соответствующий ей оператор $M_{\widetilde{\Sigma}}$ является $(\widetilde{J}_1, \widetilde{J}_2)$-унитарным, т.е.

$$M_{\widetilde{\Sigma}}^* \widetilde{J}_2 M_{\widetilde{\Sigma}} = \widetilde{J}_1, \quad M_{\widetilde{\Sigma}} \widetilde{J}_1 M_{\widetilde{\Sigma}}^* = \widetilde{J}_2, \tag{3.5}$$

где

$$\widetilde{J}_i = \begin{bmatrix} I_X & 0 \\ 0 & J_i \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \quad J_1 = \begin{bmatrix} I_{U_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_U \\ 0 & -I_U & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} I_{Y_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_U \\ 0 & -I_U & 0 \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

и операторы системы $\widetilde{\Sigma}$ имеют специальную блочную структуру:

$$\widetilde{A} = A, \quad \widetilde{B} = [\,K \quad B \quad 0\,], \quad \widetilde{C} = \begin{bmatrix} M \\ C \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{D} = \begin{bmatrix} S & N & 0 \\ L & D & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.7}$$

Из (3.5) и (3.7) вытекает, что операторы $M \in \mathbb{B}(X, Y_1)$, $K \in \mathbb{B}(U_1, X)$, $S \in \mathbb{B}(U_1, Y_1)$, $N \in \mathbb{B}(U, Y_1)$ и $L \in \mathbb{B}(U_1, Y)$ таковы, что имеют место равенства

$$\begin{bmatrix} I - A^*A & C^* - A^*B \\ C - B^*A & 2\mathrm{Re}\, D - B^*B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^*M & M^*N \\ N^*M & N^*N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M^* \\ N^* \end{bmatrix} [\,M \quad N\,],$$

$$\begin{bmatrix} I - AA^* & B - AC^* \\ B^* - CA^* & 2\mathrm{Re}\, D - CC^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} KK^* & KL^* \\ LK^* & LL^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K \\ L \end{bmatrix} [\,K^* \quad L^*\,],$$

$$L = B^*K + N^*S, \quad N = MC^* + SL^*$$

и оператор

$$V = \begin{bmatrix} A & K \\ M & S \end{bmatrix} \in \mathbb{B}(X \oplus U_1, X \oplus Y_1) \tag{3.8}$$

является унитарным. Эти условия эквивалентны соотношениям (3.5).

Обратно, если $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}; X, \widetilde{U}, \widetilde{Y})$ – система с блочным представлением операторов $\widetilde{B}$, $\widetilde{C}$, $\widetilde{D}$, указанным в (3.7), и $(\widetilde{J}_1, \widetilde{J}_2)$-унитарным оператором $M_{\widetilde{\Sigma}}$, где $\widetilde{J}_1$ и $\widetilde{J}_2$ определены в (3.6), то ее часть – система $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ – является пассивной системой сопротивления с потерями каналов рассеяния.

Такие системы $\widetilde{\Sigma}$ со специальными операторами $\widetilde{J}_1$ и $\widetilde{J}_2$ вида (3.6), имеющие соответствующие блочные представления коэффициентов вида (3.7), являются консервативными системами прохождения типа SI (scattering-impedance). Подробнее о пассивных системах прохождения см. [3, 8]; о консервативных системах прохождения типа SI см. [12].

Сужение на $\mathbb{D}$ передаточной функции $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z)$ консервативной системы прохождения $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}; X, \widetilde{U}, \widetilde{Y})$ типа SI является голоморфной двусторонне (J_1, J_2)-сжимающей в $\mathbb{D}$ функцией, т.е. такой, что

$$\theta(z)^* J_2 \theta(z) \leqslant J_1, \quad \theta(z) J_1 \theta(z)^* \leqslant J_2, \quad z \in \mathbb{D},$$

специальной блочной структуры

$$\theta(z) = \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) & 0 \\ \gamma(z) & \delta(z) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}, \quad \delta(z) = c(z), \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.9}$$

где операторы J_1 и J_2 определяются формулой (3.6), и при $z \in \mathbb{D}$ верны равенства

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= S + zM(I - zA)^{-1}K, \\ \beta(z) &= N + zM(I - zA)^{-1}B, \\ \gamma(z) &= L + zC(I - zA)^{-1}K, \\ \delta(z) &= D + zC(I - zA)^{-1}B. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Более того, произвольная функция θ блочной структуры (3.9) с перечисленными свойствами является сужением на $\mathbb{D}$ матрицы прохождения некоторой простой консервативной системы прохождения типа SI, определяемой по θ с точностью до унитарного подобия.

В [12, теорема 5], установлено, что функция $c(z)$ из $\mathbb{D}$ в $\mathbb{B}(U)$ является сужением на $\mathbb{D}$ матрицы сопротивления некоторой пассивной двусторонне устойчивой системы сопротивления $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ тогда и только тогда, когда $c \in \ell_a$ и существует двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя функция θ со значениями из $\mathbb{B}(U_1 \oplus U \oplus U, Y_1 \oplus U \oplus U)$ специальной блочной структуры (3.9), где U_1 и Y_1 – некоторые пространства Гильберта, а J_1 и J_2 – операторы вида (3.6). Здесь функция $\theta(z)$ является двусторонне (J_1, J_2)-внутренней в том смысле, что она голоморфна в $\mathbb{D}$, принимает там двусторонне (J_1, J_2)-сжимающие значения и п.в. на окружности $|\zeta| = 1$ для любых $\widetilde{u} \in U_1 \oplus U \oplus U$ и $\widetilde{y} \in Y_1 \oplus U \oplus U$ выполняются соотношения

$$\begin{aligned} &\lim_{r \uparrow 1} (\theta(r\zeta)^* J_2 \theta(r\zeta)\widetilde{u}, \widetilde{u}) = (J_1 \widetilde{u}, \widetilde{u}); \\ &\lim_{r \uparrow 1} (\theta(r\zeta) J_1 \theta(r\zeta)^* \widetilde{y}, \widetilde{y}) = (J_2 \widetilde{y}, \widetilde{y}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

Блоки функции $\theta(z)$ обладают следующими свойствами: $\beta \in H^2(U, Y_1)$ и $\gamma^\sim \in H^2(U, U_1)$ являются решениями факторизационных задач (1) и (2) в (3.2), $\delta(= c) \in \ell(U)$ соответственно, и функция $\alpha(z)$ является двусторонне внутренней матрицей рассеяния консервативной системы рассеяния $\Sigma_{\mathrm{scat}} = (A, K, M, S; X, U_1, Y_1)$, где операторы $K \in \mathbb{B}(U_1, X)$, $M \in \mathbb{B}(X, Y_1)$ и $S \in \mathbb{B}(U_1, Y_1)$ возникают как блоки унитарного оператора V в (3.8).

Функция $\theta(z)$ с заданным блоком $\delta(z) = c(z)$ в $\mathbb{D}$, обладающая вышеуказанными свойствами, называется двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией функции $c(z)$. Если для блоков β и γ этой SI-дилатации выполняются эквивалентные, согласно [12], условия

$$\bigvee_{-\infty}^{\infty} \zeta^k \beta(\zeta) U = L^2(Y_1), \quad \bigvee_{-\infty}^{\infty} \zeta^k \gamma(\zeta)^* U = L^2(U_1), \tag{3.12}$$

то такая функция θ называется двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией с минимальными потерями. В случае, если $\dim U < \infty$, условия (3.12) эквивалентны равенству $\dim Y_1 = \dim U_1 = m_c$ п.в. В [12, теорема 10], авторами установлено соответствие между понятиями двусторонне устойчивой пассивной системы сопротивления с минимальными потерями каналов рассеяния и двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатации функции $c \in \ell(U)$ с минимальными потерями. А именно, если θ – двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация функции $c \in \ell(U)$, и по $c(z)$ определена пассивная двусторонне устойчивая система сопротивления Σ с матрицей сопротивления $c(z)$ в $\mathbb{D}$ (см. [12, формулы (5.1)]), то консервативная система сопротивления, являющаяся дилатацией исходной системы Σ и полученная из Σ подключением к ней каналов рассеяния (как в [3, с. 219]), является простой тогда и только тогда, когда θ – SI-дилатация с минимальными потерями.

В период подготовки представленной статьи к публикации, авторы благодаря А. Гомбани получили возможность познакомиться с работой [20], имеющей непосредственное отношение как к настоящей статье, так и к предшествуюшим нашим работам [11] и [12].

В [20] изучаются проблемы, относящиеся к акустическим волновым фильтрам, которые используются в различных электронных устойствах. В соответствующих системах входными данными являются приходящие волны и напряжения, а выходными – уходящие волны и силы токов. В этой связи передаточной функцией системы является так называемая “mixing matrix”. В наших обозначениях это четырехблочная матрица-функция

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix},$$

являющаяся информативной частью $J_{p,m}$-внутренней SI-дилатации θ матрицы-функции $\delta = c$, где

$$p = \dim U, \qquad m = m_c \quad \text{и} \quad J_{p,m} = \begin{bmatrix} I_m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -I_p \\ 0 & -I_p & 0 \end{bmatrix}.$$

Если читатель сравнит результаты настоящей работы и предыдущих наших работ с результатами, изложенными в [20], то он увидит, что эти результаты не перекрывают друг друга. В [20] рассматриваются системы с дополнительным свойством симметрии (reciprocity); соответствующие таким системам $J_{p,m}$-внутренние SI-дилатации описаны в п. 4.2 нашей статьи [11].

3.3. Оптимальные и минимальные, $*$-оптимальные и минимальные двусторонне (J_1, J_2)-внутренние SI-дилатации с минимальными потерями

В работе [4] была введена функция $s_c(\zeta)$, играющая важную роль в наших рассмотрениях и определяемая одним из эквивалентных соотношений

$$s_c(\zeta)\psi_c(\zeta)^* = \varphi_c(\zeta), \quad s_c(\zeta)^*\varphi_c(\zeta) = \psi_c(\zeta)^* \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1, \qquad (3.13)$$

где $\varphi_c \in H^2(U, Y_{\varphi_c})$ и $\psi_c^{\sim} \in H^2(U, U_{\psi_c})$ – внешнее и $*$-внешнее решения факторизационных задач (1) и (2) в (3.2), соответственно, а $s_c(\zeta)$ – измеримая в слабом смысле $\mathbb{B}(U_{\psi_c}, Y_{\varphi_c})$-значная в существенном ограниченная функция, принимающая унитарные значения п.в. на единичной окружности. Равенства в (3.13) понимаются в следующем смысле: для любых $u \in U$ п.в. при $|\zeta| = 1$

$$s_c(\zeta) \lim_{r\uparrow 1} \psi_c(r\zeta)^* u = \lim_{r\uparrow 1} \varphi(r\zeta)u, \quad s_c(\zeta)^* \lim_{r\uparrow 1} \varphi_c(r\zeta)u = \lim_{r\uparrow 1} \psi_c(r\zeta)^* u.$$

Пусть N_+ – класс скалярных функций $f(z)$, голоморфных в $\mathbb{D}$ и представляющихся в виде отношения $f = g/h$, где g, h – скалярные аналитические ограниченные в $\mathbb{D}$ функции, и h является внешней функцией. Будем говорить, что голоморфная в $\mathbb{D}$ функция f со значениями из $\mathbb{B}(U,Y)$ принадлежит классу $\widetilde{N}_+(U,Y)$, если для любых $u \in U$, $y \in Y$ форма $(f(z)u,y)$ принадлежит классу N_+ в $\mathbb{D}$. Для произвольной функции $f(z)$ из этого класса при $u \in U$, $y \in Y$ существует предел

$$\lim_{r\uparrow 1} (f(r\zeta)u,y) \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1.$$

Мы будем обозначать этот предел символом $(f(\zeta)u,y)$ и называть граничным значением функции $f \in \widetilde{N}_+(U,Y)$ в слабом смысле.

Известно, что $S(U,Y) \subset \widetilde{N}_+(U,Y)$, $H^2(U,Y) \subset \widetilde{N}_+(U,Y)$ и $\ell(U) \subset \widetilde{N}_+(U,U)$, а также, если $\psi^\sim \in H^2(U,Y)$, то $\psi \in \widetilde{N}_+(Y,U)$.

В случае, когда для определенной при $|\zeta| = 1$ функции $h(\zeta)$ со значениями из $\mathbb{B}(U,Y)$ существует упорядоченная пара двусторонне внутренних функций b_1 и b_2 такая, что $b_1(\zeta)h(\zeta)b_2(\zeta)$ – граничное значение в слабом смысле некоторой функции из $\widetilde{N}_+(U_1,Y_1)$, будем писать, что h принадлежит классу $\widetilde{N}(U,Y)$, а пару $\{b_1,b_2\}$ называть знаменателем функции h.

Знаменатель $\{\widehat{b}_1,\widehat{b}_2\}$ функции h называется делителем знаменателя $\{b_1,b_2\}$ функции h, если $b_1 = u\widehat{b}_1$ и $b_2 = \widehat{b}_2 v$, где u и v – двусторонне внутренние функции. Такой делитель называется тривиальным, если u и v – постоянные, т.е. унитарные операторы. Знаменатель $\{b_1,b_2\}$ функции h называется минимальным, если он не имеет нетривиальных делителей среди знаменателей функции h. Известно, что если $h \in \widetilde{N}(U,Y)$ и $\{b_1,b_2\}$ – знаменатель функции h, то существует минимальный знаменатель $\{\widetilde{b}_1,\widetilde{b}_2\}$ функции h, являющийся делителем знаменателя $\{b_1,b_2\}$, см. [2, стр. 112, предложение 6].

Знаменатели вида $\{b_1,I_U\}$ и $\{I_Y,b_2\}$ называются соответственно левым и правым знаменателями функции h. Если для h существует левый (правый) знаменатель, то для нее существует минимальный левый (соответственно, правый) знаменатель, являющийся делителем всех других левых (правых) знаменателей функции h.

Согласно [12, теорема 6], функция $c(z)$ из $\mathbb{D}$ в $\mathbb{B}(U)$ обладает двусторонне (J_1,J_2)-внутренней SI-дилатацией $\theta(z)$ с минимальными потерями тогда и только тогда, когда $c \in \ell_a(U)$, разрешимы факторизационные задачи (3.2), и функция $s_c(\zeta)$, определяемая соотношениями (3.13), принадлежит классу $\widetilde{N}(U_{\psi_c},Y_{\varphi_c})$. При этом все такие

SI-дилатации θ функции $c(z)$ описываются формулой

$$\theta(z) = \begin{bmatrix} (b_1 s_c b_2)(z) & b_1(z)\varphi_c(z) & 0 \\ \psi_c(z)b_2(z) & c(z) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.14}$$

где $\{b_1, b_2\}$ – произвольный знаменатель функции $s_c(\zeta)$.

В [12] авторами введено понятие минимальной двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатации с минимальными потерями так, что двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация θ функции $c \in \ell(U)$ с минимальными потерями является минимальной в том и только в том случае, когда соответствующий ей знаменатель $\{b_1, b_2\}$ функции $s_c(\zeta)$ является минимальным.

Двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация θ функции $c \in \ell(U)$ называется оптимальной ($*$-оптимальной), если ее блок β (γ) является внешней ($*$-внешней) функцией. Все оптимальные ($*$-оптимальные) SI-дилатации получаются по формуле (3.14) при правых (левых, соответственно) знаменателях функции $s_c(\zeta)$.

Двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация θ с минимальными потерями является минимальной и оптимальной ($*$-оптимальной) тогда и только тогда, когда соответствующий знаменатель функции $s_c(\zeta)$ является минимальным правым (левым, соответственно).

Теорема 1. *Пусть $c \in \ell(U)$ – матрица сопротивления оптимальной и минимальной системы сопротивления $\Sigma_o = (A_o, B_o, C_o, D_o;\ X_o, U)$. Если система Σ_o является двусторонне устойчивой, то $c(z)$ принадлежит классу $\ell_a(U)$ и обладает оптимальной и минимальной двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией $\theta_o(z)$ с минимальными потерями вида*

$$\theta_o(z) = \begin{bmatrix} (s_c b_o)(z) & \varphi_c(z) & 0 \\ \psi_c(z)b_o(z) & c(z) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.15}$$

где $\{I, b_o(z)\}$ – минимальный правый знаменатель функции $s_c(\zeta)$.

Обратно, если $c \in \ell_a(U)$, и для c существует оптимальная и минимальная двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация $\theta_o(z)$ с минимальными потерями, то система Σ_o является двусторонне устойчивой.

Доказательство. Пусть система $\Sigma_o = (A_o, B_o, C_o, D_o; X_o, U)$ является двусторонне устойчивой. Согласно результатам п. 3.1 в [12], она является частью консервативной системы прохождения $\widetilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ типа SI. Из теорем 4 и 5 в [12] следует, что $c \in \ell_a(U)$, и передаточная функция $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}$ системы $\widetilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ является двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией матрицы сопротивления $c(z)$. По теореме 3 в [12], в силу оптимальности системы Σ_o блок $\beta \in H^2(U, Y_1)$ функции $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}$ является внешним решением факторизационной задачи (1) в (3.2), т.е. $\beta = \varphi_c$. Значит, $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}$ – оптимальная двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация матрицы сопротивления $c(z)$.

Поскольку система Σ_o оптимальна и минимальна, она является пассивной системой сопротивления с минимальными потерями. Согласно результатам параграфа 5 в [12] из этого вытекает, что $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}$ является минимальной и оптимальной двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией функции $c(z)$ с минимальными потерями. Таким образом,

$$\begin{aligned}\theta_o(z) = \widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z) &= \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) & 0 \\ \gamma(z) & \delta(z) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (s_c b_o)(z) & \varphi_c(z) & 0 \\ \psi_c(z) b_o(z) & c(z) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{D},\end{aligned}$$

где $b_o \in S_{\mathrm{in}}(U_1, U_{\psi_c})$, а $\{I_{Y_{\varphi_c}}, b_o\}$ – минимальный правый знаменатель функции $s_c(\zeta)$.

Обратно, пусть матрица c лежит в $\ell_a(U)$, и формулой (3.15) определяется ее оптимальная и минимальная двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация $\theta_o(z)$ с минимальными потерями. С ее помощью построим функциональную модель $\dot{\Sigma}_o$ системы Σ_o способом, указанным в [12, п. 5.1]. Так как основной оператор системы $\dot{\Sigma}_o$ принадлежит классу C_{00}, то Σ_o является двусторонне устойчивой пассивной системой сопротивления. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть $c \in \ell(U)$ – матрица сопротивления $*$-оптимальной и минимальной системы сопротивления $\Sigma_\bullet = (A_\bullet, B_\bullet, C_\bullet, D_\bullet; X_\bullet, U)$. Если $\Sigma_\bullet$ является двусторонне устойчивой, то $c(z)$ принадлежит классу $\ell_a(U)$ и обладает $*$-оптимальной и минимальной двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией $\theta_\bullet(z)$ с минимальными потерями вида*

$$\theta_\bullet(z) = \begin{bmatrix} (b_\bullet s_c)(z) & b_\bullet(z)\varphi_c(z) & 0 \\ \psi_c(z) & c(z) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}, \quad z \in \mathbb{D}, \tag{3.16}$$

где $\{b_\bullet(z), I\}$ – *минимальный левый знаменатель функции* $s_c(\zeta)$.

Обратно, если матрица c *лежит в* $\ell_a(U)$, *и для нее существует* $*$-*оптимальная и минимальная двусторонне* (J_1, J_2)-*внутренняя SI-дилатация* $\theta_\bullet(z)$ *с минимальными потерями, то система* $\Sigma_\bullet$ *является двусторонне устойчивой.*

Доказательство. Рассмотрим сопряженную систему

$$\Sigma_\bullet^* = (A_\bullet^*, C_\bullet^*, B_\bullet^*, D_\bullet^*; X_\bullet, U).$$

Согласно п. 2.4 она является оптимальной и минимальной пассивной системой сопротивления с матрицей сопротивления $c^\sim(z)$ в $\mathbb{D}$. Применяя к $\Sigma_\bullet^*$ теорему 1, получим требуемое.

4. Пассивные системы сопротивления с основным оператором класса C_0

4.1. Консервативные системы рассеяния с основным оператором класса C_0

Важным подклассом класса C_{00} является класс C_0 сжатий A, для которых определена минимальная функция $m_A(z)$, введенный и иследованный Б. С.-Надем и Ч. Фояшем, см. [14].

Вполне неунитарное сжатие $A \in \mathbb{B}(X)$ относится к классу C_0, если для него существует ограниченная аналитическая в $\mathbb{D}$ скалярная функция $m(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} m_k z^k (\not\equiv 0)$ такая, что $m(A) = 0$, где

$$m(A) = s\text{-}\lim_{r\uparrow 1} \Big(\sum_{k=0}^{\infty} m_k r^k A^k \Big).$$

Среди таких функций существует делитель всех других, определяющийся с точностью до постоянного множителя, и эта функция может быть выбрана внутренней. Такая внутренняя функция обозначается через $m_A(z)$ и называется минимальной функцией сжатия $A (\in C_0)$. Известно, что спектр сжатия A класса C_0 полностью определяется сингулярностями функции $m_A(z)$.

Из [14, с. 296, теорема 5.2] известно, что если $A \in \mathbb{B}(X)$ – сжатие класса C_{00}, имеющее конечные дефектные числа

$$\mathfrak{d}_A := \dim \overline{(I_X - A^*A)^{1/2} X}, \quad \mathfrak{d}_{A^*} := \dim \overline{(I_X - AA^*)^{1/2} X},$$

то $A \in C_0$ и $\mathfrak{d}_A = \mathfrak{d}_{A^*} := m(< \infty)$. Класс таких сжатий обозначается символом $C_0(m)$.

Согласно [14], скалярная аналитическая сжимающая в $\mathbb{D}$ функция $v(z)(\not\equiv 0)$ называется скалярным кратным функции $b(z)$ класса $S(U, Y)$, если существует такая функция $b_1 \in S(Y, U)$, что

$$b_1(z)b(z) = v(z)I_U, \quad b(z)b_1(z) = v(z)I_Y.$$

Известно, см. [2] и [14, с. 294, теорема 5.1], что $\alpha(z)$ является двусторонне внутренней функцией со скалярным кратным тогда и только тогда, когда основной оператор A простой консервативной системы рассеяния с матрицей рассеяния $\alpha(z)$ в $\mathbb{D}$ принадлежит классу C_0.

4.2. Матрицы сопротивления класса $\ell(U)\Pi$

Определим подкласс $\ell(U)\Pi$ класса $\ell(U)$ следующим образом. Если $c \in \ell_s(U)$, то $c \in \ell(U)\Pi$; если же функция c лежит в $\ell_a(U)$, то она принадлежит классу $\ell(U)\Pi$ в том и только в том случае, когда для нее существует скалярная внутренняя функция $v(z)$ такая, что при любом $u \in U$ функция $v(e^{i\mu})\sigma'_u(\mu)$ является граничным значением некоторой функции класса H^1 в $\mathbb{D}$. Если $c \in \ell(U)$ и $c = c_s + c_a$, где $c_s \in \ell_s(U)$ и $c_a \in \ell_a(U)$, то считаем, что $c \in \ell(U)\Pi$, если $c_a \in \ell(U)\Pi$. Обозначим $\ell_a(U)\Pi = \ell_a(U) \cap \ell(U)\Pi$

У функции $c \in \ell_a(U)\Pi$ среди скалярных внутренних функций v таких, что $v(e^{i\mu})\sigma'_u(\mu)$ – граничное значение функции из H^1 в $\mathbb{D}$ для любого $u \in U$, существует общий делитель v_0 всех других v. Обозначим $b_c(z) = \overline{v_0(\overline{z})}$.

Имеет место следующий результат, анонсированный в [1] и изложенный с приводимым ниже доказательством в [10].

Теорема 3. *Если $c(z)$ – матрица сопротивления пассивной системы сопротивления с основным оператором A класса C_0, то $c \in \ell_a(U)\Pi$, причем m_A делится на b_c. Если $c \in \ell_a(U)\Pi$, то любая минимальная пассивная система сопротивления с матрицей сопротивления $c(z)$ в $\mathbb{D}$ имеет основной оператор A класса C_0, и $m_A = b_c$.*

Доказательство. Пусть $c \in \ell_a(U)\Pi$ и пусть $v\sigma'_u \in H^1$ при $u \in U$. Тогда $v^{\sim}\sigma'_u \in H^1$ для любого $u \in U$,

$$v(z) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k z^k, \quad \frac{d}{d\mu}(\sigma(\mu)u, u) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(u, u)e^{ik\mu}$$

и $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \overline{v_k} c_{-k-n}(u,u) = 0$.

Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ – минимальная пассивная система сопротивления с матрицей сопротивления $c(z)$, $z \in \mathbb{D}$. Так как

$$(c(z)u, u) = (Du, u) + \sum_{k=1}^{\infty} (CA^{k-1}Bu, u) z^k = (Du, u) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(u, u) z^k$$

и $c_{k+n}(u,u) = \overline{c_{-k-n}(u,u)}$, то для любого $u \in U$ получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \overline{v_k}(u, CA^{n+k}Bu) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k (CA^{n+k}Bu, u) = 0, \quad n \geqslant 0. \qquad (4.1)$$

Применяя теорему Абеля к (4.1), будем иметь

$$\lim_{r \uparrow 1} \Big(C \Big[\sum_{k=0}^{\infty} v_k r^k A^k \Big] A^n Bu, u \Big) = 0, \quad n \geqslant 0. \qquad (4.2)$$

Так как $v(A) = s\text{-}\lim\limits_{r \uparrow 1} \sum\limits_{k=0}^{\infty} v_k r^k A^k$, то из (4.2) вытекает

$$(Cv(A)A^n Bu, u) = 0, \quad n \geqslant 0, \quad u \in U.$$

Следовательно, $Cv(A)A^nB = 0$, $n \geqslant 0$, и тогда

$$(Cv(A)A^n Bu_1, u_2) = 0, \quad n \geqslant 0, \quad u_1, u_2 \in U.$$

Отсюда, в силу того, что для минимальной системы Σ выполняется равенство

$$\bigvee_{n \geqslant 0} A^n BU = \bigvee_{n \geqslant 0} (A^*)^n C^* U = X,$$

получаем $v(A) = 0$. Значит, $A \in C_0$, и v делится на m_A.

Пусть теперь $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ – произвольная пассивная система сопротивления с основным оператором A класса C_0 с матрицей сопротивления $c(z)$ в $\mathbb{D}$. Тогда $c \in \ell_a(U)$ и, если $v(z)$ – скалярная внутренняя функция такая, что $v(A) = 0$, то, обращая приведенные выше рассуждения, получаем, что $v^{\sim}\sigma'_u \in H^1$. Следовательно, $c \in \ell_a(U)\Pi$ и v делится на b_c. В частности, m_A делится на b_c.

Для минимальной системы Σ будем иметь: m_A делится на b_c, и b_c делится на m_A, так что $m_A = b_c$. Теорема доказана.

Из теорем 1–3 и того, что $C_0 \subset C_{00}$, вытекает следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функция $c(z)$ принадлежит классу $\ell_a(U)\Pi$. Тогда для нее существуют оптимальная и минимальная и $*$-оптимальная и минимальная двусторонне (J_1, J_2)-внутренние SI-дилатации θ с минимальными потерями.*

Замечание 1. Если $A \in \mathbb{B}(X)$ – сжатие класса C_0, то функция $(I - zA)^{-1}$ является голоморфной в $\mathbb{D}$ и мероморфной в $\mathbb{D}_e$; см. [2].

Пусть $\Sigma = (A, B, C, D; X, U)$ – пассивная система сопротивления с основным оператором A класса C_0 и матрицей сопротивления $c(z)$ в $\mathbb{D}$. Как уже было отмечено ранее, система Σ является частью консервативной SI-системы прохождения $\widetilde{\Sigma} = (\widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{C}, \widetilde{D}; X, \widetilde{U}, \widetilde{Y})$ с передаточной функцией $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z)$ в $\mathbb{D}$ вида (3.9) и операторами J_1 и J_2, определяющимися по формуле (3.6). Для блоков функции $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z)$: $\alpha \in S_{\text{in}}(U_1, Y_1)$, $\beta \in H^2(U, Y_1)$, $\gamma^{\sim} \in H^2(U, U_1)$ и $\delta(= c) \in \ell(U)$ имеют место представления (3.10) через операторы системы $\widetilde{\Sigma}$; функции β и γ являются решениями первой и второй факторизационных задач в (3.2), соответственно. При этом функция $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z)$ является двусторонне (J_1, J_2)-внутренней SI-дилатацией матрицы сопротивления $c(z)$.

Функция $\alpha \in S_{\text{in}}(U_1, Y_1)$ является матрицей рассеяния простой консервативной системы рассеяния с основным оператором класса C_0, и, следовательно, обладает скалярным кратным. Поэтому для нее существует мероморфное псевдопродолжение ограниченной характеристики Неванлинны в $\mathbb{D}_e$, см. [2]. А именно,

$$\alpha(z) = b_c^{-1}(1/z)\alpha_1(z), \quad z \in \mathbb{D}_e, \tag{4.3}$$

где $\alpha_1(1/z)$ принадлежит классу $S(U_1, Y_1)$, и

$$s\text{-}\lim_{r\uparrow 1} \alpha(r\zeta) = s\text{-}\lim_{r\downarrow 1} \alpha(r\zeta) \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1.$$

Более того, псевдопродолжение функции α в $\mathbb{D}_e$ определяется по принципу симметрии

$$\alpha(z) = \left[\alpha(1/\overline{z})^*\right]^{-1}, \quad z \in \mathbb{D}_e, \tag{4.4}$$

и записывается по формуле

$$\alpha(z) = S + zM(I - zA)^{-1}K, \quad z \in \mathbb{D}_e.$$

В силу замечания 1 множество Λ_A содержит в себе открытый единичный круг $\mathbb{D}$ и его внешность $\mathbb{D}_e$ за исключением изолированных полюсов в $\mathbb{D}_e$, и потому функция $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z)$ записывается в виде

$$\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z) = \widetilde{D} + z\widetilde{C}(I - z\widetilde{A})^{-1}\widetilde{B}$$

$$= \begin{bmatrix} S & N & 0 \\ L & D & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} M \\ C \\ 0 \end{bmatrix} (I - zA)^{-1} \begin{bmatrix} K & B & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} S + zM(I - zA)^{-1}K & N + zM(I - zA)^{-1}B & 0 \\ L + zC(I - zA)^{-1}K & D + zC(I - zA)^{-1}B & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha(z) & \beta(z) & 0 \\ \gamma(z) & c(z) & I_U \\ 0 & I_U & 0 \end{bmatrix}, \quad z \in \Lambda_A.$$

Как известно из теории консервативных систем прохождения, см. [3], консервативная система прохождения $\widetilde{\Sigma}$ представляет собой (J_1, J_2)-унитарный узел. Передаточная функция $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}$ системы $\widetilde{\Sigma}$ является характеристической функцией этого узла и обладает тем свойством, что

$$\frac{J_1 - \widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(\omega)^* J_2 \widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z)}{1 - \overline{\omega} z} = 0,$$
$$\frac{J_2 - \widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z) J_1 \widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(\omega)^*}{1 - \overline{z}\omega} = 0, \quad z, \omega \in \Lambda_A.$$

Отсюда, полагая $\omega := 1/\overline{z}$, будем иметь

$$\begin{aligned} &\widetilde{\theta}^{\#}_{J_1,J_2}(z) J_2 \widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z) = J_1, \\ &\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z) J_1 \widetilde{\theta}^{\#}_{J_1,J_2}(z) = J_2, \quad z, \overline{z}^{-1} \in \Lambda_A. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Расписывая подробно по блокам равенства (4.5) и учитывая (4.4), получаем соотношения

$$\beta(z) = \left[\alpha^{\#}(z)\right]^{-1} \gamma^{\#}(z), \quad \gamma(z) = \beta^{\#}(z)\left[\alpha^{\#}(z)\right]^{-1}, \quad z, \overline{z}^{-1} \in \Lambda_A, \tag{4.6}$$

и

$$c(z) = -c^{\#}(z) + \beta^{\#}(z)\beta(z) = -c^{\#}(z) + \gamma(z)\gamma^{\#}(z), \quad z, \overline{z}^{-1} \in \Lambda_A. \quad (4.7)$$

Из (4.6) и (4.7) видно, что $\beta \in \widetilde{N}_+(U, Y_1)$, $\gamma \in \widetilde{N}_+(U_1, U)$ и $c \in \widetilde{N}_+(U, U)$ в $\mathbb{D}_e$. Покажем теперь, что для произвольных $u \in U$, $y \in Y_1$

$$\lim_{r\downarrow 1} (\beta(r\zeta)u, y) = \lim_{r\uparrow 1} (\beta(r\zeta)u, y) \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1. \qquad (4.8)$$

В самом деле, в силу соотношений (3.11), имеющих место для функции $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}$, п.в. при $|\zeta| = 1$ для любых $u \in U, u_1 \in U_1$ выполняется

$$\lim_{r\uparrow 1} (\alpha(r\zeta)^*\beta(r\zeta)u, u_1) = \lim_{r\uparrow 1} (\gamma(r\zeta)^*u, u_1).$$

Отсюда с учетом (4.6) п.в. при $|\zeta| = 1$ имеем

$$\lim_{r\downarrow 1} (\beta(r\zeta)u, y) = \lim_{r\downarrow 1} \left(\left[\alpha^{\#}(r\zeta)\right]^{-1} \gamma^{\#}(r\zeta)u, y\right)$$

$$= \lim_{r\downarrow 1} \left(\left[\alpha(1/r\overline{\zeta})^*\right]^{-1} \ \gamma(1/r\overline{\zeta})^*u, y\right) = \lim_{\rho\uparrow 1} \left([\alpha(\rho\zeta)^*]^{-1} \gamma(\rho\zeta)^*u, y\right)$$

$$= \lim_{\rho\uparrow 1} \left([\alpha(\rho\zeta)^*]^{-1} \alpha(\rho\zeta)^*\beta(\rho\zeta)u, y\right) = \lim_{\rho\uparrow 1} (\beta(\rho\zeta)u, y).$$

Аналогичным образом из (4.6) можно получить, что для любых $u \in U$ и $u_1 \in U_1$

$$\lim_{r\downarrow 1} (\gamma(r\zeta)u_1, u) = \lim_{r\uparrow 1} (\gamma(r\zeta)u_1, u) \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1.$$

Покажем теперь, что матрица сопротивления $c(z)$ исходной пассивной системы сопротивления Σ такова, что для произвольных $u_1, u_2 \in U$

$$\lim_{r\downarrow 1} (c(r\zeta)u_1, u_2) = \lim_{r\uparrow 1} (c(r\zeta)u_1, u_2) \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1. \qquad (4.9)$$

В самом деле, используя (4.7) и (4.8), для любых $u_1, u_2 \in U$ п.в. при $|\zeta| = 1$, имеем

$$\lim_{r\downarrow 1} (c(r\zeta)u_1, u_2) = \lim_{r\downarrow 1} (-c^{\#}(r\zeta)u_1, u_2) + \lim_{r\downarrow 1} (\beta^{\#}(r\zeta)\beta(r\zeta)u_1, u_2)$$

$$= -\lim_{r\downarrow 1}(c(1/r\overline{\zeta})^* u_1, u_2) + \lim_{r\downarrow 1}(\beta(1/r\overline{\zeta})^*\beta(r\zeta)u_1, u_2)$$

$$= -\lim_{\rho\uparrow 1}(c(\rho\zeta)^* u_1, u_2) + \lim_{r\downarrow 1}(\beta(r\zeta)u_1, \beta(1/r\overline{\zeta})u_2)$$

$$= -\lim_{\rho\uparrow 1}(c(\rho\zeta)^* u_1, u_2) + \lim_{\rho\uparrow 1}(\beta(\rho\zeta)u_1, \beta(\rho\zeta)u_2)$$

$$= -\lim_{\rho\uparrow 1}(c(\rho\zeta)^* u_1, u_2) + \lim_{\rho\uparrow 1}(2\mathrm{Re}\, c(\rho\zeta)u_1, u_2) = \lim_{\rho\uparrow 1}(c(\rho\zeta)u_1, u_2).$$

В силу (4.3), (4.6) и (4.7) функция $b_c(z)$ является носителем особенностей функций $\alpha(z)$, $c(z)$, $\beta(z)$ и $\gamma(z)$ в $\mathbb{D}_e$.

Из (4.5) вытекает, что

$$\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z) = J_2\left[\widetilde{\theta}^{\#}_{J_1,J_2}(z)\right]^{-1} J_1, \quad z\in\mathbb{D}_e, \quad \overline{z}^{-1}\in\Lambda_A,$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned}\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z) &= J_2\big[\widetilde{\theta}^{\#}_{J_1,J_2}(z)\big]^{-1} J_1\\ &= \begin{bmatrix} \big[\alpha^{\#}(z)\big]^{-1} & \big[\alpha^{\#}(z)\big]^{-1}\gamma^{\#}(z) & 0\\ \beta^{\#}(z)\big[\alpha^{\#}(z)\big]^{-1} & -c^{\#}(z)+\beta^{\#}(z)\big[\alpha^{\#}(z)\big]^{-1}\gamma^{\#}(z) & I_U\\ 0 & I_U & 0\end{bmatrix}\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix}\alpha(z) & \beta(z) & 0\\ \gamma(z) & c(z) & I_U\\ 0 & I_U & 0\end{bmatrix} = \widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(z), \quad z\in\mathbb{D}_e, \quad \overline{z}^{-1}\in\Lambda_A.$$

Следовательно, двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}$ матрицы сопротивления $c(z)$ принадлежит классу $\widetilde{N}_+(\widetilde{U},\widetilde{Y})$ в $\mathbb{D}_e$, и, более того, мероморфное псевдопродолжение во внешность единичного круга $\mathbb{D}_e$ в слабом смысле сужения $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}$ на $\mathbb{D}$ совпадает с самой функцией $\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}$ в $\mathbb{D}_e$, так, что для любых $\widetilde{u}\in\widetilde{U}$ и $\widetilde{y}\in\widetilde{Y}$

$$\lim_{r\downarrow 1}(\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(r\zeta)\widetilde{u}, \widetilde{y}) = \lim_{r\uparrow 1}(\widetilde{\theta}_{J_1,J_2}(r\zeta)\widetilde{u}, \widetilde{y}) \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1.$$

Замечание 2. Согласно замечанию 1, функция

$$f(z) := c(z) + c^{\#}(z) (= \beta^{\#}(z)\beta(z) = \gamma(z)\gamma^{\#}(z))$$

является мероморфной при $|z| \neq 1$, и в силу (4.9) для любых $u_1, u_2 \in U$

$$\frac{d}{d\mu}(\sigma(\mu)u_1, u_2) = \lim_{r\uparrow 1}(f(re^{i\mu})u_1, u_2) = \lim_{r\downarrow 1}(f(re^{i\mu})u_1, u_2) \quad \text{п.в.} \qquad (4.10)$$

Действительно, для произвольных $u_1,\ u_2 \in U$

$$\lim_{r\uparrow 1}(f(re^{i\mu})u_1, u_2) = \lim_{r\uparrow 1}(c(re^{i\mu})u_1, u_2) + \lim_{r\uparrow 1}(c(1/re^{-i\mu})^* u_1, u_2)$$

$$= \lim_{r\uparrow 1}(c(re^{i\mu})u_1, u_2) + \lim_{\rho\downarrow 1}(c(\rho e^{i\mu})^* u_1, u_2)$$

$$= \lim_{r\uparrow 1}(c(re^{i\mu})u_1, u_2) + \lim_{\rho\uparrow 1}(c(\rho e^{i\mu})^* u_1, u_2)$$

$$= \lim_{r\uparrow 1}(2\mathrm{Re}\, c(r\zeta)u_1, u_2) = \frac{d}{d\mu}(\sigma(\mu)u_1, u_2), \qquad \text{п.в.}$$

$$\lim_{r\downarrow 1}(f(re^{i\mu})u_1, u_2) = \lim_{r\downarrow 1}(c(re^{i\mu})u_1, u_2) + \lim_{r\downarrow 1}(c(1/re^{-i\mu})^* u_1, u_2)$$

$$= \lim_{r\uparrow 1}(c(re^{i\mu})u_1, u_2) + \lim_{\rho\uparrow 1}(c(\rho e^{i\mu})^* u_1, u_2) = \frac{d}{d\mu}(\sigma(\mu)u_1, u_2), \qquad \text{п.в.}$$

В матричнозначном случае (4.10) означает, что

$$\sigma'(\mu) = \lim_{r\uparrow 1} f(re^{i\mu}) = \lim_{r\downarrow 1} f(re^{i\mu}) \qquad \text{п.в.}$$

Теорема 5. *Пусть $c \in \ell_a(U)\Pi$, и $\mathbb{B}(\widetilde{U}, \widetilde{Y})$-значной функцией $\theta(z)$ определяется минимальная двусторонне (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация функции $c(z)$ с минимальными потерями. Тогда $\theta(z)$ имеет мероморфное псевдопродолжение в слабом смысле в $\mathbb{D}_e$ класса $\widetilde{N}(\widetilde{U}, \widetilde{Y})$ в $\mathbb{D}_e$, определяющееся по принципу симметрии*

$$\theta(z) = J_2\left[\theta^{\#}(z)\right]^{-1} J_1, \quad z \in \mathbb{D}_e.$$

Доказательство. Рассмотрим простую консервативную SI-систему прохождения $\widetilde{\Sigma}_{J_1,J_2}$ с передаточной функцией $\theta(z)$ в $\mathbb{D}$. По этой системе, как ее часть, согласно [12, п. 5.1], определяется двусторонне устойчивая система сопротивления Σ с матрицей сопротивления $c(z)$, $z \in \mathbb{D}$. По теореме 9 в [12] система Σ является минимальной. Так как

$c \in \ell_a(U)\Pi$, то по теореме 3 основной оператор A системы сопротивления Σ принадлежит классу C_0. Далее, применяя к минимальной системе сопротивления Σ рассуждения, приведенные в этом пункте выше, получаем требуемое.

Замечание 3. Если $c \in \ell_s(U)(\subset \ell(U)\Pi)$, то мероморфное псевдопродолжение в $\mathbb{D}_e$ в слабом смысле определяется по формуле

$$c_-(z) = -c^{\#}(z), \quad z \in \mathbb{D}_e.$$

Пусть имеет место включение $A \in C_0(m)$. Тогда для матрицы сопротивления $c(z)$ справедливы рассмотрения, представленные авторами в работе [11]. В частности, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть $c \in \ell(U)$ и $\dim U < \infty$. Тогда для функции $c(z)$ существует (J_1, J_2)-внутренняя SI-дилатация θ с минимальными потерями тогда и только тогда, когда c имеет абсолютно непрерывную спектральную функцию, и для нее существует псевдопродолжение c_- во внешность $\mathbb{D}_e$ круга $\mathbb{D}$ с ограниченной характеристикой Неванлинны в $\mathbb{D}_e$, т.е. такая функция c_-, что $c_-(1/z) \in \widetilde{N}(U,U)$ и*

$$\lim_{r\uparrow 1} c(r\zeta) = \lim_{r\downarrow 1} c_-(r\zeta) \quad \text{п.в. при} \quad |\zeta| = 1.$$

Литература

1. Д. З. Аров, *Оптимальные и устойчивые пассивные системы.* — Докл. АН СССР **247**, 2 (1979), 265–268.
2. Д. З. Аров, *Устойчивые диссипативные линейные стационарные динамические системы рассеяния.* — J. Operator Theory **2** (1979), 95–126.
3. Д. З. Аров, *Пассивные линейные стационарные динамические системы.* — Сиб. матем. журнал **20** (1979), 211–228.
4. D. Z. Arov, M. A. Nudel'man, *Tests for the similarity of all minimal passive realizations of a fixed transfer function (scattering or resistance matrix).* — Mat. Sb. **193:6** (2002), 791–810.
5. Д. З. Аров, *О методе Дарлингтона в исследовании диссипативных систем.* — Докл. АН СССР **201:3** (1971), 559–562.
6. Д. З. Аров, *Реализация матриц-функций по Дарлингтону.* — Изв. АН СССР **37:6** (1973), 1299–1331.
7. Д. З. Аров, *Реализация канонической системы с диссипативным граничным условием на одном конце сегмента по коэффициенту динамической податливости.* — Сиб. матем. журнал **16:3** (1975), 440–463.
8. Д. З. Аров, *О функциях класса* П. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **135** (1984), 5–30.

9. В. М. Адамян, Д. З. Аров, *Об унитарных сцеплениях полуунитарных операторов.* — Матем. исследования, Кишинев **1**, вып. 2 (1966), 3–64.
10. Д. З. Аров, *Линейные стационарные пассивные системы с потерями.* Докт. дисс., Одесса (1983).
11. Д. З. Аров, Н. А. Роженко, *$J_{p,m}$-внутренние дилатации матриц-функций класса Каратеодори, имеющих псевдопродолжение.* — Алгебра и Анализ **19**, No. 3 (2007), 76–106.
12. Д. З. Аров, Н. А. Роженко, *Пассивные системы сопротивления с потерями каналов рассеяния.* — Укр. матем. ж., Киев **59**, No. 5 (2007), 618–649.
13. D. Z. Arov, M. A. Kaashoek, D. R. Pik, *Minimal and optimal linear discrete time-invariant dissipative scattering systems.* — Integral Equations and Operator Theory **29** (1997), 127–154.
14. Б. Секефальви-Надь, Ч. Фояш, *Гармонический анализ операторов в гильбертовом пространстве.* Мир, М. 1970.
15. М. С. Бродский, *Треугольные и жордановы представления линейных операторов.* Наука, М., 1969.
16. М. С. Бродский, *Унитарные операторные узлы и их характеристические функции.* — Усп. матем. наук **33**, вып. 4, (202) (1978).
17. Н. И. Ахиезер, И. М. Глазман, *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.* — Харьков, “Вища школа” (1978).
18. R. G. Douglas, J. W. Helton, *Inner dilations of analytic matrix functions and Darlington synthesis.* — Acta Sci. Math. (Szeged) **34** (1973), 61–67.
19. P. De Wilde, *Roomy scattering matrix synthesis.* — Technical Report, Berkeley, 1971.
20. L. Baratchart, A. Gombani, M. Olivi, *Parameter determination for surface acoustic wave filters.* — in: IEEE Conference on Decision and Control, Sydney, Australia, December 2000.

Arov D. Z., Rozhenko N. A. To the theory of passive systems of resistance with losses of scattering channels.

The passive systems of resistance with losses of scattering channels are studied. Special attention is paid to the analysis of passive systems of resistance whose basic operators belong to the class C_0 of contractions in Hilbert space, having a minimal function in sence of Bela Sz.-Nagy and Ciprian Foiaş.

Южноукраинский государственный
педагогический университет
им. К. Д. Ушинского, г. Одесса
E-mail: mainatasha@mail.ru

Поступило 2 августа 2007 г.