Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 355, 2008 г.

А. Б. Александров

О ПОДХОДЕ КУСИСА К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОЙ ТЕОРЕМЫ КАРЛЕСОНА

1. Введение

Кусис [9] вывел интерполяционную теорему Карлесона из теоремы Пика. В настоящей работе мы развиваем этот подход Кусиса к теореме Карлесона. Во-первых, мы несколько упрощаем доказательство Кусиса, но, разумеется, мы не претендуем на то, чтобы упростить доказательство Джонса (см. [8] и [10]).

Главная наша задача заключается в том, чтобы показать, что метод Кусиса работает также и в ряде других близких вопросов. Таким образом, настоящая статья носит в основном методический характер и по существу не содержит новых результатов.

Напомним формулировку задачи Пика. Пусть $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=1}^N$ и $w = \{w_j\}_{j=1}^N$ – две конечных последовательности комплексных чисел, причём $\operatorname{Im}\zeta_j > 0$ при всех j. Найти голоморфную в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ функцию f такую, что $f(\zeta_j) = w_j$ при $j = 1, 2, \dots, N$ и $\sup_{\mathbb{C}_+} |f| \leqslant 1$.

Теорема Пика[1] утверждает, что эта задача разрешима в том и только в том случае, когда $D_w U_\zeta \overline{D}_w \leqslant U_\zeta$, где матрица U_ζ определяется формулой (1), см. §2, а D_w обозначает диагональную матрицу с диагональными элементами $w_1, w_2, \dots, w_N$.

Пусть M_ζ обозначает наименьшую из всех констант $M \in [1, +\infty]$, для которых задача Пика разрешима при всех $w = \{w_j\}_{j=1}^N$ таких, что $|w_j| \leqslant M^{-1}$ при $j = 1, 2, \dots, N$. Число M_ζ называется константой интерполяции последовательности ζ. Ясно, что $M_\zeta < +\infty$ в том и только в том случае, когда последовательность ζ взаимно однозначна. В дальнейшем мы почти всегда будем требовать, чтобы $\zeta_j \neq \zeta_k$ при $j \neq k$.

Аналогично можно определить константу интерполяции M_ζ и для бесконечной последовательности $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=1}^\infty$ точек верхней полуплос-

---

Работа частично поддержана грантом РФФИ No. 08-01-0358-а.

[1]Более подробная формулировка теоремы Пика приведена в §2.

кости $\mathbb{C}_+$. Последовательность ζ называется *интерполяционной*, если $M_\zeta < +\infty$. Из принципа компактности легко следует, что $M_\zeta = \sup\limits_{n\geqslant 1} M_\zeta^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} M_\zeta^{(n)}$, где $M_\zeta^{(n)}$ обозначает константу интерполяции конечной последовательности $\{\zeta_k\}_{k=1}^n$.

Это позволяет нам в большинстве случаев ограничиваться конечными последовательностями ζ.

Одним из решающих моментов в подходе Кусиса является следующее свойство матрицы U_ζ: $U_\zeta^{-1} = D\overline{U}_\zeta D^*$ для некоторой диагональной матрицы D, см. [9]. Мы приводим более простое доказательство этого свойства матрицы U_ζ, см. лемму 2.1.

В §2 мы вводим матрицу A_ζ, см. формулу (2). Матрица A_ζ выражается через матрицу U_ζ следующим образом: $A_\zeta = \Lambda U_\zeta \overline{\Lambda}$, где Λ – обратимая диагональная матрица.

Наш подход во многом основан на следующих свойствах матрицы A_ζ:

1) $A_\zeta^{-1} = \overline{A}_\zeta$, см. теорему 2.7, а также конец §6,

2) теорема Пика остаётся в силе, если в её формулировке матрицу U_ζ заменить матрицей A_ζ,

3) допуская некоторую неаккуратность, можно сказать, что матрица A_ζ инвариантна относительно конформных автоморфизмов верхней полуплоскости, см. теорему 7.1, где дана точная формулировка.

Из теоремы Пика следует, что вопрос о разрешимости задачи Пика может быть переформулирован в терминах матрицы A_ζ. Оказывается, что и другие интерполяционные свойства последовательности ζ могут быть переведены на язык матрицы A_ζ. Например, как показано в §2, $M_\zeta = \|A_\zeta\|$ (теорема 2.8). Интерполяционная теорема Карлесона тоже может быть переформулирована в терминах матрицы A_ζ. Для этого заметим, что диагональные элементы матрицы A_ζ образуют последовательность $\{\delta_k^{-1}\}_{k=1}^N$, где $\delta_k \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{j\neq k}\left|\frac{\zeta_k-\zeta_j}{\zeta_k-\overline{\zeta}_j}\right|$. Обозначим через D_{A_ζ} диагональную матрицу, чьи диагональные элементы совпадают с диагональными элементами матрицы A_ζ. Ясно, что $\|D_{A_\zeta}\| = \delta^{-1}$, где $\delta = \inf\limits_{1\leqslant j\leqslant N}\delta_j$. Таким образом, интерполяционная теорема Карлесона может быть сформулирована следующим образом.

Существует функция $\mathcal{M} : (0,1] \to (0,+\infty)$ такая, что $\|A_\zeta\| \leqslant \mathcal{M}(\|D_{A_\zeta}\|^{-1})$.

После того, как задача переведена на язык матриц, естественно попытаться и решить её на языке матриц. В частности, в §3, следуя Кусису [9], мы получаем оценки нормы матрицы A_ζ, используя тест Виноградова–Сеничкина, см. [3]. Наш подход только некоторыми деталями отличается от подхода Кусиса. Теорема 3.3 по существу утверждает, что в качестве функции $\mathcal{M}$ можно взять функцию, удовлетворяющую условию $\mathcal{M}(\delta) = \mathcal{O}(\delta^{-1}|\log\delta|)$ при $\delta \to 0$. Это же следует и из оценок Кусиса. Таким образом, как хорошо известно, см., например, [1], получается лучшая по порядку оценка при $\delta \to 0$. Мы показываем, что этот "матричный" метод позволяет доказать, что в качестве функции $\mathcal{M}$ можно взять функцию, стремящуюся к 1 при $\delta \to 1$. Правда, наше доказательство даёт только оценку $\mathcal{M}(\delta) - 1 = \mathcal{O}((1-\delta)^{1/4})$ при $\delta \to 1$, см. теорему 3.4. В то же время, как известно, наилучшая по порядку оценка при $\delta \to 1$ имеет вид $\mathcal{M}(\delta) - 1 = \mathcal{O}((1-\delta)^{1/2})$, см. [5].

В §4 мы применяем "матричный" метод, чтобы получить достаточные признаки интерполируемости для неинтерполяционных последовательностей. Впрочем, здесь тоже пока не удаётся достичь в известном смысле окончательных результатов Гарнетта [7].

В §5 мы показываем, что матрица A_ζ может быть полезной и при доказательстве известной теоремы Бёрлинга о существовании последовательности ограниченных голоморфных функций $\{f_j\}_{j=1}^N$ такой, что $f_j(\zeta_k) = \delta_j^k$ и $\sum|f_j| \leqslant M$ всюду в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ (теорема 5.1).

До §6 классы Харди H^p вообще не используются в этой статье. Мы увидим в §6, что матрица A_ζ тесно связана с некоторыми естественными вопросами, относящимися к классам Харди H^2 в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

В §7 мы изучаем поведение матрицы A_ζ при конформных автоморфизмах верхней полуплоскоси $\mathbb{C}_+$. В этом же параграфе обсуждается вопрос о переносе всех результатов статьи на случай круга.

В §8 изучаются простейшие свойства положительной самосопряжённой матрицы A такой, что $A^{-1} = \overline{A}$. Далеко не каждая такая матрица может быть представлена в виде $A = A_\zeta$ для некоторой конечной последовательности ζ. Матрицы вида A_ζ изучаются в §9. В частности, мы доказываем, что положительная самосопряжённая матрица $A = \{a_{jk}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}$ с ненулевыми элементами представима в вида $A = A_\zeta$ в том и только в том случае, когда $\overline{A} = A^{-1}$ и $\operatorname{rank}\{a_{jk}^{-1}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N} = 2$.

Мы используем следующие обозначения: $\mathbb{Z}$ обозначает множество всех целых чисел, $\mathbb{N}$ – множество всех целых положительных чисел, $\mathbb{N}_N \overset{\text{def}}{=} \{n \in \mathbb{N} : n \leqslant N\}$, $\mathbb{C}_+ \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathbb{D} \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $\mathbb{T} \overset{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Символом H^p, где $0 < p \leqslant +\infty$, мы обозначаем класс Харди в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. В частности, H^∞ обозначает множество всех ограниченных голоморфных функций, заданных на $\mathbb{C}_+$.

Пусть A – матрица. Тогда A^T обозначает транспонированную матрицу, а A^* – сопряжённую, $A^* \overset{\text{def}}{=} \overline{A}^T$.

2. Теорема Пика и положительные самосопряжённые матрицы

Рациональная функция θ называется *конечным произведением Бляшке (в верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$*)*, если $|\theta(z)| \leqslant 1$ при всех $z \in \mathbb{C}_+$ и $|\theta(z)| \geqslant 1$ при всех $z \notin \mathbb{C}_+$. Количество корней с учётом кратностей конечного произведения Бляшке θ называется его *степенью* и обозначается $\deg \theta$. Ясно, что $0 \leqslant \deg \theta < +\infty$. Легко видеть, что произведение Бляшке θ степени N допускает представление в виде $\theta(z) = c \prod\limits_{j=1}^{N} \frac{z-\zeta_j}{z-\overline{\zeta}_j}$, где $c \in \mathbb{T}$, $\zeta_j \in \mathbb{C}_+$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$.

С каждой конечной последовательностью $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=1}^N$ точек верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ мы связываем конечное произведение Бляшке $\theta_\zeta(z) \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{j=1}^{N} \frac{z-\zeta_j}{z-\overline{\zeta}_j}$ и матрицу

$$U_\zeta \overset{\text{def}}{=} \left\{ \frac{i}{\zeta_j - \overline{\zeta}_k} \right\}_{1 \leqslant j,k \leqslant N}. \tag{1}$$

Ясно, что U_ζ – самосопряжённая матрица. Известно, что $U_\zeta \geqslant 0$. В этом можно убедиться разными способами. Например, можно представить матрицу U_ζ в виде $U_\zeta = \int_0^{+\infty} X(t)\,dt$, где $X(t) = \{\exp(it\zeta_j)\exp(-it\overline{\zeta}_k)\}_{1 \leqslant j,k \leqslant N}$, и заметить, что $X(t) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Отсюда можно усмотреть и обратимость матрицы U_ζ при условии $\zeta_j \neq \zeta_k$ при $j \neq k$. Впрочем, обратимость матрицы U_ζ для таких ζ следует также из леммы 2.1.

С каждым вектором $w = (w_1, w_2, \dots, w_N) \in \mathbb{C}^N$ мы связываем диагональную матрицу D_w размеров $N \times N$ с диагональными элементами $w_1, w_2, \dots, w_N$.

Теорема Пика. *Пусть* $\zeta = \{\zeta_k\}_{k=1}^N$ *– конечная последовательность попарно различных точек верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$, *а* $w = \{w_k\}_{k=1}^N$ *– последовательность точек замкнутого единичного круга* $\overline{\mathbb{D}}$. *Тогда следующие три утверждения равносильны:*

1) *существует голоморфная функция* $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ *такая, что* $|f| \leqslant 1$ *всюду в* $\mathbb{C}_+$ *и* $f(\zeta_k) = w_k$ *при всех* $k \in \mathbb{N}_N$,

2) *существует конечное произведение Бляшке* ψ *такое, что* $\deg \psi \leqslant N$ *и* $\psi(\zeta_k) = w_k$ *при всех* $k \in \mathbb{N}_N$,

3) $D_w U D_w^* \leqslant U$.

При этом, если эквивалентные условия 1), 2), 3) *выполняются, то следующие три утверждения равносильны:*

4) *существует единственная голоморфная функция* $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ *такая, что* $|f| \leqslant 1$ *всюду в* $\mathbb{C}_+$ *и* $f(\zeta_k) = w_k$ *при всех* $k \in \mathbb{N}_N$,

5) *существует конечное произведение Бляшке* ψ *такое, что* $\deg \psi < N$ *и* $\psi(\zeta_k) = w_k$ *при всех* $k \in \mathbb{N}_N$,

6) $\operatorname{rank}(U - D_w U D_w^*) < N$.

Наконец, $\deg \psi = \operatorname{rank}(U - D_w U D_w^*)$.

Доказательство по крайней мере первой части этой теоремы изложено в статье Кусиса [9]. Доказательство теоремы Пика в полном объёме в случае круга можно найти в монографии Гарнетта [1]. Нужный нам вариант теоремы Пика легко получается отсюда при помощи конформной пересадки.

Следующая лемма была доказана Кусисом [9]. Мы приводим другое доказательство этой леммы.

Лемма 2.1. *Пусть* θ *– конечное произведение Бляшке без кратных корней. Пусть* $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=1}^N$ *– последовательность всех корней произведения Бляшке* θ. *Положим* $w_j \overset{\text{def}}{=} \overline{\theta'(\zeta_j)}^{\,-1}$ *при* $j \in \mathbb{N}_N$. *Тогда* $U_\zeta^{-1} = D_w \overline{U}_\zeta D_w^*$.

Доказательство. Обозначим через K_θ линейную оболочку последовательности простых дробей $\left\{\dfrac{1}{z - \overline{\zeta}_k}\right\}_{k=1}^N$.

Заметим, что функции $f, g \in K_\theta$ совпадают в том и только в том случае, когда $f(\zeta_j) = g(\zeta_j)$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$.

Пусть $\lambda, \mu \in \mathbb{C}^N$. Тогда равенство $U_\zeta \lambda = \mu$ равносильно следующему тождеству:

$$\sum_{k=1}^N \frac{\lambda_k i}{z - \overline{\zeta}_k} = \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k \theta(z)}{\theta'(\zeta_k)(z - \zeta_k)},$$

откуда

$$-\sum_{k=1}^{N}\frac{i\overline{\lambda}_k\theta}{z-\zeta_k}=\sum_{k=1}^{N}\frac{\overline{\mu}_k}{\overline{\theta'(\zeta_k)}(z-\overline{\zeta}_k)}.$$

Подставив $z=\zeta_j$, получим

$$-i\overline{\lambda}_j\theta'(\zeta_j)=\sum_{k=1}^{N}\frac{\overline{\mu}_k}{\overline{\theta'(\zeta_k)}(\zeta_j-\overline{\zeta}_k)},$$

т. е.

$$\lambda_j=-\sum_{k=1}^{N}\frac{i\mu_k}{\overline{\theta'(\zeta_j)}\theta'(\zeta_k)(\overline{\zeta}_j-\zeta_k)}.$$

Последнее равенство означает, что

$$U_\zeta^{-1}=\left\{\frac{-i}{\overline{\theta'(\zeta_j)}\theta'(\zeta_k)(\overline{\zeta}_j-\zeta_k)}\right\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}. \quad \square$$

Обозначим через $\mathcal{S}_N$ множество всех обратимых положительных самосопряжённых матриц размеров $N\times N$.

С каждой матрицей $X\in\mathcal{S}_N$ мы связываем шар Пика $\mathcal{P}_X\overset{\text{def}}{=}\{w\in\mathbb{C}^N : D_wXD_w^*\leqslant X\}$. Нетрудно проверить, что множество $\mathcal{P}_X$ является замкнутым единичным шаром для некоторой нормы на пространстве $\mathbb{C}^N$. Отметим ещё, что $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant N}|z_j|\leqslant 1$ для всех $z\in\mathcal{P}_X$.

Матрицы $X,Y\in\mathcal{S}_N$ будем называть *диагонально эквивалентными*, если $Y=D_wXD_w^*=D_wX\overline{D}_w$ для некоторого вектора $w\in\mathbb{C}^N$. В этом случае мы будем писать $X\overset{\mathrm{d}}{\sim}Y$. Ясно, что введённое отношение является отношением эквивалентности на множестве $\mathcal{S}_N$.

Заметим, что если $X\overset{\mathrm{d}}{\sim}Y$, то $\mathcal{P}_X=\mathcal{P}_Y$. Таким образом, в теореме Пика матрицу U_ζ можно заменить любой матрицей $X\in\mathcal{S}_N$ такой, что $X\overset{\mathrm{d}}{\sim}U_\zeta$.

Лемма 2.2. *Пусть $U\in\mathcal{S}_N$. Тогда следующие два утверждения равносильны:*

1) $U^{-1}\overset{\mathrm{d}}{\sim}\overline{U}$,

2) *существует матрица $A\in\mathcal{S}_N$ такая, что $A\overset{\mathrm{d}}{\sim}U$ и $A^{-1}=\overline{A}$.*

Доказательство. Пусть $U^{-1}=D\overline{U}D^*$ для некоторой диагональной матрицы D. Будем искать требуемую матрицу A в виде $A=\Lambda U\Lambda^*$, где Λ – диагональная матрица. Тогда легко видеть, что равенство $A^{-1} = \overline{A}$ равносильно равенству $D = \overline{\Lambda}^2$. Обратно, если $A = \Lambda U \Lambda^*$ и $A^{-1} = \overline{A}$, то $U^{-1} = D\overline{U}D^*$ при $D = \overline{\Lambda}^2$. $\square$

Нам понадобится ещё одно отношение эквивалентности на множестве $\mathcal{S}_N$. Матрицы $X, Y \in \mathcal{S}_N$ будем называть *равными с точностью до знаков*, если существует диагональная матрица D такая, что $Y = DXD$ и $D^2 = I$, где $I = I_N$ – единичная матрица размеров $N \times N$. В этом случае мы будем писать $X \simeq Y$.

Пусть $X = \{x_{jk}\}, Y = \{y_{jk}\} \in \mathcal{S}_N$. Тогда если матрицы X и Y равны с точностью до знаков, то $x_{jk}^2 = y_{jk}^2$ при всех $j, k \in \mathbb{N}_N$. Обратное, вообще говоря, неверно.

Замечание 2.3. Из доказательства леммы 2.2 ясно, что матрица A определяется матрицей U однозначно с точностью до знаков. Другими словами, если $A_1 \overset{\mathrm{d}}{\sim} U$, $A_2 \overset{\mathrm{d}}{\sim} U$, $A_1\overline{A}_1 = I$ и $A_2\overline{A}_2 = I$, то $A_1 \simeq A_2$.

Пусть $w \in \mathbb{C}^N$. Положим $|w|_\infty \overset{\mathrm{def}}{=} \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} |w_j|$.

Теорема 2.4. *Пусть $A \in \mathcal{S}_N$. Предположим, что $A\overline{A} = I$. Тогда $w \in \mathcal{P}_A$ при всех $w \in \mathbb{C}^N$ таких, что $|w|_\infty \leqslant \|A\|^{-1}$. Кроме того, существует вектор $w \in \mathbb{C}^N$ такой, что $|w_j| = \|A\|^{-1}$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$ и $sw \notin \mathcal{P}_A$ при $s > 1$.*

Доказательство. Заметим, что матрица A унитарно эквивалентна матрице $\overline{A} = A^{-1}$. Следовательно, $\|A\|^{-1} I \leqslant A$. Таким образом, если $|w|_\infty \leqslant \|A\|^{-1}$, то $D_w A \overline{D}_w \leqslant \|D_w A \overline{D}_w\| I \leqslant \|A\|^{-1} I \leqslant A$. Следовательно, $w \in \mathcal{P}_A$.

Докажем теперь второе утверждение. Пусть λ – собственный вектор матрицы A, соответствующий наибольшему собственному числу, т. е. $A\lambda = \|A\|\lambda$ и $\lambda \neq 0$. Тогда $\overline{A\lambda} = \|A\|\overline{\lambda}$. Следовательно, $A\overline{\lambda} = \|A\|^{-1}\overline{\lambda}$. Возьмём вектор $w \in \mathbb{C}^N$ такой, что $|w_j| = \|A\|^{-1}$ и $w_j\lambda_j = \|A\|^{-1}\overline{\lambda}_j$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$.

Имеем:

$$(D_w A D_{\overline{w}}\overline{\lambda}, \overline{\lambda}) = (A D_{\overline{w}}\overline{\lambda}, D_{\overline{w}}\overline{\lambda}) = \|A\|^{-2}(A\lambda, \lambda) = \|A\|^{-1}(\overline{\lambda}, \overline{\lambda}) = (A\overline{\lambda}, \overline{\lambda}).$$

Следовательно, $sw \notin \mathcal{P}_A$ при $s > 1$. $\square$

Установим теперь весовой вариант теоремы 2.4.

Теорема 2.5. *Пусть $A \in \mathcal{S}_N$. Предположим, что $A\overline{A} = I$. Пусть $\rho = \{\rho_n\}_{n=1}^N$ – последовательность положительных чисел. Тогда следующие три утверждения равносильны:*

1) $w \in \mathcal{P}_A$ *для всех* $w \in \mathbb{C}^N$ *таких, что* $|w_j| \leqslant \rho_j$ *при всех* $j \in \mathbb{N}_N$,
2) $A \leqslant D_\rho^{-1}$,
3) $A \geqslant D_\rho$.

Доказательство. Равносильность утверждений 2) и 3) очевидна, поскольку $\overline{A} = A^{-1}$ и $A \geqslant 0$.

Пусть выполнены утверждения 2) и 3). Тогда $D_w A D_{\overline{w}} \leqslant D_w D_\rho^{-1} D_{\overline{w}}$ для всех $w \in \mathbb{C}^N$, откуда $A - D_w A D_{\overline{w}} \geqslant D_\rho - D_w D_\rho^{-1} D_{\overline{w}} \geqslant 0$ для любой последовательности w такой, что $|w_j| \leqslant \rho_j$ при всех j.

Остаётся доказать импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Заметим что условие 2) означает, что каждое собственное число матрицы $D_\rho^{\frac12} A D_\rho^{\frac12}$ не превосходит 1. Пусть $D_\rho^{\frac12} A D_\rho^{\frac12} \lambda = s\lambda$ для некоторого вектора $\lambda \in \mathbb{C}^N$, $\lambda \neq 0$. Для всех $\zeta \in \mathbb{T}^N$ имеет место равенство $D_\zeta D_\rho^{\frac12} A D_\rho^{\frac12} D_{\overline{\zeta}}(D_\zeta\lambda) = s(D_\zeta\lambda)$. Выберем вектор $\zeta \in \mathbb{T}^N$ так, чтобы $\mu \stackrel{\mathrm{def}}{=} D_\zeta\lambda \in \mathbb{R}^N$. Положим $u_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \zeta_j\sqrt{\rho_j}$ при $j \in \mathbb{N}_N$. Тогда $D_u A D_{\overline{u}}\mu = s\mu$, причём $\mu \in \mathbb{R}^N$. Следовательно, $D_{\overline{u}}^{-1} A^{-1} D_u^{-1}\mu = s^{-1}\mu$, откуда $D_u^{-1} A D_{\overline{u}}^{-1}\mu = s^{-1}\mu$, поскольку $A^{-1} = \overline{A}$ и $\mu \in \mathbb{R}^N$. Заметим, что неравенство $A - D_w A D_{\overline{w}} \geqslant 0$ для $w_j = u_j^2$ влечёт $D_u^{-1} A D_{\overline{u}}^{-1} - D_u A D_{\overline{u}} \geqslant 0$. Ясно, что $s^{-1} - s$ – собственное число матрицы $D_u^{-1} A D_{\overline{u}}^{-1} - D_u A D_{\overline{u}}$. Следовательно, $s \leqslant 1$. $\square$

Замечание 2.6. Из доказательства теоремы 2.5 видно, что если $A \leqslant D_\rho^{-1}$ и $\det(D_\rho^{-1} - A) = 0$, то существует вектор $w \in \mathbb{C}^N$ такой, что $|w_j| = \rho_j$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$ и $sw \notin \mathcal{P}_A$ при $s > 1$.

Пусть $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=1}^N$ и θ обозначают то же, что в лемме 2.1. Определим матрицу

$$A_\zeta \stackrel{\mathrm{def}}{=} \left\{ \frac{i}{\sqrt{\theta'(\zeta_j)}\,\overline{\sqrt{\theta'(\zeta_k)}}\,(\zeta_j - \overline{\zeta}_k)} \right\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}. \tag{2}$$

Определение матрицы A_ζ зависит от выбора значений квадратных корней $\sqrt{\theta'(\zeta_j)}$ при $j \in \mathbb{N}_N$. Таким образом, в соответствии с замечанием 2.3 матрица A_ζ определяется однозначно с точностью до знаков. Значения квадратных корней $\sqrt{\theta'(\zeta_j)} = (\theta'(\zeta_j))^{\frac12}$ мы можем выбрать произвольным образом, но после этого мы их не будем менять.

Теорема 2.7. *Теорема Пика останется в силе, если в её формулировке заменить матрицу U_ζ матрицей A_ζ. Кроме того, $A_\zeta \overline{A}_\zeta = I$.*

Доказательство. Первое утверждение следует из того, что $A_\zeta \overset{\mathrm{d}}{\sim} U_\zeta$. Второе утверждение следует из леммы 2.1 и из доказательства леммы 2.2. $\square$

Пусть $M = M_\zeta$ обозначает константу интерполяции последовательности ζ, т. е.

$$M \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{|w_j|\leqslant 1} \inf_f \Big\{ \sup_{\mathbb{C}_+} |f| : f \text{ голоморфна в } \mathbb{C}_+, \quad f(\zeta_j) = w_j \\ \text{при } j = 1, 2, \dots, N \Big\}.$$

Из теорем 2.7 и 2.4 вытекает следующая теорема.

Теорема 2.8. *Пусть $\zeta = \{\zeta_k\}_{k=1}^N$ – конечная последовательность попарно различных точек верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Тогда $M_\zeta = \|A_\zeta\|$.* $\square$

Теорема 2.9. *Пусть $A = A_\zeta$ для некоторой последовательности $\zeta = \{\zeta_k\}_{k=1}^N$ попарно различных точек верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Тогда $\|A\|$ и $\|A\|^{-1}$ – простые собственные значения матрицы A. Кроме того, если $A\lambda = \|A\|\lambda$ (или $A\lambda = \|A\|^{-1}\lambda$) и $\lambda \neq 0$, то $\lambda_j \neq 0$ при всех j.*

Доказательство. Достаточно доказать второе утверждение. Положим $M \overset{\mathrm{def}}{=} M_\zeta = \|A\|$. Заметим, что $A\lambda = M^{-1}\lambda$ в том и только в том случае, когда $A\overline{\lambda} = M\overline{\lambda}$. Пусть $A\lambda = M^{-1}\lambda$ и $\|\lambda\|_{\ell^2} = 1$. Предположим, что $\lambda_j = 0$ при некотором j. Можно считать, что $j = N$. Рассмотрим последовательность $\widetilde{\zeta} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\zeta_j\}_{j=1}^{N-1}$. Положим $\widetilde{A} \overset{\mathrm{def}}{=} A_{\widetilde{\zeta}}$ и $\widetilde{M} \overset{\mathrm{def}}{=} M_{\widetilde{\zeta}}$. Пусть $A = \{a_{jk}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}$ и $\widetilde{A} = \{\widetilde{a}_{jk}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N-1}$. Тогда $a_{jk} = w_j \overline{w}_k \widetilde{a}_{jk}$ при $j, k \in \mathbb{N}_{N-1}$ для некоторой последовательности $\{w_j\}_{j=1}^{N-1}$ такой, что $w_j^2 = \frac{\zeta_j - \overline{\zeta}_N}{\zeta_j - \zeta_N}$ при $j \in \mathbb{N}_{N-1}$. Положим $\widetilde{\lambda} \overset{\mathrm{def}}{=} \{\lambda_j\}_{j=1}^{N-1}$. Ясно, что

$$M^{-1} = (A\lambda, \lambda) = (D_w \widetilde{A} D_w^* \widetilde{\lambda}, \widetilde{\lambda}) = (\widetilde{A} D_w^* \widetilde{\lambda}, D_w^* \widetilde{\lambda}) \geqslant \widetilde{M}^{-1} \|D_w^* \widetilde{\lambda}\|_{\ell^2}^2 > \widetilde{M}^{-1},$$

и мы приходим к противоречию, поскольку $M \geqslant \widetilde{M}$. $\square$

3. Оценки нормы матрицы A_ζ

Положим $\delta_k = \delta_k(\zeta) \stackrel{\text{def}}{=} 2\operatorname{Im}\zeta_k|\theta'(\zeta_k)|$. Заметим, что $0 < \delta_k < 1$ при всех $k \in \mathbb{N}_N$, если $N \geqslant 2$. Кроме того, $\delta_1^{-1}, \delta_2^{-1}, \cdots, \delta_N^{-1}$ – диагональные элементы матрицы $A = A_\zeta$. Положим $\delta = \delta(\zeta) = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant N} \delta_k(\zeta)$. Теорема 2.8 сводит интерполяционную теорему Карлесона для ограниченных голоморфных функций к следующей оценке: $\|A\| \leqslant \mathcal{M}(\delta)$, где число $\mathcal{M}(\delta)$ зависит только от δ и, в частности, не зависит от N.

Рассмотрим матрицу

$$[A] = [A]_\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\frac{2i\sqrt{\operatorname{Im}\zeta_j \operatorname{Im}\zeta_k}}{\zeta_j - \overline{\zeta}_k}\right\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}.$$

Заметим, что $A = D[A]D^*$ для некоторой диагональной матрицы D такой, что $\|DD^*\| = \delta^{-1}$. Следовательно, $\|A\| \leqslant \delta^{-1}\|[A]\|$. Теперь мы оценим норму матрицы $[A] = [A]_\zeta$, использую тест Виноградова–Седичкина. Наше изложение оценки нормы матрицы $[A]$ будет только некоторыми деталями отличаться от изложения соответствующих оценок в [9]. Главное отличие заключается в том, что вместо треугольной матрицы B (см. [9]) мы рассматриваем матрицу T, определённую ниже.

Положим

$$\sigma_k \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\neq k} \frac{4\operatorname{Im}\zeta_j \operatorname{Im}\zeta_k}{|\zeta_j - \overline{\zeta}_k|^2}, \quad \sigma \stackrel{\text{def}}{=} \max_{1\leqslant k\leqslant N} \sigma_k. \tag{3}$$

Из леммы Ньюмена (см., например, [2], глава 9, §B) следует, что $\sigma_k \leqslant 2\log\delta_k^{-1} \leqslant 2\log\delta^{-1}$. Определим матрицу

$$T = T_\zeta = \{t_{jk}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\frac{4(\operatorname{Im}\zeta_j)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{Im}\zeta_k)^{\frac{3}{2}}}{|\zeta_j - \overline{\zeta}_k|^2}\right\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}.$$

Заметим, что $[A] + \overline{[A]} = T + T^*$.

Пусть $X = \{x_{jk}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}$ и $Y = \{y_{jk}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}$ – две матрицы. Мы будем писать $X \ll Y$, если $y_{jk} - x_{jk} \geqslant 0$ при всех $j,k \in \mathbb{N}_N$.

Лемма 3.1. *Имеет место следующее соотношение:* $I + T^*T \ll (1 + 2\sigma)(T + T^*)$.

Доказательство. Имеем: $T^*T = \left\{\sum_s t_{sj}t_{sk}\right\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}$ Пусть $j \neq k$. Так же, как и в [9], применяя элементарное неравенство

$$\frac{1}{|\zeta_s-\overline{\zeta}_j|^2|\zeta_s-\overline{\zeta}_k|^2} \leqslant \frac{2}{|\zeta_j-\overline{\zeta}_k|^2}\left(\frac{1}{|\zeta_s-\overline{\zeta}_j|^2}+\frac{1}{|\zeta_s-\overline{\zeta}_k|^2}\right),$$

которое использовал Виноградов в своём доказательстве теоремы Карлесона о вложении, см. [4], получаем

$$\begin{aligned}\sum_s t_{sj}t_{sk} &= t_{jk}+t_{kj}+4(\operatorname{Im}\zeta_j\operatorname{Im}\zeta_k)^{\frac{3}{2}}\sum_{s\neq j,k}\frac{4\operatorname{Im}\zeta_s}{|\zeta_s-\overline{\zeta}_j|^2|\zeta_s-\overline{\zeta}_k|^2}\\ &\leqslant t_{jk}+t_{kj}+\frac{8(\operatorname{Im}\zeta_j\operatorname{Im}\zeta_k)^{\frac{3}{2}}}{|\zeta_j-\overline{\zeta}_k|^2}\left(\sum_{s\neq j}\frac{4\operatorname{Im}\zeta_s}{|\zeta_s-\overline{\zeta}_j|^2}+\sum_{s\neq k}\frac{4\operatorname{Im}\zeta_s}{|\zeta_s-\overline{\zeta}_k|^2}\right)\\ &\leqslant t_{jk}+t_{kj}+\frac{8\sigma_j(\operatorname{Im}\zeta_j)^{\frac{1}{2}}(\operatorname{Im}\zeta_k)^{\frac{3}{2}}+8\sigma_k(\operatorname{Im}\zeta_j)^{\frac{3}{2}}(\operatorname{Im}\zeta_k)^{\frac{1}{2}}}{|\zeta_j-\overline{\zeta}_k|^2}\\ &= (1+2\sigma)(t_{jk}+t_{kj}).\end{aligned}\tag{4}$$

Пусть $j = k$. Тогда

$$\sum_s t_{sj}t_{sk} = 1+4(\operatorname{Im}\zeta_j)^3\sum_{s\neq j}\frac{4\operatorname{Im}\zeta_s}{|\zeta_s-\overline{\zeta}_j|^4} \leqslant 1+4\operatorname{Im}\zeta_j\sum_{s\neq j}\frac{4\operatorname{Im}\zeta_s}{|\zeta_s-\overline{\zeta}_j|^2} \leqslant 1+4\sigma.\tag{5}$$

Лемма доказана. □

Следствие 3.2. *Имеет место следующее неравенство:* $\|T\| \leqslant 1+2\sigma+2\sqrt{\sigma+\sigma^2} \leqslant 2+4\sigma$.

Доказательство. Достаточно заметить, что

$$1+\|T\|^2 = \|I+T^*T\| \leqslant (1+2\sigma)\|T+T^*\| \leqslant 2(1+2\sigma)\|T\|,$$

откуда следует требуемое неравенство. □.

Теорема 3.3. *Имеет место неравенство* $\|A\| \leqslant 4\delta^{-1}(1+4\log(\delta^{-1}))$.

Доказательство. Заметим, что $[A] \geqslant 0$, поскольку $[A] \overset{\mathrm{d}}{\sim} U$. Следовательно, $\overline{[A]} \geqslant 0$, откуда $\|\,[A]\| \leqslant \|\,[A]+\overline{[A]}\| = \|T+T^*\| \leqslant 2\|T\| \leqslant$

$4+16\log(\delta^{-1})$. Таким образом, $\|A\| \leqslant \delta^{-1}\|\,[A]\|\leqslant 4\delta^{-1}(1+4\log(\delta^{-1}))$. $\square$

Отметим, что теорема 3.3 даёт правильную по порядку оценку нормы матрицы A (или, что то же самое, константы интерполяции M) при $\delta\to 0$, см., например, [1, глава 7, §1]. С другой стороны, при $\delta\to 1$ эта оценка довольно груба. Известно, см. [5], что $M-1=\mathcal{O}(\sqrt{1-\delta})$ при $\delta\to 1$ и этот результат нельзя улучшить.

Автору неизвестно, можно ли методами настоящей статьи получить эту оценку при $\delta\to 1$.

Мы сейчас покажем, что наши методы позволяют получить следующую более слабую оценку: $\|A\|=1+\mathcal{O}(\sqrt[4]{1-\delta})$ при $\delta\to 1$.

Теорема 3.4. *Имеет место неравенство*

$$\begin{aligned}\|A\|+\|A\|^{-1}\leqslant 2\delta^{-1}+8\delta^{-1}\log(\delta^{-1})+4\delta^{-1}\sqrt{2\log(\delta^{-1})+4(\log(\delta^{-1}))^2}\\ =2+\mathcal{O}(\sqrt{1-\delta})\end{aligned}$$

при $\delta\to 1$, *откуда* $\|A\|=1+\mathcal{O}(\sqrt[4]{1-\delta})$ *при* $\delta\to 1$.

Доказательство. Рассмотрим матрицу

$$A_0\stackrel{\text{def}}{=}\left\{\frac{i}{\sqrt{|\theta'(\zeta_j)\theta'(\zeta_k)|}(\zeta_j-\overline{\zeta}_k)}\right\}.$$

Ясно, что матрицы A_0 и $\overline{A}_0$ унитарно эквивалентны матрице A, которая обладает следующим свойством: $M^{-1}I\leqslant A\leqslant MI$. Следовательно, $\|A_0+\overline{A}_0\|\geqslant M+M^{-1}$. Заметим, что

$$A_0+\overline{A}_0=\left\{\frac{2\operatorname{Im}\zeta_j+2\operatorname{Im}\zeta_k}{\sqrt{|\theta'(\zeta_j)\theta'(\zeta_k)|}|\zeta_j-\overline{\zeta}_k|^2}\right\}$$

и $A_0+\overline{A}_0=D(T+T^*)D^*$ для некоторой диагональной матрицы D такой, что $\|DD^*\|=\delta^{-1}$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\|A\|+\|A\|^{-1}\leqslant\delta^{-1}\|T+T^*\|\leqslant 2\delta^{-1}(1+2\sigma+2\sqrt{\sigma+\sigma^2})\\ \leqslant 2\delta^{-1}+8\delta^{-1}\log(\delta^{-1})+4\delta^{-1}\sqrt{2\log(\delta^{-1})+4(\log(\delta^{-1})^2}.\quad\square\end{aligned}$$

Следующие замечание, которое относится к случаю, когда T – бесконечная матрица, соответствующая бесконечной последовательности $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ точек верхней полуплоскости, показывает, что условие $TT^*\ll C(T+T^*)$ сильно отличается от условия $T^*T\ll C(T+T^*)$.

Замечание 3.5. Предположим, что $TT^* \ll C(T+T^*)$ для некоторой матрицы T. Тогда последовательность $\zeta = \{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ может иметь не более одной конечной предельной точки. В частности, соотношение $TT^* \ll C(T+T^*)$ выполняется далеко не для любой интерполяционной последовательности $\zeta = \{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Условие $TT^* \ll C(T+T^*)$ означает, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2\operatorname{Im}\zeta_s)^3}{|\zeta_s-\overline{\zeta}_j|^2|\zeta_s-\overline{\zeta}_k|^2} \leqslant C\frac{2\operatorname{Im}\zeta_j+2\operatorname{Im}\zeta_k}{|\zeta_j-\overline{\zeta}_k|^2}. \tag{6}$$

Предположим что последовательность $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеет две различные предельные точки $t_1, t_2 \in \mathbb{C}$. Из сходимости ряда в левой части неравенства (6) ясно, что $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Пусть $\lim\limits_{l\to\infty}\zeta_{j_l} = t_1$ и $\lim\limits_{l\to\infty}\zeta_{k_l} = t_2$. Применив неравенство (6) при $j = j_l$ и $k = k_l$ и устремив l к ∞, получим противоречие. $\square$

4. Достаточное условие интерполируемости для неинтерполяционных последовательностей

В этом параграфе мы будем рассматривать также бесконечные последовательности $\zeta = \{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ попарно различных точек верхней полуплоскости. Мы всегда будем предполагать, что выполнено условие Бляшке, т. е. $\delta_k \stackrel{\text{def}}{=} \prod\limits_{j\neq k}\left|\frac{\zeta_k-\zeta_j}{\zeta_k-\overline{\zeta}_j}\right| > 0$. С каждой последовательностью $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$ свяжем бесконечную диагональную матрицу D_w с диагональными элементами $w_1, w_2, \dots$.

Пусть $A = A_\zeta$, $T = T_\zeta$, $[A] = [A]_\zeta$, $D_A = D_{A_\zeta}$ обозначают бесконечные матрицы, соответствующие последовательности $\zeta = \{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Теорема 4.1. *Пусть $\{\rho_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность положительных чисел. Тогда следующие утверждения равносильны:*

1) *для любой последовательности комплексных чисел $\{w_k\}_{k=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию $w_k = \mathcal{O}(\delta_k\rho_k)$, найдётся ограниченная голоморфная в $\mathbb{C}_+$ функция f такая, что $f(\zeta_k) = w_k$ при всех k;*

2) *матрица $D_\rho^{1/2} T D_\rho^{1/2}$ ограничена, т. е. задаёт ограниченный оператор на ℓ^2.*

Доказательство. Из теоремы 2.5 следует, что условие 1) равносильно ограниченности матрицы $D_\rho^{1/2} D_\delta^{1/2} A D_\delta^{1/2} D_\rho^{1/2}$, которая унитарно эквивалентна матрице $D_\rho^{1/2}[A]D_\rho^{1/2}$. Ограниченность матрицы

$D_\rho^{1/2}[A]D_\rho^{1/2}$ равносильна ограниченности матрицы $D_\rho^{1/2}(T+T^*)D_\rho^{1/2}$, поскольку $[A]+\overline{[A]}=T+T^*$ и $[A]\geqslant 0$. Равносильность ограниченности матриц $D_\rho^{1/2}(T+T^*)D_\rho^{1/2}$ и $D_\rho^{1/2}TD_\rho^{1/2}$ очевидна. □

Замечание 4.2. Равносильные утверждения 1) и 2) теоремы 4.1 эквивалентны также следующему условию: $\sup\limits_k \sum\limits_j \frac{4\rho_j \operatorname{Im}\zeta_j \operatorname{Im}\zeta_k}{|\zeta_j-\overline{\zeta}_k|^2}<+\infty$. Это легко доказать, использую меры Карлесона. Было бы интересно доказать это непосредственно, не использую такие понятия как класс Харди H^p и мера Карлесона.

Пусть Λ обозначает диагональную матрицу с диагональными элементами $\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_N$, где числа σ_k обозначают то же, что в предыдущем параграфе, см. равенства (3).

Лемма 4.3. *Имеет место следующее соотношение:* $I+T^*T\ll(I+2\Lambda)T+T^*(I+2\Lambda)$.

Доказательство. Фактически эта лемма уже была доказана, см. оценки (4) и (5) в доказательстве леммы 3.1. □

Следствие 4.4. *Справедливо следующее неравенство:*

$$\|T(I+2\Lambda)^{-1}\|\leqslant 2.$$

Доказательство. Имеем:

$$(I+2\Lambda)^{-1}T^*T(I+2\Lambda)^{-1}\ll T(I+2\Lambda)^{-1}+(I+2\Lambda)^{-1}T^*,$$

откуда $\|T(I+2\Lambda)^{-1}\|^2\leqslant 2\|T(I+2\Lambda)^{-1}\|$. □

Лемма 4.5. *Справедливо следующее неравенство:* $T+T^*\leqslant I+4(I+2\Lambda)^2$.

Доказательство. В силу следствия 4.4 имеем $(I+2\Lambda)^{-1}T^*T(I+2\Lambda)^{-1}\leqslant 4I$, откуда $T^*T\leqslant 4(I+2\Lambda)^2$. Заметим, что очевидное неравенство $(T-I)^*(T-I)\geqslant 0$ влечёт $T+T^*\leqslant I+T^*T$. Теперь доказываемое неравенство очевидно. □

Пусть D_A обозначает диагональную матрицу с диагональными элементами $\delta_1^{-1},\delta_2^{-1},\dots,\delta_N^{-1}$. Заметим, что диагональные элементы матрицы D_A совпадают с диагональными элементами матрицы A.

Теорема 4.6. *Справедливо следующее неравенство:* $A \leqslant D_A(I+4(I+4\log D_A)^2)$.

Доказательство. Использую лемму 4.5, получаем

$$[A] \leqslant [A] + \overline{[A]} = T + T^* \leqslant I + 4(I + 2\Lambda)^2.$$

Пусть Δ обозначает диагональную матрицу с диагональными элементами $(2\operatorname{Im}\zeta_1\theta'(\zeta_1))^{-\frac{1}{2}}, (2\operatorname{Im}\zeta_2\theta'(\zeta_2))^{-\frac{1}{2}}, \dots, (2\operatorname{Im}\zeta_N\theta'(\zeta_N))^{-\frac{1}{2}}$. Ясно, что $\Delta\Delta^* = D_A$. Следовательно,

$$A = \Delta[A]\Delta^* \leqslant \Delta(I + 4(I+2\Lambda)^2)\Delta^* = D_A + 4D_A(I+2\Lambda)^2.$$

Остаётся заметить, что $\Lambda \leqslant 2\log D_A$. $\square$

Теорема 4.7. *Пусть* $\{\zeta_k\}_{k=1}^\infty$ *– последовательность попарно различных точек верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$, *удовлетворяющая условию Бляшке. Положим* $\delta_k \overset{\text{def}}{=} \prod\limits_{j\neq k}\left|\frac{\zeta_k-\zeta_j}{\zeta_k-\overline{\zeta}_j}\right|$. *Тогда для любой последовательности комплексных чисел* $\{w_k\}_{k=1}^\infty$, *удовлетворяющей условию* $|w_k| \leqslant \delta_k(1+4(1+4\log(\delta_k^{-1}))^2)^{-1}$, *найдётся голоморфная в* $\mathbb{C}_+$ *функция* f *такая, что* $|f| \leqslant 1$ *и* $f(\zeta_k) = w_k$ *при всех* k.

Доказательство. Аналогичное утверждение для конечных последовательностей следует из теорем 2.5 и 4.6. Остаётся воспользоваться принципом компактности. $\square$

Следствие 4.8. *Если* $w_k = \mathcal{O}(\delta_k(\log(2/\delta_k))^{-2})$, *то существует ограниченная голоморфная функция* $f : \mathbb{C}_+ \to \mathbb{C}$ *такая, что* $f(\zeta_k) = w_k$ *при всех* k. $\square$

На самом деле имеет место гораздо более сильное утверждение, см. [7], а также упражнения и замечания к главе 7 монографии [1].

5. Матрица A_ζ и экстремальные функции

Напомним известную теорему Бёрлинга.

Теорема 5.1. *Пусть* $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=1}^N$ *– конечная последовательность попарно различных точек верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$. *Тогда найдется последовательность* $\{f_n\}_{n=1}^N$ *голоморфных в* $\mathbb{C}_+$ *функций такая, что*

$f_n(\zeta_n) = 1$, $f_n(\zeta_k) = 0$ при $n \neq k$ и $\sum\limits_{n=1}^{N} |f_n| \leqslant M$ всюду в $\mathbb{C}_+$, где $M = M_\zeta$.

Доказательство этой теоремы можно найти в [1], теорема 2.1 главы 7. Другое доказательство было получено Эрлом [6]. Оба доказательство так или иначе основаны на некоторых свойствах экстремальных функций. Оказывается, что возникающая при этом экстремальная функция легко выражается через собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному числу матрицы A_ζ. Это обстоятельство позволяет получить ещё одно доказательство теоремы Бёрлинга, которое мы приведём в этом параграфе. Наше доказательству очень близко к доказательству Эрла. Главное отличие заключается в том, что требуемые свойства экстремальной функции выводятся из свойств матрицы A_ζ.

Докажем сначала лемму, которая, конечно, легко следует из теоремы Пика, сформулированной в §2. Однако мы предпочитаем дать прямое доказательство этой леммы.

Лемма 5.2. *Пусть f – конечное произведение Бляшке в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, $\deg f < N$. Тогда $|f(\zeta_j)| \geqslant M^{-1}$ при некотором $j \in \mathbb{N}_N$.*

Доказательство. Предположим, что $|f(\zeta_j)| < M^{-1}$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$. Тогда существует функция $g \in H^\infty$ такая, что $\sup_{\mathbb{C}_+} |g| < 1$ и $g(\zeta_j) = f(\zeta_j)$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$. Из теоремы Руше следует, что функции $f - g$ и f имеют в $\mathbb{C}_+$ одинаковое число нулей с учётом кратностей. Функция $f - g$ имеет по крайней мере N корней в $\mathbb{C}_+$, а количество корней с учётом кратностей произведения Бляшке f совпадает с его степенью, что противоречит условию $\deg f < N$. □

Следствие 5.3. *Пусть $f(z) = \prod\limits_{j=1}^{N-1} \frac{z-\xi_j}{z-\bar{\xi}_j}$, где $\xi_j \in \mathbb{C}$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$. Предположим, что $|f(\zeta_j)| = M^{-1}$ при всех j, $1 \leqslant j \leqslant N$. Тогда $\operatorname{Im} \xi_j \geqslant 0$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$, т. е. f – конечное произведение Бляшке, $\deg f \leqslant N - 1$.*

Доказательство. Ясно, что функцию f можно представить в виде $f = f_1 f_2^{-1}$, где f_1 и f_2 – конечные произведения Бляшке, $\deg f_1 + \deg f_2 < N$. Нам нужно доказать, что f_2 – константа. Предположим противное. Тогда $|f_1(\zeta_j)| = M^{-1} |f_2(\zeta_j)| < M^{-1}$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$, что противоречит лемме 5.2. □

Доказательство теоремы 5.1. Положим $A \stackrel{\mathrm{def}}{=} A_\zeta$. Пусть $A\lambda = M\lambda$, причём $\lambda \neq 0$. Рассмотрим функцию

$$F \stackrel{\mathrm{def}}{=} i\sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k}{\overline{(\theta'(\zeta_k))}^{\frac{1}{2}}(z-\overline{\zeta}_k)}.$$

Ясно, что $F(\zeta_j) = M\lambda_j(\theta'(\zeta_j))^{\frac{1}{2}}$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$. Кроме того, функцию F можно представить в виде

$$F(z) = \frac{c_0 \prod\limits_{n=1}^{N_0}(z-\overline{\xi}_n)}{\prod\limits_{n=1}^{N}(z-\overline{\zeta}_n)},$$

где $c_0 \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$, $\xi_n \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant N_0 < N$. Положим $G(z) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \theta(z)\overline{F(\overline{z})}$. Ясно, что

$$G(z) = -i\sum_{k=1}^{N} \frac{\overline{\lambda}_k\theta}{(\theta'(\zeta_k))^{\frac{1}{2}}(z-\zeta_k)} = \frac{\overline{c}_0 \prod\limits_{n=1}^{N_0}(z-\xi_n)}{\prod\limits_{n=1}^{N}(z-\overline{\zeta}_n)}.$$

Из первого равенства последней формулы видно, что

$$G(\zeta_j) = -i\overline{\lambda}_j(\theta'(\zeta_j))^{\frac{1}{2}}$$

при всех $j \in \mathbb{N}_N$. Положим $\Phi \stackrel{\mathrm{def}}{=} GF^{-1}$. Заметим, что $\lambda_j \neq 0$ в силу теоремы 2.9. Таким образом, $\Phi(\zeta_j) = -i\frac{\overline{\lambda}_j}{M\lambda_j}$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$. Следовательно, в силу следствия 5.3 функция Φ является конечным произведением Бляшке и $\operatorname{Im}\xi_n \geqslant 0$ при всех $n \in \mathbb{N}_{N_0}$. В частности, функция F не имеет корней в $\mathbb{C}_+$. Докажем теперь следующее тождество:

$$\Phi(z)F^2(z) = \theta(z)\sum_{n=1}^{N} \frac{\Phi(\zeta_n)F^2(\zeta_n)(\zeta_n-\overline{\zeta}_n)}{\theta'(\zeta_n)(z-\zeta_n)(z-\overline{\zeta}_n)}. \tag{7}$$

Ясно, что равенство (7) имеет место при $z = \zeta_n$, $n \in \mathbb{N}_N$. Умножив обе части доказываемого равенства на $\prod\limits_{n=1}^{N}(z-\overline{\zeta}_n)^2$, получим

$$|c_0|^2\prod_{n=1}^{N_0}(z-\xi_n)(z-\overline{\xi}_n) = \sum_{n=1}^{N}\Big(\frac{\Phi(\zeta_n)F^2(\zeta_n)(\zeta_n-\overline{\zeta}_n)}{\theta'(\zeta_n)}\prod_{k\neq n}^{N}(z-\zeta_k)(z-\overline{\zeta}_k)\Big). \tag{8}$$

Заметим, что

$$\frac{\Phi(\zeta_n)F^2(\zeta_n)(\zeta_n-\overline{\zeta}_n)}{\theta'(\zeta_n)}=\frac{F(\zeta_n)G(\zeta_n)(\zeta_n-\overline{\zeta}_n)}{\theta'(\zeta_n)}=-iM|\lambda_n|^2(\zeta_n-\overline{\zeta}_n)>0 \tag{9}$$

при всех $n\in\mathbb{N}_N$. Следовательно, равенство (8) имеет место не только при $z=\zeta_n$, но и при $z=\overline{\zeta}_n$. Теперь равенство (8), а вместе с ним и равенство (7) очевидно, поскольку ненулевой многочлен степени $2N-2$ не может иметь $2N$ корней. Из формул (8) и (9) следует, что $N_0=N-1$ и $\xi_n\notin\mathbb{R}$ при всех n. Следовательно, $\operatorname{Im}\xi_n>0$ при всех $n\in\mathbb{N}_{N-1}$. Равенство (7) влечёт:

$$F(z)\overline{F(\overline{z})}=\sum_{n=1}^{N}\frac{\Phi(\zeta_n)F^2(\zeta_n)(\zeta_n-\overline{\zeta}_n)}{\theta'(\zeta_n)(z-\zeta_n)(z-\overline{\zeta}_n)},$$

откуда

$$|F(x)|^2=\sum_{n=1}^{N}\frac{\Phi(\zeta_n)F^2(\zeta_n)(\zeta_n-\overline{\zeta}_n)}{\theta'(\zeta_n)|x-\overline{\zeta}_n|^2} \tag{10}$$

при всех $x\in\mathbb{R}$.

Положим

$$f_n(z)\stackrel{\text{def}}{=}\frac{\theta(z)F^2(\zeta_n)(\zeta_n-\overline{\zeta}_n)}{\theta'(\zeta_n)(z-\zeta_n)(z-\overline{\zeta}_n)F^2(z)}.$$

Заметим, что функция f_n ограничена в $\mathbb{C}_+$, поскольку $N_0=N-1$ и $\operatorname{Im}\xi_n>0$ при всех n. Кроме того, $f_n(\zeta_n)=1$ и $f_n(\zeta_k)=0$ при $k\neq n$. Из формул (10) и (9) следует, что $\sum\limits_{n=1}^{N}|f_n(x)|=M$ при всех $x\in\mathbb{R}$. Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{N}|f_n(z)|\leqslant M$ при всех $z\in\mathbb{C}_+$ в силу принципа максимума. □

6. Матрица A_ζ и классы Харди H^p

В этом параграфе H^p обозначает класс Харди в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, т. е. множество всех голоморфных в верхней полуплоскости функций f таких, что

$$\|f\|_{H^p}^p\stackrel{\text{def}}{=}\sup_{t>0}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}|f(x+it)|^p\,dx<+\infty.$$

По поводу классов Харди H^p в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ см., например, [1] и [2]. Неотрицательная борелевская мера μ на $\mathbb{C}_+$ называется мерой Карлесона, если

$$\mathcal{C}(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} \sup\Big\{ \int\limits_{\mathbb{C}_+} |f|^p \, d\mu : f \in H^p, \|f\|_{H^p} \leqslant 1 \Big\} < +\infty.$$

Хорошо известно, что величина $\mathcal{C}(\mu)$ не зависит от выбора показателя p, $0 < p < +\infty$.

Пусть $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=1}^N$ – конечная последовательность попарно различных точек верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Положим $\mu = \mu_\zeta \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{j=1}^N |\theta'(\zeta_j)|^{-1}\delta_{\zeta_j}$, где δ_a обозначает δ-меру в точке a. Напомним, что $\theta(z) = \theta_\zeta(z) \stackrel{\text{def}}{=} \prod\limits_{j=1}^N \frac{z-\zeta_j}{z-\overline{\zeta}_j}$.

Следующая теорема, конечно, хорошо известна, см., например, [1, глава 7, формула (1.14)].

Теорема 6.1. *Имеет место следующее равенство:* $\mathcal{C}(\mu_\zeta) = M_\zeta$.

Доказательство. Рассмотрим оператор $R = R_\zeta : H^2 \to \ell^2_N$, определённый формулой $Rf = \Big\{\frac{f(\zeta_j)}{(\theta'(\zeta_j))^{\frac12}}\Big\}_{j=1}^N$. Ясно, что $\mathcal{C}(\mu) = \|R\|^2$ Легко видеть, что сопряжённый оператор $R^* : \ell^2_N \to H^2$ действует по формуле $R^*\lambda = i\sum\limits_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{\overline{(\theta'(\zeta_k))}^{\frac12}(z-\overline{\zeta}_k)}$. Заметим, что $RR^*\lambda = \Big\{i\sum\limits_{k=1}^N \frac{\lambda_k}{(\theta'(\zeta_j))^{\frac12}\overline{(\theta'(\zeta_k))}^{\frac12}(\zeta_j-\overline{\zeta}_k)}\Big\}_{j=1}^N$, т. е. $RR^*\lambda = A_\zeta\lambda$, откуда $\|R\|^2 = \|A_\zeta\| = M_\zeta$. $\square$

При помощи оператора R можно получить ещё одно доказательство равенства $\overline{A}_\zeta = A_\zeta^{-1}$ Пусть $K = K_\theta$ обозначает линейную оболочку семейства функций $\{(z-\overline{\zeta}_j)^{-1}\}_{j=1}^N$. Заметим что $\theta H^2 = \ker R$ и $H^2 = \theta H^2 \oplus K$. Легко видеть что $(R|_K)^*\lambda = R^*\lambda$. Следовательно, $(R|_K)(R|_K)^* = RR^*$. Рассмотрим оператор $(R|_K)^{-1} : \ell^2_N \to K$. Для краткости мы будем писать R^{-1} вместо $(R|_K)^{-1}$. Ясно, что $R^{-1}\lambda = \sum\limits_{k=1}^N \frac{\lambda_k\theta}{(\theta'(a_k))^{\frac12}(z-\zeta_k)}$. Пусть $f \in K$. Тогда $\theta(z)\overline{f(\overline{z})} \in K$. Для краткости мы будем писать $\theta\overline{f}$ вместо $\theta(z)\overline{f(\overline{z})}$. Имеем:

$$(\lambda, (R^{-1})^*(\theta\overline{f})) = (R^{-1}\lambda, \theta\overline{f}) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k}{(\theta'(\zeta_k))^{\frac{1}{2}}}\Big(\frac{\theta}{z-\zeta_k}, \theta\overline{f}\Big)$$
$$= i\sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k}{(\theta'(\zeta_k))^{\frac{1}{2}}} f(\zeta_k),$$

откуда $(R^{-1})^*(\theta\overline{f})) = \Big\{-i\frac{\overline{f(\zeta_j)}}{\overline{(B'(\zeta_j))^{\frac{1}{2}}}}\Big\}_{j=1}^{N}$. Заметим, что $R^{-1}\lambda = \theta\overline{f}$, где $f = \sum\limits_{k=1}^{N} \frac{\overline{\lambda}_k}{\overline{(\theta'(\zeta_k))^{\frac{1}{2}}}(z-\overline{\zeta}_k)}$. Теперь ясно, что

$$(R^{-1})^*R^{-1}\lambda = \Big\{-i\sum_{k=1}^{N} \frac{\lambda_k}{\overline{(\theta'(\zeta_j))^{\frac{1}{2}}}(\theta'(\zeta_k))^{\frac{1}{2}}(\overline{\zeta}_j - \zeta_k)}\Big\}_{j=1}^{N},$$

т. е. $(R^{-1})^*R^{-1} = \overline{A}_\zeta$. Сопоставляя последнее равенство с равенством $RR^* = A_\zeta$, полученным в доказательстве теоремы 6.1, мы снова получаем равенство $\overline{A}_\zeta = A_\zeta^{-1}$, см. теорему 2.7.

7. Матрицы вида A_ζ и конформные изоморфизмы

Пусть φ – конформный автоморфизм верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Каждый такой автоморфизм имеет вид $\varphi(z) = \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, причём $\alpha\delta - \beta\gamma > 0$. Пусть $\zeta = \{\zeta_n\}_{n=1}^N$ – последовательность попарно различных точек верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Положим $\varphi(\zeta) \overset{\text{def}}{=} \{\varphi(\zeta_n)\}_{n=1}^N$. Легко видеть, что $\theta_{\varphi(\zeta)} = c\theta_\zeta \circ \varphi^{-1}$ для некоторой константы $c \in \mathbb{T}$. Следующая теорема утверждает, что матрица A_ζ инвариантна с точностью до знаков относительно конформных автоморфизмов верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$.

Теорема 7.1. *Пусть φ – автоморфизм верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Тогда $A_{\varphi(\zeta)} \simeq A_\zeta$.*

Доказательство этой теоремы может быть получено прямыми вычислениями. □

Следствие 7.2. *Пусть φ – автоморфизм верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Тогда $A_{-\overline{\varphi}(\zeta)} \simeq \overline{A}_\zeta$.*

Доказательство. Теорема 7.1 позволяет ограничиться случаем, когда φ – тождественное отображение. В этом случае доказываемое утверждение очевидно. □

Теорема 7.3. *Пусть* $\xi = \{\xi_n\}_{n=1}^N$ *– ещё одна последовательность попарно различных точек верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$*. Предположим, что* $A_\xi \simeq A_\zeta$*. Тогда* $\xi = \varphi(\zeta)$ *для некоторого автоморфизма* φ *верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$*.*

Нам понадобится следующее элементарное и хорошо известное утверждение о движениях в плоскости Лобачевского, которой мы приводим здесь без доказательства.

Лемма 7.4. *Пусть* Ω *– произвольное подмножество верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$*. Тогда любое изометрическое в гиперболической метрике отображение* $u : \Omega \to \mathbb{C}_+$ *продолжается до изометрии верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$ *на себя. Другими словами, существует автоморфизм* φ *верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$ *такой, что* $u = \varphi|_\Omega$ *или* $u = -\overline{\varphi}|_\Omega$*.*

С каждой матрицей $A = \{a_{jk}\} \in \mathcal{S}_N$ мы связываем матрицу $\Gamma_A \stackrel{\text{def}}{=} \left\{\frac{|a_{jk}|^2}{a_{jj}\,a_{kk}}\right\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}$. Можно доказать, что $\Gamma_A \in \mathcal{S}_N$, см., например, [4, §6.5.2 (h)], но нам это не понадобится. Заметим, что если $A \overset{\mathrm{d}}{\sim} B$, то $\Gamma_A = \Gamma_B$.

Доказательство теоремы 7.3. Ясно, что $\Gamma_{A_\zeta} = \Gamma_{A_\xi}$. Это равенство означает, что $\dfrac{4\operatorname{Im}\zeta_j \operatorname{Im}\zeta_k}{|\zeta_j - \overline{\zeta}_k|^2} = \dfrac{4\operatorname{Im}\xi_j \operatorname{Im}\xi_k}{|\xi_j - \overline{\xi}_k|^2}$, откуда $\left|\dfrac{\zeta_j - \zeta_k}{\zeta_j - \overline{\zeta}_k}\right| = \left|\dfrac{\xi_j - \xi_k}{\xi_j - \overline{\xi}_k}\right|$ при всех $j, k \in \mathbb{N}_N$. В силу леммы 7.4 найдётся конформный автоморфизм φ верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ такой, что $\xi_j = \varphi(\zeta_j)$ при всех j или $\xi_j = -\overline{\varphi(\zeta_j)}$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$. В первом случае доказывать нечего. Предположим, что $\xi_j = -\overline{\varphi(\zeta_j)}$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$. Тогда $A_\xi \simeq \overline{A}_\zeta$ в силу следствия 7.2. Следовательно, $\overline{A}_\zeta \simeq A_\zeta$. Теперь ясно, что задача Пика $f(\zeta_j) = w_j$ $(j \in \mathbb{N}_N)$ разрешима для последовательности $\{w_j\}_{j=1}^N$ в том и только в том случае, когда она разрешима для последовательности $\{\overline{w}_j\}_{j=1}^N$. Таким образом, существует голоморфная в $\mathbb{C}_+$ функция f такая, что $\sup_{\mathbb{C}_+} |f| \leqslant 1$ и

$$f(\zeta_j) = \overline{\left(\frac{\varphi(\zeta_j) - i}{\varphi(\zeta_j) + i}\right)}$$

при $j \in \mathbb{N}_N$. Положим $g \stackrel{\text{def}}{=} i\dfrac{1+f}{1-f}$. Тогда $g(\mathbb{C}_+) \subset \mathbb{C}_+$ и $f = \dfrac{g-i}{g+i}$.

Следовательно,

$$\frac{g(\zeta_j)-i}{g(\zeta_j)+i}=\frac{-\overline{\varphi(\zeta_j)}-i}{-\overline{\varphi(\zeta_j)}+i},$$

откуда $g(\zeta_j)=-\overline{\varphi(\zeta_j)}=\xi_j$ при всех j. Ясно, что если $N\geqslant 2$, то g – конформный автоморфизм верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$ на себя, поскольку g сохраняет гиперболическое расстояние между точками ζ_1 и ζ_2. $\square$

Из следствия 7.2 и теоремы 7.3 мгновенно вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.5. *Если $A_\xi\simeq\overline{A}_\zeta$, то $\xi=-\overline{\varphi}(\zeta)$ для некоторого автоморфизма φ верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$.* $\square$

Замечание 7.6. Положим $|A|\stackrel{\text{def}}{=}\{|a_{jk}|\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}$, где $A=\{a_{jk}\}\in\mathcal{S}_N$. Из доказательства теоремы 7.3 ясно, что если $\Gamma_{A_\zeta}=\Gamma_{A_\xi}$, то $A_\xi\simeq A_\zeta$ или $A_\xi\simeq\overline{A}_\zeta$. В частности, если $|A_\xi|=|A_\zeta|$, то $A_\xi\simeq A_\zeta$ или $A_\xi\simeq\overline{A}_\zeta$.

7.1. Случай единичного круга. Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^N$ – последовательность попарно различных точек единичного круга $\mathbb{D}$. Положим

$$\Theta=\Theta_\xi\stackrel{\text{def}}{=}\prod_{j=1}^{N}\frac{z-\xi_j}{1-z\overline{\xi}_j},$$

$$\mathcal{U}_\xi\stackrel{\text{def}}{=}\left\{\frac{1}{1-\xi_j\overline{\xi}_k}\right\}_{1\leqslant j,k\leqslant N},$$

$$\mathcal{A}_\xi\stackrel{\text{def}}{=}\left\{\frac{1}{\sqrt{\theta'(\xi_j)}\,\overline{\sqrt{\theta'(\xi_k)}}\,(1-\xi_j\overline{\xi}_k)}\right\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}.$$

Ясно, что $\mathcal{U}_\xi\stackrel{\mathrm{d}}{\sim}\mathcal{A}_\xi$.

Все результаты этой статьи, относящиеся к теории функций в верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$, с соответствующими изменениями переносятся на случай единичного круга $\mathbb{D}$.

В качестве примера “перенесём” доказательство неравенства $U_\zeta\geqslant 0$ на случай круга. Достаточно представить матрицу $\mathcal{U}_\xi$ в виде $\mathcal{U}_\xi=\sum\limits_{s=0}^{\infty}\{\xi_j^s\overline{\xi_k^s}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}$ и заметить, что $\{\xi_j^s\overline{\xi_k^s}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}\geqslant 0$ при всех $s\geqslant 0$. Впрочем, можно также воспользоваться конформной пересадкой, чтобы доказать, что неравенство $U_\zeta\geqslant 0$ равносильно неравенству $\mathcal{U}_\xi\geqslant 0$.

Теорема 7.7. *Пусть* $\{\zeta_k\}_{k=1}^N$ *– последовательность попарно различных точек верхней полуплоскости* $\mathbb{C}_+$. *Положим* $\xi_k \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(\zeta_k)$, *где* Φ *– конформное отображение полуплоскости* $\mathbb{C}_+$ *на круг* $\mathbb{D}$, *т. е.* $\Phi(z) = \tau \dfrac{z-a}{z-\overline{a}}$, *где* $a \in \mathbb{C}_+$, $\tau \in \mathbb{T}$. *Тогда* $\mathcal{A}_\xi \simeq A_\zeta$.

Доказательство этой теоремы может быть получено прямыми вычислениями. $\square$

8. Матрицы A, удовлетворяющие условию $A\overline{A} = I$

Пусть $\mathcal{K}_N^0$ обозначает множество всех матриц $A \in \mathcal{S}_N$ таких, что $A\overline{A} = I$. Обозначим через $\mathcal{K}_N$ множество всех матриц $U \in \mathcal{S}_N$ таких, что $U \stackrel{\text{d}}{\sim} A$ для некоторой матрицы $A \in \mathcal{K}_N^0$. Из леммы 2.2 следует, что $U \in \mathcal{K}_N$ в том и только в том случае, когда $U^{-1} \stackrel{\text{d}}{\sim} \overline{U}$.

Легко видеть, что $\mathcal{K}_N = \mathcal{S}_N$ только при $N = 1$ и $N = 2$.

Заметим, что $A_\zeta, \mathcal{A}_\xi \in \mathcal{K}_N^0 \subset \mathcal{K}_N$ и $U_\zeta, \mathcal{U}_\xi \in \mathcal{K}_N$.

Теорема 8.1. *Для любой матрицы* $A \in \mathcal{K}_N^0$ *существует единственная вещественная кососимметрическая матрица* X *такая, что* $A = \exp(iX)$. *Обратно, если* X *– вещественная кососимметрическая матрица размеров* $N \times N$, *то* $\exp(iX) \in \mathcal{K}_N^0$.

Эта теорема нам не понадобится, и мы опускаем достаточно очевидное доказательство.

Пусть $A = \{a_{jk}\}_{1 \leqslant j,k \leqslant N}$ – произвольная матрица. Обозначим через $a_{jk}^{\#}$ алгебраическое дополнение элемента a_{jk}. Положим $A_{\#} \stackrel{\text{def}}{=} \{a_{jk}^{\#}\}_{1 \leqslant j,k \leqslant N}$. Тогда $AA_{\#}^T = (\det A)I$.

Теорема 8.2. *Если матрица* $A \in \mathcal{S}_N$ *принадлежит множеству* $\mathcal{K}_N^0$, *то* $A = A_{\#}$. *При* $N \geqslant 3$ *верно и обратное.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{K}_N^0$. Тогда $\overline{A} = A^T = A^{-1}$, откуда $\det A = 1$. Следовательно, $AA_{\#}^T = (\det A)I = I$. Теперь ясно, что $A = A_{\#}$. Обратно, пусть $A = A_{\#}$ для некоторой матрицы $A \in \mathcal{S}_N$, где $N \geqslant 3$. Тогда $A\overline{A} = AA^T = AA_{\#}^T = (\det A)I$, откуда $(\det A)^2 = (\det A)^N$. Следовательно, $\det A = 1$ и $A \in \mathcal{K}_N^0$. $\square$

В следующем параграфе нам понадобится ещё одно простое утверждения о матрицах класса $\mathcal{K}_N^0$.

Лемма 8.3. *Пусть $A = \{a_{jk}\} \in \mathcal{K}_N^0$. Тогда $a_{jj} \geqslant 1$ для всех $j \in \mathbb{N}_N$. Если $a_{j_0 j_0} = 1$, то $a_{j_0 k} = a_{k j_0} = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}_N$, $k \neq j_0$.*

Доказательство. Заметим, что $A + \overline{A} = A + A^{-1} \geqslant 2I$. Отсюда следует требуемое неравенство. Второе утверждение вытекает из того, что если $(Ax, x) + (A^{-1}x, x) = 2(x, x)$, то $Ax = x$. □

9. Матрицы A, представимые в виде $A = A_\zeta$

Обозначим через $\mathcal{B}_N^0$ множество всех матриц $X \in \mathcal{S}_N$ таких, что $X \simeq A_\zeta$ для некоторой взаимно однозначной последовательности $\{\zeta_j\}_{j=1}^N$ точек верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Пусть $\mathcal{B}_N$ обозначает множество всех матриц $U \in \mathcal{S}_N$ таких, что $U \overset{\mathrm{d}}{\sim} A$ для некоторой матрицы $A \in \mathcal{B}_N^0$. Заметим, что $\mathcal{B}_N^0 \subset \mathcal{K}_N^0$ в силу теоремы 2.7 Следовательно, $\mathcal{B}_N \subset \mathcal{K}_N$. Отметим, что $\mathcal{B}_N^0 = \{A \in \mathcal{B}_N : A\overline{A} = I\}$ в силу замечания 2.3.

Обозначим через $\mathcal{S}_N^*$ множество всех матриц $X \in \mathcal{S}_N$, у которых нет нулевых элементов. Ясно, что $\mathcal{B}_N \subset \mathcal{S}_N^*$.

Пусть $A = \{a_{jk}\}$ – матрица с ненулевыми элементами. Положим $A_{-1} \overset{\mathrm{def}}{=} \{a_{jk}^{-1}\}$.

Теорема 9.1. *Пусть $U \in \mathcal{S}_N^*$, где $N \geqslant 2$. Тогда следующие два утверждения равносильны:*

1) $U \in \mathcal{B}_N$,
2) $\operatorname{rank} U_{-1} = 2$.

Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 9.2. *Пусть $A \in \mathcal{S}_N^*$, где $N \geqslant 2$. Тогда у матрицы A_{-1} есть по крайней мере одно положительное собственное число и по крайней мере одно отрицательное собственное число.*

Доказательство. Ясно, что $\operatorname{trace} A_{-1} > 0$. Следовательно, существует положительное собственное число. Предположим, что $A_{-1} \geqslant 0$. Тогда матрицу A_{-1} можно представить в виде $A_{-1} = U_0 + U_1$ таким образом, чтобы $U_0, U_1 \geqslant 0$, $\operatorname{rank} U_0 = 1$, $\operatorname{rank} U_1 = \operatorname{rank} A_{-1} - 1$. Заметим, что $U_1 \neq 0$, поскольку в противном случае $\operatorname{rank} A_{-1} = 1$, откуда $\operatorname{rank} A = 1$, но $\det A > 0$. Пусть $\mathbb{I}_N$ обозначает матрицу размеров $N \times N$, состоящую только из единиц. Тогда $A \star U_0 + A \star U_1 = \mathbb{I}_N$, где $\star$ обозначает произведение[2] Шура. Известно, что произведение

[2]Напомним, что произведение Шура определяется следующим образом: $\{u_{jk}\} \star \{v_{jk}\} \overset{\mathrm{def}}{=} \{u_{jk} v_{jk}\}$.

Шура неотрицательных матриц неотрицательно, см., например, [4, §6.5.2 (h)]. Таким образом, $0 \leqslant A \star U_0 \leqslant \mathbb{I}_N$, откуда $A \star U_0 = t\mathbb{I}_N$ для некоторого $t \in [0,1]$. Следовательно, $U_0 = tA_{-1}$, и мы приходим к противоречию. $\square$

Доказательство теоремы 9.1. Докажем, что 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $U \in \mathcal{B}_N$. Тогда $U \overset{\mathrm{d}}{\sim} A_\zeta$ для некоторой последовательности $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=1}^N$ попарно различных точек полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Ясно, что $U_{-1} \overset{\mathrm{d}}{\sim} (A_\zeta)_{-1} = \{i(\overline{a}_k - a_j)\}_{1\leqslant j,k\leqslant 1}$. Следовательно, $\operatorname{rank} U_{-1} = \operatorname{rank}\{i(\overline{a}_k - a_j)\}_{1\leqslant j,k\leqslant 1} = 2$.

Докажем теперь, что 2) $\Longrightarrow$ 1). В силу леммы 9.3 матрицу U_{-1} можно представить в виде $U_{-1} = D_u\mathbb{I}_N\overline{D}_u - D_v\mathbb{I}_N\overline{D}_v$, где $u, v \in \mathbb{C}^N$. Заметим, что $|u_j|^2 > |v_j|^2$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$, поскольку диагональные элементы матрицы U_{-1} положительны. Положим $\xi_j \overset{\mathrm{def}}{=} v_j u_j^{-1}$. Ясно, что $U_{-1} = D_u(\mathbb{I}_N - D_\xi\mathbb{I}_N\overline{D}_\xi)\overline{D}_u$, т. е. $U_{-1} \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathbb{I}_N - D_\xi\mathbb{I}_N\overline{D}_\xi$, откуда $U \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathcal{U}_\xi$. Заметим, что матрица $\mathcal{U}_\xi$ не может содержать одинаковых строк, поскольку $\det\mathcal{U}_\xi > 0$. Следовательно, $\xi_j \neq \xi_k$ при $j \neq k$. Таким образом, $U \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathcal{U}_\xi \overset{\mathrm{d}}{\sim} \mathcal{A}_\xi$. Осталось воспользоваться теоремой 7.7. $\square$

Следствие 9.3. *Пусть $A \in \mathcal{S}_N^*$, где $N \geqslant 2$. Тогда следующие два утверждения равносильны:*

1) $A \in \mathcal{B}_N^0$,
2) $A\overline{A} = I$ *и* $\operatorname{rank} A_{-1} = 2$. $\square$

Пусть J – n-элементное подмножество множества $\mathbb{N}_N$.Тогда J есть множество значений строго возрастающей последовательности $\{s_j\}_{j=1}^n$. С каждой матрицей $A = \{a_{jk}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}$ мы можем связать субматрицу $A_J \overset{\mathrm{def}}{=} \{a_{s_j s_k}\}_{1\leqslant j,k\leqslant n}$.

Теорема 9.4. *Пусть $A \in \mathcal{S}_N^*$. Тогда $A \in \mathcal{B}_N^0$ в том и только в том случае, когда $A \in \mathcal{K}_N^0$ и $A_{\mathbb{N}_{N-1}} \in \mathcal{B}_{N-1}$.*

Доказательство. Пусть $A \in \mathcal{B}_N^0$. Тогда включение $A_{\mathbb{N}_{N-1}} \in \mathcal{B}_{N-1}$ очевидно, а включение $A \in \mathcal{K}_N^0$ вытекает из теоремы 2.7.

Пусть теперь $A \in \mathcal{K}_N^0$ и $A_{\mathbb{N}_{N-1}} \in \mathcal{B}_{N-1}$. Докажем, что $A \in \mathcal{B}_N^0$. Положим $U \overset{\mathrm{def}}{=} A_{\mathbb{N}_{N-1}}$. Матрицу A можно представить в виде $A = \begin{pmatrix} U & X \\ X^* & \alpha \end{pmatrix}$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, а вектор $X \in \mathbb{C}^{N-1}$ рассматривается как матрица размеров $(N-1)\times 1$. По условию теоремы матрицу U можно представить в виде $U = D_w A_\zeta \overline{D}_w$, где $w \in \mathbb{C}^{N-1}$, а $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=1}^{N-1}$ – взаимно однозначная последовательность точек верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Ясно, что матрица D_w обратима. Из условия $A\overline{A} = I_N$ следует, что $U\overline{U} + XX^T = I_{N-1}$, т. е. $D_w A_\zeta \overline{D}_w^2 \overline{A}_\zeta D_w + XX^T = I_{N-1}$. Таким образом, $\operatorname{rank}(D_w A_\zeta \overline{D}_w^2 \overline{A}_\zeta D_w - I_{N-1}) = 1$. Следовательно, $\operatorname{rank}(D_w A_\zeta \overline{D}_w - D_w^{-1} A_\zeta \overline{D}_w^{-1}) = 1$, откуда $\operatorname{rank}(A_\zeta - D_w^{-2} A_\zeta \overline{D}_w^{-2}) = 1$. Теперь ясно, что либо $A_\zeta - D_w^{-2} A_\zeta \overline{D}_w^{-2} \geqslant 0$, либо $A_\zeta - D_w^{-2} A_\zeta \overline{D}_w^{-2} \leqslant 0$. Заметим, что $\alpha > 1$ в силу леммы 8.3. Кроме того, $\alpha = \det U = \prod_{j=1}^{N-1} |w_j|^2$ согласно теореме 8.2. Следовательно, существует индекс $j_0 \in \mathbb{N}_{N-1}$ такой, что $|w_{j_0}| > 1$. Таким образом, $A_\zeta - D_w^{-2} A_\zeta \overline{D}_w^{-2} \geqslant 0$, поскольку $a_{j_0 j_0} - |w_{j_0}|^{-4} a_{j_0 j_0} > 0$. В силу теоремы Пика существуют числа $\lambda \in \mathbb{C}_+$ и $\tau \in \mathbb{T}$ такие, что $w_j^{-2} = \tau \frac{\zeta_j - \lambda}{\zeta_j - \overline{\lambda}}$ при $j \in \mathbb{N}_{N-1}$. Определим последовательность $\widetilde{\zeta} = \{\widetilde{\zeta}_j\}_{j=1}^N$, положив $\widetilde{\zeta}_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} \zeta_j$ при $j < N$ и $\widetilde{\zeta}_N \stackrel{\mathrm{def}}{=} \lambda$. Заметим, что если $U\overline{U} + YY^T = I_N$ для некоторого $Y \in \mathbb{C}^N$, то $Y = X$ или $Y = -X$. Теперь ясно, что $A \simeq A_{\widetilde{\zeta}}$. $\square$

Следствие 9.5. *Пусть $A \in \mathcal{S}_N^*$. Тогда $A \in \mathcal{B}_N$ в том и только в том случае, когда $A \in \mathcal{K}_N$ и $A_{\mathbb{N}_{N-1}} \in \mathcal{B}_{N-1}$.* $\square$

Следствие 9.6. *Пусть $A \in \mathcal{S}_3^*$. Тогда $A \in \mathcal{B}_3^0$ в том и только в том случае, когда $A \in \mathcal{K}_3^0$.*

Доказательство. Включение $\mathcal{B}_N^0 \subset \mathcal{K}_N^0$ имеет место при всех N. Докажем, что $\mathcal{K}_3^0 \cap \mathcal{S}_3^* \subset \mathcal{B}_3^0$. Пусть $A \in \mathcal{K}_3^0 \cap \mathcal{S}_3^*$. Ясно, что $A_{\{1,2\}} \in \mathcal{S}_2^* = \mathcal{B}_2$. Остаётся воспользоваться теоремой 9.4. $\square$

Теорема 9.7. *Пусть $A \in \mathcal{S}_N^*$. Тогда $A \in \mathcal{B}_N$ в том и только в том случае, когда $A_{\mathbb{N}_n} \in \mathcal{K}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}_N$.*

Доказательство. Следствие 9.5 позволяет провести индукцию по N. $\square$

Теорема 9.8. *Пусть $A \in \mathcal{S}_N$, где $N \geqslant 4$. Тогда $A \in \mathcal{B}_N$ в том и только в том случае, когда $A_J \in \mathcal{B}_4$ для всех четырёхэлементных подмножеств J множества $\mathbb{N}_N$.*

Докажем сначала лемму.

Лемма 9.9. *Пусть $U = \{u_{jk}\}_{1 \leqslant j,k \leqslant N}$ – самосопряжённая матрица, причём $N \geqslant 4$. Предположим, что $\operatorname{rank} U_J \leqslant 2$ для любого четырёхэлементного подмножества J множества $\mathbb{N}_N$. Тогда $\operatorname{rank} U \leqslant 2$.*

Доказательство. Мы рассмотрим два случая. Первый случай. Существует двухэлементное подмножество J множества $\mathbb{N}_N$ такое, что $\det U_J \neq 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $J = \{1,2\}$. Предположим, что $\operatorname{rank} U \geqslant 3$. Тогда существует столбец матрицы U, который не принадлежит линейной оболочке первых двух столбцов. Можно считать, что этим свойством обладает третий столбец. Существуют числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ такие, что $u_{13} = \lambda_1 u_{11} + \lambda_2 u_{12}$ и $u_{23} = \lambda_1 u_{21} + \lambda_2 u_{22}$. Ясно, что существует индекс k такой, что $u_{k3} \neq \lambda_1 u_{k1} + \lambda_2 u_{k2}$. Тогда минор, соответствующий строкам $1, 2, k$ и первым трём столбцам не равен нулю. Следовательно $\operatorname{rank} A_{\{1,2,3,k\}} \geqslant 3$, и мы приходим к противоречию.

Рассмотрим теперь второй случай. Все главные миноры второго порядка матрицы U равны 0. Заметим, что если $u_{j_0 j_0} = 0$, то $u_{j_0 k} = u_{k j_0} = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}_N$. Таким образом, можно считать, что $u_{jj} \neq 0$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$, поскольку мы можем удалить все нулевые строки и столбцы матрицы U. Ясно, что либо $u_{jj} > 0$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$, либо $u_{jj} < 0$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$. Пусть для определённости $u_{jj} > 0$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$. Положим $w_j \overset{\text{def}}{=} u_{jj}^{-1/2}$. Заметим, что все диагональные элементы матрицы $D_w U D_w$ равны 1. Это позволяет свести доказываемое утверждение к случаю, когда $u_{jj} = 1$ при всех $j \in \mathbb{N}_N$. Тогда $|u_{jk}| = 1$ при всех $j, k \in \mathbb{N}_N$. Докажем, что $u_{js} u_{sk} = u_{jk}$ при всех $j, s, k \in \mathbb{N}_N$. Если два из трёх индексов j, s, k совпадают, то это равенство очевидно. Пусть теперь числа j, s, k попарно различны. Положим $J = \{j, s, k\}$. Ясно, что $\det U_J = 0$, т. е.

$$
\begin{aligned}
0 &= u_{jj}u_{ss}u_{kk} + u_{js}u_{sk}u_{kj} + u_{jk}u_{ks}u_{sj} - u_{jj}u_{sk}u_{ks} - u_{ss}u_{jk}u_{kj} - u_{kk}u_{sj}u_{js} \\
&= 1 + u_{js}u_{sk}u_{kj} + u_{jk}u_{ks}u_{sj} - 1 - 1 - 1 = 2\operatorname{Re}(u_{js}u_{sk}u_{kj}) - 2,
\end{aligned}
$$

откуда $u_{js} u_{sk} = u_{jk}$. Теперь ясно, что $U^2 = NU$. Кроме того, $\operatorname{trace} U = N$. Следовательно, $\operatorname{rank} U = 1$. □

Доказательство теоремы 9.8. Достаточно воспользоваться теоремой 9.1 и леммой 9.9. □

10. Заключительные замечания

10.1. Оценка нормы матрицы $A \in \mathcal{K}_N^0$.

Теорема 10.1. *Пусть $A \in \mathcal{K}_N^0$. Положим $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant N} a_{jj}$. Тогда*

$$
\|A\| \leqslant \frac{N(\lambda - 1) + 2 + \sqrt{N^2(\lambda - 1)^2 + 4N(\lambda - 1)}}{2}. \tag{11}
$$

Доказательство. Пусть $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_N$ собственные числа матрицы A, выписанные в порядке возрастания. Ясно, что $\sigma_j\sigma_{N+1-j} = 1$ при всех j. Кроме того, $s_N = \|A\|$. Имеем:

$$\|A\| + \|A\|^{-1} + (N-2) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}(\lambda_j + \lambda_{N+1-j}) = \operatorname{trace} A \leqslant N\lambda,$$

откуда следует доказываемое неравенство. □

Замечание 10.2. Из доказательство теоремы 10.1 видно, что при $N \leqslant 3$ имеет место равенство $\|A\| + \|A\|^{-1} + (N-2) = \operatorname{trace} A$.

Это замечание позволяет вычислить константу интерполяции M_ζ для последовательности ζ, состоящей их трёх точек $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \in \mathbb{C}_+$:

$$M_\zeta + M_\zeta^{-1} = \operatorname{trace} A_\zeta - 1 = \frac{1}{\delta_1} + \frac{1}{\delta_2} + \frac{1}{\delta_3} - 1.$$

Замечание 10.3. При каждом N и при каждом $\lambda \geqslant 1$ существует матрица $A \in \mathcal{K}_N^0$, для которой в (11) достигается равенство.

Случай $N = 2$ очевиден. При $N \geqslant 3$ требуемую матрицу нетрудно найти среди матриц Лорана на группе $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, т. е. среди матриц вида $\{t_{j-k}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}$, где $\{t_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ – двухсторонняя последовательность такая, что $t_{n+N} = t_n$ для всех $n \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, для матриц A класса $\mathcal{K}_N^0$ (в отличие от класса $\mathcal{B}_N^0$) невозможна не зависящая от N оценка вида $\|A\| \leqslant \mathcal{M}(\|D_A\|^{-1})$, где $\mathcal{M}$ – положительная функция, заданная на промежутке $(0, 1]$.

10.2. Замечание к теореме 7.3. Из теоремы 7.3 и следствия 7.2 следует, что условие $A_\zeta \simeq \overline{A}_\zeta$ выполняется в том и только в том случае, когда все точки последовательности ζ лежат на прямой Лобачевского.

Теорема 10.4. *Пусть* $A_\zeta = \{a_{jk}\}_{1\leqslant j,k\leqslant N}$. *Тогда следующие три утверждения равносильны:*

1) $A_\zeta \simeq \overline{A}_\zeta$,
2) *все точки последовательности* ζ *лежат на прямой Лобачевского,*
3) $a_{jk}^2 \in \mathbb{R}$ *при всех* $j, k \in \mathbb{N}_N$.

Доказательство. Равносильность утверждений 1) и 2) уже была установлена перед формулировкой теоремы. Докажем, что 2) $\Longrightarrow$ 3).

Пусть все точки последовательности $\zeta = \{\zeta_k\}_{k=1}^N$ лежат на прямой Лобачевского. В силу теоремы 7.1 достаточно рассмотреть случай, когда $\operatorname{Re}\zeta_k = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}_N$. Теперь справедливость утверждения 3) очевидна. Чтобы закончить доказательство, нам нужна лемма.

Лемма 10.5. *Пусть $\zeta = \{\zeta_k\}_{k=1}^N$ – произвольная последовательность попарно различных точек верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Тогда $\operatorname{Re}(a_{jk}a_{ks}a_{sj}) > 0$ при всех $j, k, s \in \mathbb{N}_N$. Кроме того, $a_{jk}a_{ks}a_{sj} \in (0, +\infty)$ в том и только в том случае, когда точки ζ_j, ζ_k и ζ_s лежат на одной прямой Лобачевского.*

Доказательство. Если два из индексов j, k, s совпадают, то доказываемое утверждение очевидным образом следует из самосопряжённости матрицы A_ζ. Путь теперь индексы j, k, s попарно различны. Тогда можно считать, что $j = 1$, $k = 2$, $s = 3$. В этом случае неравенство $\operatorname{Re}(a_{jk}a_{ks}a_{sj}) > 0$ равносильно неравенству $\operatorname{Re}(i(\zeta_1 - \overline{\zeta}_2)(\zeta_2 - \overline{\zeta}_3)(\zeta_3 - \overline{\zeta}_1)) > 0$. Не умаляя общности, можно считать, что $\zeta_3 = i$. Тогда доказываемое неравенство следует из тождества $i(\zeta_1 - \overline{\zeta}_2)(\zeta_2 + i)(i - \overline{\zeta}_1) = |\overline{\zeta}_2 - \zeta_1|^2 + i(\overline{\zeta}_2 - \zeta_1) + i\overline{\zeta}_1|\zeta_2|^2 - i\zeta_2|\zeta_1|^2$. Из этого же равенства следует, что $|\overline{\zeta}_2 - \zeta_1|^2 + i(\overline{\zeta}_2 - \zeta_1) + i\overline{\zeta}_1|\zeta_2|^2 - i\zeta_2|\zeta_1|^2 > 0$ в том и только в том случае, когда $(\zeta_1 + \overline{\zeta}_1)(|\zeta_2|^2 - 1) = (\zeta_2 + \overline{\zeta}_2)(|\zeta_1|^2 - 1)$. Остаётся заметить, что при каждом $\zeta_1 \in \mathbb{C}_+$, $\zeta_1 \neq i$, множество $\{z \in \mathbb{C}_+ : (\zeta_1 + \overline{\zeta}_1)(|z|^2 - 1) = (z + \overline{z})(|\zeta_1|^2 - 1)\}$ является прямой Лобачевского, проходящей через точки i и ζ_1. $\square$

Вернёмся теперь к доказательству теоремы 10.4. Нам осталось доказать, что 3) $\Longrightarrow$ 2). Пусть $a_{jk}^2 \in \mathbb{R}$ при всех $j, k \in \mathbb{N}_N$. Тогда $(a_{jk}a_{ks}a_{sj})^2 \in \mathbb{R}$. Отсюда и из леммы 10.5 следует, что $a_{jk}a_{ks}a_{sj} > 0$. Применяя ещё раз лемму 10.5, получаем, что любые три точки ζ_j, ζ_k, ζ_s последовательности лежат на прямой Лобачевского. Следовательно, все точки последовательности ζ лежат на прямой Лобачевского. $\square$

10.3. Замечание к теореме 9.8. Следующий пример показывает, что Теорема 9.8 перестаёт быть справедливой, если четырёхэлементные множества заменить трёхэлементными.

Пример 10.6. Пусть $0 < r < 1$ и $\tau \in \mathbb{T}$. Предположим, что $|r\tau - 1| =$

$1 - r^2$. Тогда матрица

$$X \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 1 & r & r & r \\ r & 1 & r\tau & r\tau \\ r & r\overline{\tau} & 1 & r\tau \\ r & r\overline{\tau} & r\overline{\tau} & 1 \end{pmatrix}$$

обладает следующими свойствами:

1) $X \in \mathcal{S}_4^*$, если r достаточно мало,

2) $X_J \in \mathcal{B}_3$ для всех трёхэлементных подмножеств J множества $\mathbb{N}_4$,

3) $X \notin \mathcal{K}_4$. В частности, $X \notin \mathcal{B}_4$.

Утверждение 1) вытекает из теоремы Сильвестра, поскольку $\det X_{\mathbb{N}_1} = 1 > 0$, $\det X_{\mathbb{N}_2} = 1 - r^2 > 0$, $\det X_{\mathbb{N}_3} = (1 - r^2)^3 > 0$ и $\det X > 0$, если r достаточно мало. Чтобы доказать утверждения 2) и 3), нам понадобится следующая лемма.

Лемма 10.7. *Положим* $\eta \overset{\text{def}}{=} \dfrac{r\tau - 1}{1 - r^2}$. *Тогда* $\eta^3 = \tau^2$.

Доказательство. Равенства $|r\tau - 1| = 1 - r^2$ и $|\tau| = 1$ влекут: $\tau^2 - (3r - r^3)\tau + 1 = 0$. Следовательно, $\eta^3 - \tau^2 = \frac{(r\tau-1)^3}{(1-r^2)^3} - \tau^2 = \frac{(r^3\tau-1)(\tau^2-(3r-r^3)\tau+1)}{(1-r^2)^3} = 0$. $\square$

Докажем, что $X_J \in \mathcal{B}_3$ для любого трёхэлементного подмножества J множества $\mathbb{N}_4$. Ясно, что либо $X_J = X_{\mathbb{N}_3}$, либо $X_J = X_{\{2,3,4\}}$. Заметим, что $X_{\mathbb{N}_3} \overset{\text{d}}{\sim} X_{\{2,3,4\}}$. Таким образом, достаточно рассмотреть случай $J = \mathbb{N}_3$. В силу следствия 9.6 достаточно доказать, что $X_{\mathbb{N}_3} \in \mathcal{K}_3$. Имеем:

$$X_{\mathbb{N}_3}^{-1} = \frac{1}{(1-r^2)^3} \begin{pmatrix} 1 - r^2 & r^2\overline{\tau} - r & r^2\tau - r \\ r^2\tau - r & 1 - r^2 & r^2 - r\tau \\ r^2\overline{\tau} - r & r^2 - r\overline{\tau} & 1 - r^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{(1-r^2)^2} \begin{pmatrix} 1 & r\overline{\eta} & r\eta \\ r\eta & 1 & r\tau\overline{\eta} \\ r\overline{\eta} & r\eta\overline{\tau} & 1 \end{pmatrix}.$$

Теперь ясно, что $X_{\mathbb{N}_3}^{-1} \overset{\text{d}}{\sim} \overline{X}_{\mathbb{N}_3}$, поскольку $\tau^2 = \eta^3$.

Докажем теперь, что $X \notin \mathcal{K}_4$. В силу следствия 9.5 достаточно доказать, что $X \notin \mathcal{B}_4$. Предположим, что $X \in \mathcal{B}_4$. Это означает, что $X \overset{\text{d}}{\sim} A_\zeta$ для некоторой последовательности $\zeta = \{\zeta_j\}_{j=1}^4$ попарно различных точек верхней полуплоскости $\mathbb{C}_+$. Тогда $\Gamma_X = \Gamma_{A_\zeta}$ (определение матрицы Γ_A см. в §7), откуда $\dfrac{4\operatorname{Im}\zeta_j \operatorname{Im}\zeta_k}{|\zeta_j - \overline{\zeta}_k|^2} = r^2$ при всех $j,k \in \mathbb{N}_4$, $j \ne k$. Таким образом, четыре точки $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ полуплоскости $\mathbb{C}_+$ равноудалены друг от друга в гиперболической метрике, чего не может быть. Полученное противоречие доказывает, что $X \notin \mathcal{B}_4$. Разумеется, невозможность включения $X \in \mathcal{B}_4$ легко следует и из теоремы 9.1.

10.4. Замыкание множества $\mathcal{B}_N^0$. Обозначим через $\overline{\mathcal{B}}_N^0$ замыкание множества $\mathcal{B}_N^0$ в пространстве всех матриц размеров $N \times N$. Пусть A_j – матрица размеров $N_j \times N_j$ при $j \in \mathbb{N}_n$. Мы определяем прямую сумму $\bigoplus\limits_{j=1}^{n} A_j$ как блочно-диагональную матрицу с диагональными блоками $A_1, A_2, \dots, A_n$, т. е.

$$\bigoplus_{j=1}^{n} A_j \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_n \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что если $A_j \in \mathcal{B}_{N_j}^0$ при всех $j \in \mathbb{N}_n$, то $\bigoplus\limits_{j=1}^{n} A_j \in \overline{\mathcal{B}}_N^0$, где $N = \sum\limits_{j=1}^{n} N_j$.

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_N)$ – перестановка множества $\mathbb{N}_N$. Тогда с каждой матрицей A вида $A = \{a_{jk}\}_{1 \leqslant j,k \leqslant N}$ мы можем связать матрицу $A^\gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{a_{\gamma_j \gamma_k}\}_{1 \leqslant j,k \leqslant N}$.

Нетрудно доказать, что множество $\overline{\mathcal{B}}_N^0$ совпадает с множеством всех матриц $A \in \mathcal{S}_N$, представимых в виде $A = \big(\bigoplus\limits_{j=1}^{n} A_j\big)^\gamma$, где $n \in \mathbb{N}_N$, $A_j \in \mathcal{B}_{N_j}^0$, $N_j \in \mathbb{N}$, $\sum\limits_{j=1}^{n} N_j = N$, γ – перестановка множества $\mathbb{N}_N$.

Литература

1. Дж. Гарнет, *Ограниченные аналитические функции.* Мир, М. (1984).
2. П. Кусис, *Введение в теорию пространств* H^p. Мир, М. (1984).
3. Н. К. Никольский, *Лекции об операторе сдвига.* Наука, М. (1980).

4. N. K. Nikolski, *Operators, functions, and systems: an easy reading.* Vol. 1. Hardy, Hankel, and Toeplitz, *Mathematical Surveys and Monographs*, 92. American Mathematical Society, Providence, RI (2002).
5. J. P. Earl, *On the interpolation of bounded sequences by bounded functions.* — J. London Math. Soc. **2**, (2), no. 3 (1970), 544–548.
6. J. P. Earl, *A note on bounded interpolation in the unit disc.* — J. London Math. Soc. (2) **13**, no. 3 (1976), 419–423.
7. John B. Garnett, *Two remarks on interpolation by bounded analytic functions.* Banach spaces of analytic functions (Proc. Pelczynski Conf., Kent State Univ., Kent, Ohio, 1976), pp. 32–40. Lecture Notes in Math., Vol. 604, Springer, Berlin (1977).
8. P. W. Jones, *L^∞ estimates for the $\overline{\partial}$ problem in a half-plane.* — Acta Math. **150**, no. 1–2 (1983), 137–152.
9. P. Koosis, *Carleson's interpolation theorem deduced from a result of Pick.* Complex Analysis, Operators, and Related Topics, Oper. Theory Adv Appl. **113** (2000), 151–162.
10. С. А. Виноградов, Е. А. Горин, С. В. Хрущёв, *Свободная интерполяция в H^∞ по Джонсу.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **113** (1981), 212–214.

Aleksandrov A. B. On Koosis's approach to the proof of the Carleson interpolation theorem.

The paper is devoted to Koosis's approach to the Carleson theorem. It is shown that this approach also works for other related questions. The main emphasis in this paper is on the method.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: alex@pdmi.ras.ru

Поступило 5 мая 2008 г.