Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 354, 2008 г.

А. В. Шанин

КРАЕВЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА НА МНОГОЛИСТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕИЗВЕСТНЫХ КОНСТАНТ

1. Введение

Настоящая работа есть продолжение [1], где были выведены координатные и спектральные уравнения для определения краевых функций Грина на многолистной поверхности с точками ветвления второго порядка. В коэффициенты уравнений входят неизвестные константы; для определения этих констант необходимо сформулировать ограничения, которым должны удовлетворять решения этих уравнений.

Рассматривать постановку задачи определения констант сразу на произвольной многолистной поверхности достаточно сложно, поэтому рассмотрение задачи будем проводить на конкретном примере. Пример соответствует задаче, рассмотренной в работе [1]. Рассмотрим поверхность, геометрия которой изображена на Рис. 1.Поверхность имеет четыре листа. На листах проведены разрезы. Берега разрезов, помеченные одинаковыми цифрами, склеиваются. В результате формируются четыре точки ветвления. Будем обозначать эту поверхность символом $\mathbb{S}$.

Декартовы координаты (x, y) и цилиндрические координаты (r, φ) показаны на Рис. 2. Пусть точки ветвления имеют координаты $(a_1, 0)$, $(0, a_2)$, $(-a_3, 0)$, $(0, -a_4)$. Пусть все $a_m > 0$. При $a_1 = a_3$, $a_2 = a_4$ эта поверхность соответствует задаче для уголкового отражателя со щелью ([1], Рис. 1б). Здесь мы не будем предполагать наличие таких симметрий. С одной стороны, задача с произвольными $a_1 \dots a_4$ обладает большей общностью. С другой стороны, учет геометрических симметрий в нашем рассмотрении потребует значительного усложнения алгебраического аппарата (и без того не очень простого).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 07-02-00803-а, а также гранта “Научные школы” .

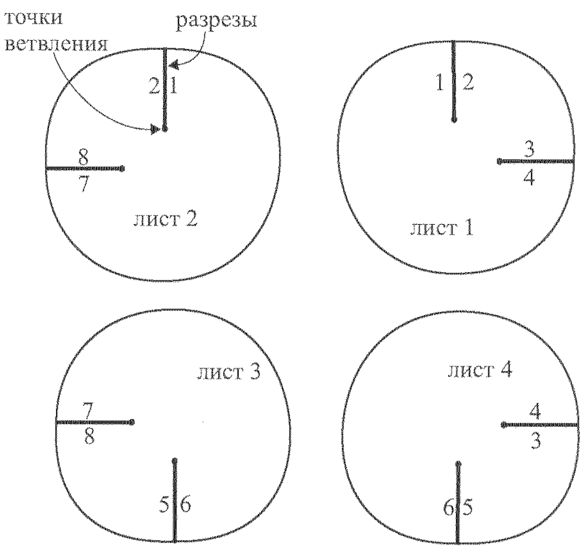

Рис. 1. Схема многолистной поверхности.

Введем “комплексные” координаты

$$z_+ = x + \mathrm{i}\, y, \qquad z_- = x - \mathrm{i}\, y.$$

Введем также комплексные координаты точек ветвления

$$p_1 = a_1, \quad p_2 = \mathrm{i}\, a_2, \quad p_3 = -a_3, \quad p_4 = -\mathrm{i}\, a_4.$$

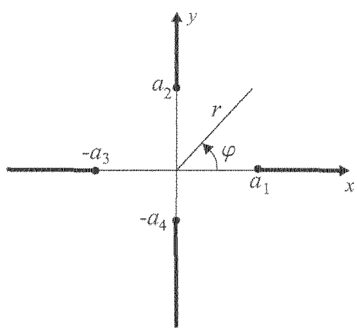

Рис. 2. Координаты на многолистной поверхности.

Перечислим основные формулы, полученные в [1]. На данной поверхности определены краевые функции Грина $u^{m\pm}$, $m = 1 \dots 4$. Эти функции Грина сгруппированы в вектор-столбец

$$\mathbf{u} = (u^{1+}, u^{2+}, u^{3+}, u^{4+}, u^{1-}, u^{2-}, u^{3-}, u^{4-})^T.$$

Краевые функции Грина удовлетворяют *координатным уравнениям*

$$\frac{\partial}{\partial z_+}\mathbf{u} = \mathbf{Z}_+\mathbf{u}, \quad \frac{\partial}{\partial z_-}\mathbf{u} = \mathbf{Z}_-\mathbf{u}, \tag{1}$$

где коэффициенты записываются в блочной форме как

$$\mathbf{Z}_+ = -\begin{pmatrix} (z_+\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-1}\cdot(\mathbf{I}/2+\widehat{\mathbf{C}}^+_+), & (z_+\mathbf{I}-\mathbf{P})^{-1}\cdot\mathbf{C}^+_-\cdot(z_-\mathbf{I}-\bar{\mathbf{P}}) \\ \mathbf{C}^-_+, & 0 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\mathbf{Z}_- = -\begin{pmatrix} 0, & \mathbf{C}^+_- \\ (z_-\mathbf{I}-\bar{\mathbf{P}})^{-1}\cdot\mathbf{C}^-_+\cdot(z_+\mathbf{I}-\mathbf{P}), & (z_-\mathbf{I}-\bar{\mathbf{P}})^{-1}\cdot(\mathbf{I}/2+\widehat{\mathbf{C}}^-_-), \end{pmatrix} \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{I}$ – единичная матрица 4×4, $\mathbf{P} = \mathrm{diag}\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$, черта сверху обозначает комплексное сопряжение, $\mathbf{C}^+_-$, $\mathbf{C}^-_+$, $\widehat{\mathbf{C}}^+_+$, $\widehat{\mathbf{C}}^-_-$ – неизвестные матрицы-константы. Постановка задачи об определении этих матриц и является целью настоящей работы.

Неизвестные матрицы обладают следующими свойствами:

$$\mathbf{C}^+_- = (\mathbf{C}^-_+)^T, \quad \widehat{\mathbf{C}}^+_+ = -(\widehat{\mathbf{C}}^+_+)^T, \quad \widehat{\mathbf{C}}^-_- = -(\widehat{\mathbf{C}}^-_-)^T, \tag{4}$$

$$\widehat{\mathbf{C}}^+_+\mathbf{C}^+_- + \mathbf{C}^+_-\widehat{\mathbf{C}}^-_- = 0, \tag{5}$$

$$\mathbf{C}^-_+\mathbf{C}^+_- = -\frac{k_0^2}{4}\mathbf{I}. \tag{6}$$

Диаграммы направленности $S^{m\pm}$ краевых функций Грина составляют столбец

$$\mathbf{S}(\varphi) = \begin{pmatrix} \mathbf{U}^+ \\ \mathbf{U}^- \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{U}^+ = (S^{1+}, S^{2+}, S^{3+}, S^{4+}), \quad \mathbf{U}^- = (S^{1-}, S^{2-}, S^{3-}, S^{4-}).$$

Эти диаграммы удовлетворяют соотношению

$$\mathbf{U}^- = \frac{2\,\mathrm{i}}{k_0}e^{\mathrm{i}\,\varphi}\mathbf{C}^-_+\mathbf{U}^+ \tag{7}$$

и *спектральному уравнению*

$$\frac{d}{d\varphi}\mathbf{U}^+(\varphi) = -\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\mathbf{I} + \mathrm{i}\,\widehat{\mathbf{C}}_+^+ + \frac{e^{-\mathrm{i}\,\varphi}k_0}{2}\mathbf{P} + \frac{2e^{\mathrm{i}\,\varphi}}{k_0}\mathbf{C}_-^+\bar{\mathbf{P}}\mathbf{C}_+^-\right)\mathbf{U}^+(\varphi). \quad (8)$$

Найдем число свободных параметров, определяющих матрицы $\mathbf{C}_-^+$, $\mathbf{C}_+^-$, $\widehat{\mathbf{C}}_+^+$, $\widehat{\mathbf{C}}_-^-$, связанные условиями (4), (5), (6). Матрица $\mathbf{C}_-^+$ с точностью до постоянного множителя является ортогональной. Ее первый столбец определяется с помощью трех комплексных параметров (можно считать их углами), второй столбец – с помощью двух, третий – с помощью одного, четвертый определяется однозначно (с точностью до отражений). Итого – шесть параметров. Матрица $\widehat{\mathbf{C}}_-^+$ – произвольная кососимметрическая матрица. Она определяется с помощью шести свободных параметров. Матрицы $\mathbf{C}_+^-$ и $\widehat{\mathbf{C}}_-^-$ вычисляются, если известны $\mathbf{C}_-^+$ и $\widehat{\mathbf{C}}_+^+$. Таким образом, всего коэффициенты координатных и спектрального уравнений зависят от двенадцати свободных параметров.

Цель настоящей работы – сформулировать ограничения на коэффициенты $\mathbf{C}_-^+$, $\mathbf{C}_+^-$, $\widehat{\mathbf{C}}_+^+$, $\widehat{\mathbf{C}}_-^-$ так, чтобы при выполнении этих ограничений координатные уравнения имели решение, однозначное на данной многолистной поверхности и удовлетворяющее условию излучения на каждом из листов поверхности. В работе [1] показано, что уравнение Гельмгольца следует из координатных уравнений, а нужные асимптотики в точках ветвления гарантируются асимптотиками решения координатных уравнений.

План настоящей работы таков. Вводятся важные характеристики асимптотик спектрального уравнения, т.н. сигма- и бета- последовательности. Топологические свойства решений координатных уравнений формулируются в терминах этих последовательностей. Получается система ограничений, гарантирующая нужное поведение решений, однако количество ограничений сначала получается больше количества свободных параметров. Это означает, что имеются скрытые алгебрические связи между ограничениями. Данные связи следуют из нетривиальной симметрии спектрального уравнения. Учет этой симметрии позволяет свести число ограничений к числу свободных параметров.

2. Описание асимптотик спектрального уравнения с помощью сигма- и бета-последовательностей

Асимптотики спектрального и координатных уравнений были выписаны в работе [1]. Здесь, однако, необходимо исследовать их более детально. Заданная геометрия поверхности позволяет выделить области доминирования каждой из асимптотик.

Рассмотрим комплексную плоскость угловой переменной φ. Будем изучать асимптотику решений спектрального уравнения при больших положительных значениях $\operatorname{Im}\varphi$ и при больших отрицательных значениях $\operatorname{Im}\varphi$. Соответственно, будем говорить о *верхней* и *нижней* асимптотике.

Построим в плоскости φ полуполосы s_j^{up} и s_j^{dn} уходящие в верхнюю и нижнюю бесконечность, соответственно (см. Рис. 3). Положение полуполос определяется параметрами α_j. Значения этих параметров при $j = 1 \dots 4$ даются следующими формулами:

$$\alpha_1 = \operatorname{Arg}[p_2 - p_1] - \pi, \quad \alpha_2 = \operatorname{Arg}[p_3 - p_2] + \pi,$$
$$\alpha_3 = \operatorname{Arg}[p_4 - p_3] + \pi, \quad \alpha_4 = \operatorname{Arg}[p_1 - p_4] + \pi, \tag{9}$$

Для получения полуполос с другими $-\infty < j < \infty$ необходимо продолжить диаграмму на Рис. 3 периодически с перодом 2π вдоль $\operatorname{Re}\varphi$. Увеличению номера полуполосы на один будет соответствовать один шаг вправо.

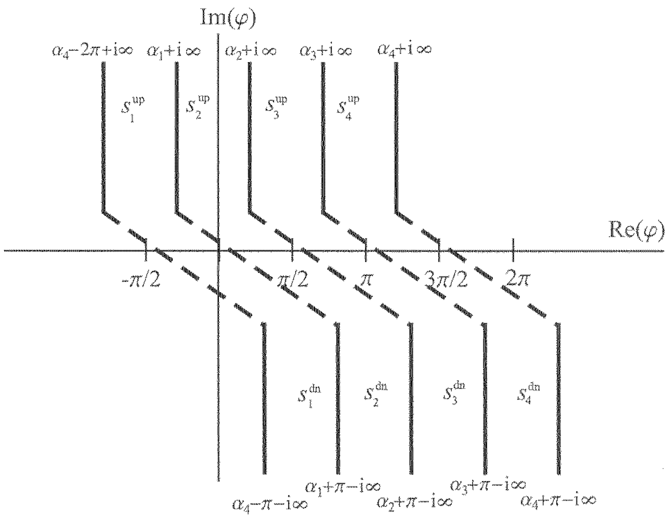

Рис. 3. Области справедливости асимптотик решений спектрального уравнения на бесконечности.

Сформулируем асимптотические свойства решений спектрального уравнения для верхней бесконечности и нижней бесконечности. Поскольку эти свойства могут быть получены стандартными методами [2], приведем их без доказательства.

Введем экспоненциальные множители в верхних и нижних полуполосах, соответственно (см. [1]):

$$F_m^{\rm up} = \exp\left\{-\frac{{\rm i}\,k_0}{2} p_m e^{-{\rm i}\,\varphi}\right\}, \quad F_m^{\rm dn} = \exp\left\{-\frac{{\rm i}\,k_0}{2} \bar p_m e^{{\rm i}\,\varphi}\right\}, \quad m = 1\dots 4.$$

Заметим, что множители с индексом m доминируют над остальными в верхней и нижней полуполосе с индексом m.

Сформулируем утверждение, которое уточняет соответствующее утверждение работы [1], определяя области доминирования соответствующих асимптотик.

Утверждение 1. *Существуют решения* $\mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_4$ *спектрального уравнения* (8), *имеющие в полуполосах*

$$\bigcup_{j=1}^{5} s_j^{\rm up}, \quad \bigcup_{j=2}^{6} s_j^{\rm up}, \quad \bigcup_{j=3}^{7} s_j^{\rm up}, \quad \bigcup_{j=4}^{8} s_j^{\rm up},$$

соответственно, следующие асимптотики:

$$V_m^n = e^{-{\rm i}\,\varphi/2}(\delta_{m,n} + O(e^{{\rm i}\,\varphi}))F_m^{\rm up}(\varphi). \tag{10}$$

Существуют также решения $\mathbf{W}_1 \dots \mathbf{W}_4$ *спектрального уравнения* (8), *имеющие в полуполосах*

$$\bigcup_{j=1}^{5} s_j^{\rm dn}, \quad \bigcup_{j=2}^{6} s_j^{\rm dn}, \quad \bigcup_{j=3}^{7} s_j^{\rm dn}, \quad \bigcup_{j=4}^{8} s_j^{\rm dn},$$

соответственно, следующие асимптотики:

$$W_m^n = \frac{2\,{\rm i}\,e^{-{\rm i}\,\varphi/2}}{k_0}(C_{m-}^{n+} + O(e^{-{\rm i}\,\varphi}))F_m^{\rm dn}(\varphi), \tag{11}$$

Поясним коротко, откуда следует данное утверждение. Возьмем в качестве примера решение $\mathbf{V}_1$. С точностью до коэффициента, это произвольное решение, имеющее асимптотику $e^{-\mathrm{i}\,\varphi/2}F_1^{\mathrm{up}}$ в полуполосе s_3^{up}. В данной полуполосе эта асимптотика является самой *слабой*, поэтому то же самое представление должно выполняться в четырех соседних полуполосах.

Пусть $\mathbf{U}$ – некоторое решение спектрального уравнения (8). Определим для этого решения последовательности $\sigma[j]$ и $\beta[j]$, $j \in \mathbb{Z}$, следующим образом.

Пусть в полуполосе s_j^{up} доминирует верхняя асимптотика $\mathbf{V}_m$ (т.е. $m \equiv j \pmod 4$). Тогда поле в этой полуполосе представимо в виде

$$\mathbf{U}(\varphi) = \sigma[j]\,\mathbf{V}_m(\varphi) + \text{экспоненциально малые члены}, \qquad (12)$$

где $\sigma[j]$ – некоторый коэффициент. Этот коэффициент и есть член выстраиваемой последовательности.

Аналогично, коэффициенты $\beta[j]$ определяются с помощью нижних асимптотик, а именно с помощью разложения

$$\mathbf{U}(\varphi) = \beta[j]\,\mathbf{W}_m(\varphi) + \text{экспоненциально малые члены}, \qquad (13)$$

справедливого в полуполосе s_m^{dn} при $m \equiv j \pmod 4$.

Пусть $\{\sigma_m[j]\}$ и $\{\beta_m[j]\}$ – последовательности, введенные для некоторых четырех решений $\mathbf{U}_m(\varphi)$, $m = 1\dots4$. Определим следующие матрицы:

$$\mathbf{s}[j] = \begin{pmatrix} \sigma_1[j] & \sigma_2[j] & \sigma_3[j] & \sigma_4[j] \\ \sigma_1[j+1] & \sigma_2[j+1] & \sigma_3[j+1] & \sigma_4[j+1] \\ \sigma_1[j+2] & \sigma_2[j+2] & \sigma_3[j+2] & \sigma_4[j+2] \\ \sigma_1[j+3] & \sigma_2[j+3] & \sigma_3[j+3] & \sigma_4[j+3] \end{pmatrix}, \qquad (14)$$

$$\mathbf{b}[j] = \begin{pmatrix} \beta_1[j] & \beta_2[j] & \beta_3[j] & \beta_4[j] \\ \beta_1[j+1] & \beta_2[j+1] & \beta_3[j+1] & \beta_4[j+1] \\ \beta_1[j+2] & \beta_2[j+2] & \beta_3[j+2] & \beta_4[j+2] \\ \beta_1[j+3] & \beta_2[j+3] & \beta_3[j+3] & \beta_4[j+3] \end{pmatrix}. \qquad (15)$$

В работе [1] была выписана формула для определителя, составленного из четырех решений

$$\mathrm{Det}(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4) = A e^{-2\,\mathrm{i}\,\varphi} \prod_{m=1}^{4} F_m^{\mathrm{up}}(\varphi) F_m^{\mathrm{dn}}(\varphi), \qquad (16)$$

где A – константа.

Оценки поведения набора решений в верхней (нижней) бесконечности позволяют выразить коэффициент A из (16) следующим образом:

$$A = (-1)^{j-1}\,\mathrm{Det}(\mathbf{s}[j]) = (-1)^{j-1}\,\mathrm{Det}(\mathbf{b}[j])\,\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{-}^{+}), \tag{17}$$

где $\mathrm{Det}(\mathbf{C}_{-}^{+}) = k_0^4/16$.

Как следствие, получаем, что величины $(-1)^j\mathrm{Det}(\mathbf{s}[j])$ и $(-1)^j\mathrm{Det}(\mathbf{b}[j])$ не зависят от j.

Другим следствием является следующее утверждение:

Утверждение 2. *Каждое решение спектрального уравнения* (8) *однозначно определяется набором из четырех последовательно идущих значений* $\sigma[j], \sigma[j+1], \sigma[j+2], \sigma[j+3]$ *или из четырех значений* $\beta[j], \beta[j+1], \beta[j+2], \beta[j+3]$. *Если все значения в наборе (сигма или бета) равны нулю, то решение тождественно равно нулю.*

Будем обозначать решения спектрального уравнения, явным образом указывая индекс j и четверку элементов $\sigma[j], \sigma[j+1], \sigma[j+2], \sigma[j+3]$ или $\beta[j], \beta[j+1], \beta[j+2], \beta[j+3]$. Так, введем обозначение

$$\mathbf{U}(\varphi) = \mathbf{U}_j^{\mathrm{up}}(c_1, c_2, c_3, c_4; \varphi),$$

соответствующее функции, имеющей в верхних полуполосах $s_j^{\mathrm{up}} \dots s_{j+3}^{\mathrm{up}}$ асимптотические коэффициенты

$$\sigma[j] = c_1, \quad \sigma[j+1] = c_2, \quad \sigma[j+2] = c_3, \quad \sigma[j+3] = c_4.$$

Аналогично введем обозначение решений на основе асимптотических коэффициентов для нижних асимптотик. Так обозначение

$$\mathbf{U}(\varphi) = \mathbf{U}_j^{\mathrm{dn}}(c_1, c_2, c_3, c_4; \varphi)$$

соответствует решению, имеющему асимптотические коэффициенты

$$\beta[j] = c_1, \quad \beta[j+1] = c_2, \quad \beta[j+2] = c_3, \quad \beta[j+3] = c_4.$$

Заметим, что решения $\mathbf{V}_1 \dots \mathbf{V}_4$ и $\mathbf{W}_1 \dots \mathbf{W}_4$, использованные в формулировке Утверждения 1, получают следующие обозначения:

$$\mathbf{V}_m = \mathbf{U}_m^{\mathrm{up}}(1,0,0,0;\varphi) = \mathbf{U}_{m+1}^{\mathrm{up}}(0,0,0,1;\varphi), \tag{18}$$

$$\mathbf{W}_m = \mathbf{U}_m^{\mathrm{dn}}(1,0,0,0;\varphi) = \mathbf{U}_{m+1}^{\mathrm{dn}}(0,0,0,1;\varphi). \tag{19}$$

Определение 1. *Спектральное уравнение* (8) *с некоторыми заданными коэффициентами* $\mathbf{C}_-^+$, $\mathbf{C}_+^-$, $\widehat{\mathbf{C}}_-^-$ *и* $\widehat{\mathbf{C}}_+^+$ *называется сбалансированным, если при* $m = 1 \dots 4$

$$\mathbf{U}_1^{\mathrm{up}}(\delta_{1,m}, \delta_{2,m}, \delta_{3,m}, \delta_{4,m}; \varphi) = \lambda_m \mathbf{U}_1^{\mathrm{dn}}(\delta_{1,m}, \delta_{2,m}, \delta_{3,m}, \delta_{4,m}; \varphi) \qquad (20)$$

для некоторых не равных нулю чисел $\lambda_1 \dots \lambda_4$.

Функции, стоящие в левой части (20), могут использоваться как базис в пространстве решений спектрального уравнения. Отметим, что за счет симметрии уравнения по отношению к сдвигу $\varphi \to \varphi + 2\pi$ этот базис можно переносить на $2\pi n$. В результате легко доказывается следующее утверждение:

Утверждение 3. *Пусть спектральное уравнение* (8) *сбалансированно,* $\mathbf{U}(\varphi)$ *– одно из его решений,* $\{\sigma[j]\}$, $\{\beta[j]\}$ *– асимптотические последовательности, определенные для данного решения. Тогда для любого* j,

$$\beta[j] = \lambda_m \sigma[j], \qquad (21)$$

где m *– целое число между* 1 *и* 4 *такое, что* $j \equiv m \pmod 4$.

В работе [1] показано, что для любого матричного решения, т.е. неособой квадратной матрицы $\mathbf{U}$ размером 4×4, составленной из решений спектрального уравнения:

$$\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1(\varphi), \mathbf{U}_2(\varphi), \mathbf{U}_3(\varphi), \mathbf{U}_4(\varphi)). \qquad (22)$$

матрица

$$\mathbf{U}^A(\varphi) = -\mathrm{i}\, e^{-\mathrm{i}\,\varphi}((\mathbf{U}(\varphi + \pi))^{-1})^T, \qquad (23)$$

также состоит из решений спектрального уравнения. Выясним, как преобразование (23) действует на базисные решения спектрального уравнения и на элементы последовательностей σ и β.

Утверждение 4. *Пусть*

$$\mathbf{B}_j = (\mathbf{U}_{j,1}(\varphi), \mathbf{U}_{j,2}(\varphi), \mathbf{U}_{j,3}(\varphi), \mathbf{U}_{j,4}(\varphi)),$$

где

$$\mathbf{U}_{j,m} = \mathbf{U}_j^{\mathrm{up}\,/\,\mathrm{dn}}(\delta_{m,1}, \delta_{m,2}, \delta_{m,3}, \delta_{m,4}; \varphi) \qquad (24)$$

(имеется в виду, что индекс up / dn *принимает во всех формулах одно и то же значение). Пусть матрица* $(\mathbf{B}_j)^A$ *построена по формуле* (23). *Обозначим ее столбцы как*

$$(\mathbf{U}^A_{j,1}(\varphi), \mathbf{U}^A_{j,2}(\varphi), \mathbf{U}^A_{j,3}(\varphi), \mathbf{U}^A_{j,4}(\varphi)).$$

Тогда эти столбцы имеют вид базисных решений

$$\mathbf{U}^A_{j,1}(\varphi) = \mathbf{U}^{\mathrm{up}\,/\,\mathrm{dn}}_{j-3}(0,0,0,1;\varphi), \tag{25}$$

$$\mathbf{U}^A_{j,2}(\varphi) = \mathbf{U}^{\mathrm{up}\,/\,\mathrm{dn}}_{j-2}(0,0,0,1;\varphi), \tag{26}$$

$$\mathbf{U}^A_{j,3}(\varphi) = \mathbf{U}^{\mathrm{up}\,/\,\mathrm{dn}}_{j-2}(1,0,0,0;\varphi), \tag{27}$$

$$\mathbf{U}^A_{j,4}(\varphi) = \mathbf{U}^{\mathrm{up}\,/\,\mathrm{dn}}_{j-1}(1,0,0,0;\varphi). \tag{28}$$

Доказательство основано на исследовании асимптотик столбцов матрицы $(\mathbf{B}_j)^A$ в соответствующих полуполосах. При исследовании нижних асимптотик принимается во внимание следующее соотношение:

$$\left(\frac{2\,\mathrm{i}\,\mathbf{C}^+_-}{k_0}\right)^{-1,T} = \frac{2\,\mathrm{i}\,\mathbf{C}^+_-}{k_0}. \tag{29}$$

Для столбцов матрицы $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1(\varphi), \mathbf{U}_2(\varphi), \mathbf{U}_3(\varphi), \mathbf{U}_4(\varphi))$, составленной из четырех произвольных линейно независимых решений (8) построим последовательности $\{\sigma_m[j]\}$ и $\{\beta_m[j]\}$, $m = 1\ldots 4$. Построим матрицы $\mathbf{s}[j]$ и $\mathbf{b}[j]$ в соответствии с (14) и (15).

Построим матрицу $\mathbf{U}^A$ по формуле (23) и обозначим ее столбцы как $(\mathbf{U}^A_1(\varphi), \mathbf{U}^A_2(\varphi), \mathbf{U}^A_3(\varphi), \mathbf{U}^A_4(\varphi))$. Поставим этим столбцам в соответствие их асимптотические последовательности $\{\sigma^A_m[j]\}$ and $\{\beta^A_m[j]\}$, $m = 1\ldots 4$.

Следующее утверждение позволяет выразить $\{\sigma^A_m[j]\}$ и $\{\beta^A_m[j]\}$ через $\{\sigma_m[j]\}$ и $\{\beta_m[j]\}$:

Утверждение 5. *Элементы последовательностей* $\sigma^A_m[j]$ *и* $\beta^A_m[j]$ *могут быть найдены по формулам*

$$\sigma^A_m[j] = (\mathbf{s}^{-1,T}[j])^1_m, \quad \beta^A_m[j] = (\mathbf{b}^{-1,T}[j])^1_m. \tag{30}$$

Для доказательства этого утверждения заметим, что при любом j

$$\mathbf{U}(\varphi) = \mathbf{B}_j(\varphi)\cdot\mathbf{s}_j, \tag{31}$$

а следовательно,

$$\mathbf{U}^A = \mathbf{B}^A_j\,(\mathbf{s}_j)^{-1,T}. \tag{32}$$

Принимая во внимание представления столбцов $(\mathbf{B}_j)^A$ (25)–(28), получим (30).

Утверждение 6. *Пусть спектральное уравнение* (8) *сбалансированно. Тогда каждый из параметров* λ_m, $m = 1 \dots 4$ *(см.* (21) *равен* 1 *или* -1.

Для доказательства рассмотрим матрицу

$$\mathbf{B} = (\mathbf{U}_1(\varphi), \mathbf{U}_2(\varphi), \mathbf{U}_3(\varphi), \mathbf{U}_4(\varphi)),$$

где

$$\mathbf{U}_m = \mathbf{U}_1^{\mathrm{up}}(\delta_{m,1}, \delta_{m,2}, \delta_{m,3}, \delta_{m,4}; \varphi). \tag{33}$$

По свойству (21), эти же решения могут быть записаны как

$$\mathbf{U}_m = \lambda_m \mathbf{U}_1^{\mathrm{dn}}(\delta_{m,1}, \delta_{m,2}, \delta_{m,3}, \delta_{m,4}; \varphi). \tag{34}$$

Рассмотрим первый столбец матрицы $(\mathbf{B})^A$. Его можно вычислить, ориентируюясь на верхнюю асимптотику, тогда получится

$$\mathbf{U}_{-2}^{\mathrm{up}}(0, 0, 0, 1; \varphi)$$

и, следовательно, $\lambda_1 \mathbf{U}_{-2}^{\mathrm{dn}}(0, 0, 0, 1; \varphi)$. Если тот же столбец вычисляется с помощью нижней асимптотики, то он получается равным $\lambda_1^{-1} \mathbf{U}_{-2}^{\mathrm{dn}}(0, 0, 0, 1; \varphi)$. Таким образом, $\lambda_1 = \lambda_1^{-1}$ и $\lambda_1 = \pm 1$. Остальные соотношения устанавливаются аналогично.

Таким образом, сбалансированные спектральные уравнения можно классифицировать по набору констант $\lambda_m = \pm 1$. Очевидно, при непрерывном изменении геометрических параметров задачи этот набор величин меняться не должен. Можно выяснить, к какому классу принадлежат “физически реализуемые” спектральные уравнения, например, рассмотрев коротковолновую задачу. Аккуратное рассмотрение показывает, что в физически реализуемых сбалансированных уравнениях $\lambda_m = 1$ при всех m.

3. Связь асимптотических свойств решений спектрального уравнения с топологическими свойствами решений координатного

Пусть вектор $\mathbf{S} = (\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-)^T$. удовлетворяет соотношению (7) и спектральному уравнению (8). Тогда интеграл

$$\mathbf{u}(R, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi/2 + \mathrm{i}\,\infty}^{\pi/2 - \mathrm{i}\,\infty} e^{\mathrm{i}\, k_0 R \cos\theta} \mathbf{S}(\theta + \varphi) d\theta \tag{35}$$

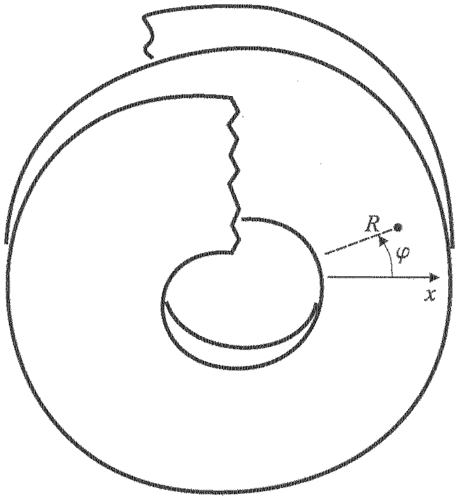

Рис. 4. Область, в которой поле определяется интегралом (35).

задает волновое поле $\mathbf{u}$, удовлетворяющее координатным уравнениям и условию излучения на поверхности, имеющей вид спирали Рис. 4 (см. [1]).

Угол φ принимает значения от $-\infty$ до ∞. Зафиксируем его значение равным $\varphi = \pi(k-1)/2$ для некоторого целого k. Продолжим поле, определяемое интегралом (35) от больших значений R, где интеграл сходится, к малым R. При стремлении точки наблюдения к соответствующей точке ветвления, т.е. к точке p_m, где m – целое число от 1 до 4 такое, что

$$m \equiv k \pmod 4, \tag{36}$$

поле, вообще говоря, имеет сингулярность.

Следующее утверждение описывает связь сингулярности поля с элементами последовательностей $\{\sigma[j]\}$ и $\{\beta[j]\}$, введенных в предыдущем разделе для функции $\mathbf{U} = \mathbf{U}^+$.

Утверждение 7. *Пусть* $\mathbf{S} = (\mathbf{U}^+, \mathbf{U}^-)^T$, *пусть* $\mathbf{U}^+$ *и* $\mathbf{U}^-$ *удовлетворяют* (7), *а* $\mathbf{U}^+$ *удовлетворяет спектральному уравнению* (8). *Определим последовательности* $\{\sigma[j]\}$ *и* $\{\beta[j]\}$ *для решения* $\mathbf{U}^+$. *Пусть* $\varphi = \varphi_k = \pi(k-1)/2$, *а* m *определяется как* (36). *Тогда асимптотики компонент с индексами* $m+$ *и* $m-$ *вектора* $\mathbf{u}$, *определяемого интегра-*

лом (35), *вблизи точки*

$$R = |p_m|, \quad \varphi = \varphi_k$$

выглядят как

$$u^{m+}(R, \varphi_k) = \frac{e^{-\mathrm{i}\,\varphi_k/2}\sigma[k]}{\mathrm{i}\,\sqrt{2\pi k_0(R - |p_m|)}} + O(1) \tag{37}$$

и

$$u^{m-}(R, \varphi_k) = \frac{e^{\mathrm{i}\,\varphi_k/2}\beta[k]}{\mathrm{i}\,\sqrt{2\pi k_0(R - |p_m|)}} + O(1). \tag{38}$$

Асимптотики остальных компонент вектора $\mathbf{u}$ *определяются в соответствии с Утверждением 1* [1].

Продолжение функции $\mathbf{u}$ *в точку* $(R = |p_m|, \varphi = \varphi_k)$ *регулярно в этой точке тогда и только тогда, когда*

$$\sigma[k] = 0 \quad \text{и} \quad \beta[k] = 0. \tag{39}$$

Доказательство сводится к исследованию асимптотики интеграла (35).

Утверждение 8. *Пусть матрицы* $\mathbf{C}_-^+$, $\mathbf{C}_+^-$, $\widehat{\mathbf{C}}_-^-$ *и* $\widehat{\mathbf{C}}_+^+$ *подобраны таким образом, что решение соответствующего координатного уравнения представляет собой волновое поле, однозначное на поверхности* $\mathbb{S}$ *и удовлетворяющее условию излучения. Тогда соответствующее спектральное уравнение* (8) *сбалансированно.*

Обратимся к формулировке Теоремы 3 [1]. По формуле (41) [1] и контурам $\Gamma_1 \dots \Gamma_4$, изображенным на Рис. 4 [1] построим по физическому решению $\mathbf{u}$ четыре решения координатного уравнений $\mathbf{u}_1^* \dots \mathbf{u}_4^*$. Вычислив их диаграммы направленности, построим четыре базисных решения спектрального уравнения $\mathbf{U}_1^* \dots \mathbf{U}_4^*$.

Заметим, что каждое решение $\mathbf{u}_m^*$ регулярно вне контура Γ_m. Это значит, оно не имеет сингулярностей в трех точках, соответствующих точкам ветвления. По Утверждению 7, диаграммы направленности этих решений совпадают с точностью до постоянных множителей с решениями

$$\mathbf{U}_1^{\mathrm{up}\,/\,\mathrm{dn}}(1,0,0,0;\varphi) \dots \mathbf{U}_4^{\mathrm{up}\,/\,\mathrm{dn}}(1,0,0,0;\varphi).$$

Символ “up / dn” означает, что с точностью до коэффициента каждое решение может трактоваться и как “up’, и как “*dn*’. Набор из четырех таких векторов может быть с помошью преобразования $\mathbf{U} \to \mathbf{U}^A$ заменен на набор

$$\mathbf{U}_1^{\mathrm{up}\,/\,\mathrm{dn}}(\delta_{m,1}, \delta_{m,2}, \delta_{m,3}, \delta_{m,4}; \varphi)$$

при $m = 1 \ldots 4$. Таким образом, спектральное уравнение (8) обладает набором решений, делающим его сбалансированным.

4. Формулы аналитического продолжения

Пусть $\mathbf{U}$ – некоторое решение спектрального уравнения (8), а функция $\mathbf{u}$ – соответствующее решение координатных уравнений (1), определенное на спирали $R > \max(|p_m|)$, $-\infty < \varphi < \infty$, изображенной на Рис. 4. Рассмотрим продолжение $\mathbf{u}$ вдоль контура, обходящего одну из точек ветвления. Например, обход вокруг p_2 показан на Рис. 5. Сформулируем два вопроса, касающихся этого продолжения:
1. Удовлетворяет ли решение $\mathbf{u}(R, \varphi)$ условию излучения при $R \to \infty$ после обхода?
2. Если оно удовлетворяет условию излучения, то как изменяется его диаграмма направленности?

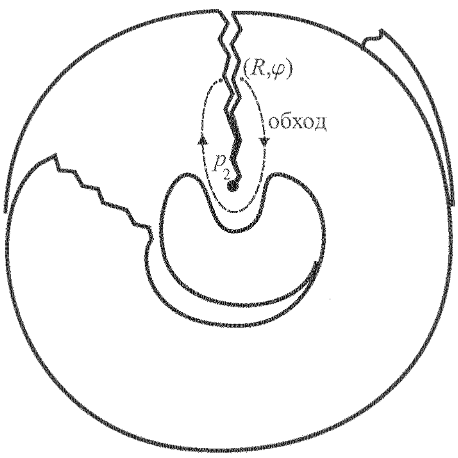

Рис. 5. Обход вокруг точки ветвления p_2.

Поскольку диаграмма направленности является решением спектрального уравнения, в рамках второго вопроса необходимо найти преобразование решения спектрального уравнения, соответствующее данному обходу в координатной области.

Ответ на оба вопроса дается следующим утверждением.

Утверждение 9. *Пусть спектральное уравнение* (8) *сбалансированно, пусть* $\mathbf{U}$ *– его решение, а* $\sigma[j]$ *– верхняя асимптотическая последовательность, построенная для этого решения. Пусть вокруг вершины с координатами* $\varphi = \varphi_k = \pi(k-1)/2$, $R = a_m$, $m \equiv k \pmod 4$ *совершен обход.*

Тогда функция $\mathbf{u}$ *удовлетворяет условию излучения после обхода, а ее диаграмма направленности после обхода определяется соотношением*

$$\mathbf{U}^{\mathrm{after}}(\varphi) = \mathbf{U}^{\mathrm{before}}(\varphi) - \sigma[k](\mathbf{U}^{\mathrm{up}}_{k-3}(0,0,0,1;\varphi) + \mathbf{U}^{\mathrm{up}}_{k}(1,0,0,0;\varphi)) \quad (40)$$

Для доказательства заметим, что комбинация

$$\mathbf{U}(\varphi) - \sigma[k]\mathbf{U}^{\mathrm{up}}_{k-3}(0,0,0,1;\varphi)$$

не имеет точки ветвления в вершине $\varphi = \varphi_k = \pi(k-1)/2$, $R = |p_m|$, следовательно, ее продолжение равно ей самой. С другой стороны, построим решение спектрального уравнения $\mathbf{U}^{\mathrm{up}}_{k-3}(0,0,0,1;\varphi)$ и соответствующее ему решение координатных уравнений, которое назовем $\mathbf{u}^{\mathrm{up}}_{k-3}(0,0,0,1;\varphi)$. Данное решение координатных уравнений на некотором листе действительных переменных x и y имеет только одну точку ветвления, и можно деформировать обход вокруг этой точки ветвления, как показано на Рис. 6. Таким образом, продолжение диаграммы $\mathbf{U}^{\mathrm{up}}_{k-3}(0,0,0,1;\varphi)$ дается формулой

$$(\mathbf{U}^{\mathrm{up}}_{k-3}(0,0,0,1;\varphi))^{\mathrm{after}} = \mathbf{U}^{\mathrm{up}}_{k-3}(0,0,0,1;\varphi-2\pi) = -\mathbf{U}^{\mathrm{up}}_{k}(1,0,0,0;\varphi)$$

Последнее равенство следует из периодичности коэффициентов спектрального уравнения.

Утверждение 10. *Пусть координатное уравнение вида* (1) *имеет решение, представляющее собой краевые функций Грина на поверхности* $\mathbb{S}$ *. Пусть спектральное уравнение* (8) *соответствует координатному уравнению* (1)*. Пусть* $\mathbf{U}(\varphi)$ *– произвольное решение-столбец*

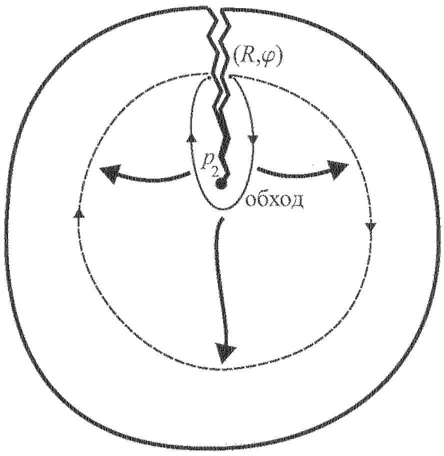

Рис. 6. Деформация обхода для $\mathbf{U}^{\mathrm{up}}_{-1}(0,0,0,1;\varphi)$.

уравнения (8), *и* $\{\sigma[j]\}$ *– верхняя асимптотическая последовательность для этого решения. Тогда выполняются следующие соотношения:*

$$\zeta[j]\sigma[j] = \zeta[j-1]\sigma[j-1] + \zeta[j-3]\sigma[j-3] - \zeta[j-4]\sigma[j-4], \quad (41)$$

где коэффициенты $\zeta[j]$ *определяются как*

$$\zeta[j] = \begin{cases} 1, & \textit{при} \quad j \equiv 1,2,3,4 \pmod 8 \\ -1, & \textit{при} \quad j \equiv 5,6,7,8 \pmod 8 \end{cases} \quad (42)$$

Доказательство. Последовательности $\{\sigma[j]\}$, соответствующие различным решениям уравнения (8), образуют линейное пространство размерности 4. Построим четыре линейно независмые последовательности в этом пространстве, т.е. его базис.

Рассмотрим вектор-функцию $\mathbf{u}$, состоящую из краевых функций Грина. По условию, такая функция является решением координатных уравнений.

Для данной многолистной поверхности бесконечность является точкой ветвления. Над этой точкой существует один неразветвленный лист и три соединяющихся между собой листа. Таким образом, имеется две векторных диаграммы направленности, одна из которых периодична с периодом 2π, а другая с периодом 6π. Соответственно, имеется два решения уравнения (8), имеющих соотвествующие периоды.

Рассмотрим решение с периодом 2π. Элементы последовательности $\sigma[j]$ для этого решения при $j = 1\dots 8$ можно вычислить непосредственно из асимптотик краевых функций Грина:

$$\sigma_1[1\dots 8] = 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1. \tag{43}$$

Период последовательности равен 8 (заметим, что множитель $e^{-\mathrm{i}\,\varphi/2}$ в (10) изменяет знак при переходе $\varphi \to \varphi + 2\pi$).

Рассмотрим решение с периодом 6π. Очевидно, σ-последовательность для этого решения имеет период 24. Элементы этой последовательности при $j = 1\dots 24$ также легко найти:

$$\sigma_2[1\dots 24] = -1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0. \tag{44}$$

Последовательность σ_3 может быть получена, если повернуть решение, соответствующее σ_2, на угол 2π, т.е. на четыре элемента:

$$\sigma_3[1\dots 24] = 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0, -1, 0, 0, -1. \tag{45}$$

Если повернуть решение, соответствующее σ_2, на угол 4π, получится последовательность, линейно зависимая от σ_1, σ_2 и σ_3. Поэтому для отыскания четвертой последовательности используем более сложный способ.

Построим решение $\mathbf{U}_1^{\mathrm{up}}(0, 0, 0, 1; \varphi)$ и будем считать, что последовательность σ_4 соответствует этому решению.

Заметим, что решение, соответствующее последовательности σ_2, может быть получено из σ_1 в результате обхода вокруг вершины p_4. Применим к этому обходу формулу (40). В результате получим соотношение:

$$\sigma_4[j] + \sigma_4[j-4] = \sigma_1[j] - \sigma_2[j].$$

Эта формула дает рекуррентное соотношение для σ_4. В результате можно вычислить элементы $\sigma_4[j]$ для $j = 5\dots 8$:

$$\sigma_4[1\dots 8] = 0, 0, 0, 1, -1, -1, -2, -2. \tag{46}$$

Последовательности σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 образуют базис линейного пространства. Формула (41) может быть проверена для каждой из этих последовательностей при $j = 5 \dots 8$. Для остальных j она выполняется в силу периодичности задачи. $\square$

Наконец, объединяя Утверждения 9 и 7, получим обратное утверждение:

Утверждение 11. *Пусть коэффициенты* $\mathbf{C}_{-}^{+}$, $\mathbf{C}_{+}^{-}$, $\widehat{\mathbf{C}}_{+}^{+}$, $\widehat{\mathbf{C}}_{-}^{-}$ *спектрального уравнения* (8) *подобраны так, что* 1) *уравнение сбалансированно, все константы* λ_m, *определенные в* (21), *равны единице, и* 2) *последовательности* σ *для всех решений удовлетворяют рекуррентной формуле* (41).

Тогда соответствующие координатные уравнения (1) *имеют решение* $\mathbf{u}(x, y)$, *однозначное на поверхности* $\mathbb{S}$ *и удовлетворяющее условию излучения на всех листах. Асимптотики решения имеют вид* (8), (9) *из* [1].

Для доказательства данного утверждения достаточно найти среди σ-последовательностей (а значит и решений спектрального уравнения) решения с периодом 2π и 6π и изучить, как изменяется решение при обходе вершин. Выведенные формулы позволяют утверждать, что решения с периодом 2π и 6π преобразуются точно так же, как диаграммы направленности краевых функций Грина. В частности, можно сделать вывод о том, что построенное решение однозначно на поверхности $\mathbb{S}$.

Условие 1 Утверждения 11 гарантирует, что условие излучения остается справедливым после обхода точек ветвления. Условие 2 фиксирует топологию поверхности, на которой определено решение $\mathbf{u}$.

Условие 1 эквивалентно 12 скалярным соотношениям между элементами последовательностей σ и β.

Формально, условие 2 эквивалентно 16 скалярным соотношениям, однако Утверждение 5 из [1] и формула (17) гарантирует выполнение четырех из них априори.

Таким образом, требования Утверждения 11 эквивалентны 24 скалярным ограничениям, что вдвое больше числа свободных параметров. Ниже показано, что ограничения не являются независимыми, и их число можно уменьшить до 12.

5. Учет симметрии (23)

Прежде всего, модифицируем условие 1 Утверждения 11.

Утверждение 12. *Для произвольным образом зафиксированных коэффициентов спектрального уравнения* (8) *определим матрицу*

$$\mathbf{T} = \mathbf{b}[1](\mathbf{s}[1])^{-1}, \tag{47}$$

где матрицы $\mathbf{s}[1]$ *и* $\mathbf{b}[1]$ *построены по формулам* (14) *и* (15). *Если* $\mathbf{T}$ *имеет верхнюю треугольную форму*

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_1^1 & T_2^1 & T_3^1 & T_4^1 \\ 0 & T_2^2 & T_3^2 & T_4^2 \\ 0 & 0 & T_3^3 & T_4^3 \\ 0 & 0 & 0 & T_4^4 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

то уравнение (8) *сбалансированно.*

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mathbf{s}[1]$ имеет вид единичной матрицы, т.е. матричное решение $\mathbf{U} = (\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2, \mathbf{U}_3, \mathbf{U}_4)$ состоит из функций $\mathbf{U}_m(\varphi) = \mathbf{U}_m^{\rm up}(\delta_{1,m}, \delta_{2,m}, \delta_{3,m}, \delta_{4,m}; \varphi)$. В этом случае матрица $\mathbf{T}$ совпадает с $\mathbf{b}[1]$. По определению, уравнение (8) сбалансированно тогда и только тогда, когда $\mathbf{T}$ – диагональная матрица.

Построим матрицу $\mathbf{U}^A$ по формуле (23). По Утверждению 6 из [1], столбцы матрицы $\mathbf{U}^A$ удовлетворяют уравнению (8). Рассмотрим σ- и β- последовательности, соответствующие столбцам $\mathbf{U}^A$. Обозначим эти последовательности $\sigma_m^A[j]$ и $\beta_m^A[j]$. Составим из этих последовательностей матрицы $\mathbf{s}^A[j]$ и $\mathbf{b}^A[j]$.

Используя формулу (30), нетрудно показать, что при произвольных элементах последовательностей $\sigma_m[j]$, $j > 4$, матрица $\mathbf{s}^A[1]$ является нижней треугольной. Это означает, что

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}^A \, \mathbf{L}, \tag{49}$$

где $\mathbf{L} = (\mathbf{s}^A[1])^{-1}$ – также нижняя треугольная матрица.

Рассмотрим матрицу $\mathbf{b}^A[1]$. Матрица $\mathbf{b}[1] = \mathbf{T}$ является верхней треугольной. Используя формулу (30), можно показать, что матрица $\mathbf{b}^A[1]$ должна быть нижней треугольной. В силу (49),

$$\mathbf{b}[1] = \mathbf{b}^A[1] \, \mathbf{L}, \tag{50}$$

и, следовательно, матрица $\mathbf{b}[1] = \mathbf{T}$ должна быть нижней треугольной. Следовательно, $\mathbf{T}$ является одновременно верхней и нижней треугольной матрицей, т.е. это диагональная матрица $\square$

Прежде, чем модифицировать условие 2 Утверждения 11, введем обозначение

$$\tilde{\sigma}[j] = \zeta[j]\sigma[j], \tag{51}$$

где $\zeta[j]$ определяется как (42). Формула (41) в новых обозначениях запишется как

$$\tilde{\sigma}[j] = \tilde{\sigma}[j-1] + \tilde{\sigma}[j-3] - \tilde{\sigma}[j-4], \tag{52}$$

Для любых четырех решений спектрального уравнения (8) определим матрицу $\tilde{\mathbf{s}}[j]$ соотношением, сходным с (14), т.е. как определитель, состоящий из элементов $\tilde{\sigma}_n[j+m-1]$. Определим последовательности $\tilde{\sigma}^A[j]$ для решений, полученных в результате преобразования (23). Заметим, что имеет место формула, сходная с (30):

$$\tilde{\sigma}^A_m[j] = (\tilde{\mathbf{s}}^{-1,T}[j])^1_m. \tag{53}$$

Определитель $\tilde{\mathbf{s}}[j]$ не зависит от j:

$$\mathrm{Det}(\tilde{\mathbf{s}}[j]) = \mathrm{const}. \tag{54}$$

Это следует из (17).

При произвольном выборе коэффициентов спектрального уравнения формула (52) может не выполняться, однако, при любом j можно подобрать числа $A_1[j] \ldots A_4[j]$ такие, что

$$\tilde{\sigma}[j] = A_1[j]\tilde{\sigma}[j-1] + A_2[j]\tilde{\sigma}[j-2] + A_3[j]\tilde{\sigma}[j-3] + A_4[j]\tilde{\sigma}[j-4]. \tag{55}$$

Эти числа находятся по формуле

$$\begin{pmatrix} A_4[j] \\ A_3[j] \\ A_2[j] \\ A_1[j] \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{s}}[j-4])^{-1,T} \begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1[j] \\ \tilde{\sigma}_2[j] \\ \tilde{\sigma}_3[j] \\ \tilde{\sigma}_4[j] \end{pmatrix} \tag{56}$$

для любых последовательностей $\tilde{\sigma}_1 \ldots \tilde{\sigma}_4$, соответствующих линейно независимым решениям уравнения (8).

Периодичность коэффициентов спектрального уравнения дает

$$A_m[j] = A_m[j+4], \tag{57}$$

следовательно, имеет смысл рассматривать только $A_m[j]$ при $j = 1 \dots 4$.

В соответствии с (54), равенство

$$A_4[j] = -1 \text{ при любом } \quad j \tag{58}$$

выполняется априори.

Таким образом, в рекуррентную формулу для последовательности $\{\tilde{\sigma}\}$ входит 12 неизвестных величин $A_m[j]$.

Следующее утверждение говорит о том, что эти величины не являются независимыми.

Утверждение 13. *Пусть выполняются следующие соотношения для $A_m[j]$:*

$$A_3[1] = A_1[1] = A_3[2] = A_3[3] = 1, \quad A_2[1] = A_2[2] = 0. \tag{59}$$

Тогда верна формула (52), *т.е. выполняются оставшиеся соотношения*

$$A_1[2] = A_1[3] = A_1[4] = A_3[4] = 1, \quad A_2[3] = A_2[4] = 0. \tag{60}$$

Доказательство. По условию утверждения, матрица $A_m[j]$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} A_4[1] & A_4[2] & A_4[3] & A_4[4] \\ A_3[1] & A_3[2] & A_3[3] & A_3[4] \\ A_2[1] & A_2[2] & A_2[3] & A_2[4] \\ A_1[1] & A_1[2] & A_1[3] & A_1[4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & A_3[4] \\ 0 & 0 & A_2[3] & A_2[4] \\ 1 & A_1[2] & A_1[3] & A_1[4] \end{pmatrix}. \tag{61}$$

Преобразуем рекуррентные соотношения для последовательностей $\{\tilde{\sigma}\}$ в соотношения для матриц $\tilde{\mathbf{s}}[j]$:

$$\tilde{\mathbf{s}}^T[j] = \tilde{\mathbf{s}}^T[1]\, \mathbf{T}_{j-1}, \tag{62}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 =& \mathbf{I}, \\ \mathbf{T}_1 =& \mathbf{t}_1, \\ \mathbf{T}_2 =& \mathbf{t}_1\, \mathbf{t}_2, \\ \mathbf{T}_3 =& \mathbf{t}_1\, \mathbf{t}_2\, \mathbf{t}_3, \\ \mathbf{T}_4 =& \mathbf{t}_1\, \mathbf{t}_2\, \mathbf{t}_3\, \mathbf{t}_4, \\ \mathbf{T}_5 =& \mathbf{t}_1\, \mathbf{t}_2\, \mathbf{t}_3\, \mathbf{t}_4\, \mathbf{t}_1, \\ \mathbf{T}_6 =& \mathbf{t}_1\, \mathbf{t}_2\, \mathbf{t}_3\, \mathbf{t}_4\, \mathbf{t}_1\, \mathbf{t}_2, \\ \mathbf{T}_7 =& \mathbf{t}_1\, \mathbf{t}_2\, \mathbf{t}_3\, \mathbf{t}_4\, \mathbf{t}_1\, \mathbf{t}_2\, \mathbf{t}_3, \\ \mathbf{T}_8 =& \mathbf{t}_1\, \mathbf{t}_2\, \mathbf{t}_3\, \mathbf{t}_4\, \mathbf{t}_1\, \mathbf{t}_2\, \mathbf{t}_3\, \mathbf{t}_4, \\ & \dots \end{aligned}$$

$$\mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & A_1[2] \end{pmatrix}, \tag{63}$$

$$\mathbf{t}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & A_2[3] \\ 0 & 0 & 1 & A_1[3] \end{pmatrix}, \quad \mathbf{t}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & A_3[4] \\ 0 & 1 & 0 & A_2[3] \\ 0 & 0 & 1 & A_1[3] \end{pmatrix}. \tag{64}$$

Пусть последовательности $\tilde{\sigma}_m[j]$ определены для четырех линейно независимых решений спектрального уравнения $\mathbf{U}_m$, сгруппированных в матричное решение $\mathbf{U}$. Построим матрицу $\mathbf{U}^A$ и определим для ее столбцов последовательности $\tilde{\sigma}_m^A[j]$.

В соответствии с (53),

$$\begin{pmatrix} \tilde{\sigma}_1^A[j] \\ \tilde{\sigma}_2^A[j] \\ \tilde{\sigma}_3^A[j] \\ \tilde{\sigma}_4^A[j] \end{pmatrix} = (\tilde{\mathbf{s}}[1])^{-1} \begin{pmatrix} ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^1 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^2 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^3 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^4 \end{pmatrix} \tag{65}$$

Найдем коэффициенты $A'_m[j]$, для котороых выполняется соотношение

$$\tilde{\sigma}^A[j] = A'_1[j]\tilde{\sigma}^A[j-1] + A'_2[j]\tilde{\sigma}^A[j-2] + A'_3[j]\tilde{\sigma}^A[j-3] + A'_4[j]\tilde{\sigma}^A[j-4]. \tag{66}$$

Для этого при $j = 5 \ldots 8$ решим систему линейных уравнений

$$\sum_{m=1}^{4} A'_m[j] \begin{pmatrix} ((\mathbf{T}_{j-1-m})^{-1,T})_1^1 \\ ((\mathbf{T}_{j-1-m})^{-1,T})_1^2 \\ ((\mathbf{T}_{j-1-m})^{-1,T})_1^3 \\ ((\mathbf{T}_{j-1-m})^{-1,T})_1^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^1 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^2 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^3 \\ ((\mathbf{T}_{j-1})^{-1,T})_1^4 \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Используя явный вид матриц (63), (64) и выполняя вычисления, получим

$$\begin{pmatrix} A'_4[5] & A'_4[6] & A'_4[7] & A'_4[8] \\ A'_3[5] & A'_3[6] & A'_3[7] & A'_3[8] \\ A'_2[5] & A'_2[6] & A'_2[7] & A'_2[8] \\ A'_1[5] & A'_1[6] & A'_1[7] & A'_1[8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ A_1[2] & A_1[3] & A_1[4] & 1 \\ A_2[3] & A_2[4] & 0 & 0 \\ A_3[4] & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{68}$$

Заметим, что $A'_m[j] = A'_m[j-4]$.

По Утверждению 6 из [1], столбцы $\mathbf{U}^A$ являются решениями спектрального уравнения, поэтому последовательности $\{\sigma_m^A\}$ должны удовлетворять формуле (55). Следовательно, коэффициенты $A_m[j]$ и $A'_m[j]$ должны совпадать, и

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & A_3[4] \\ 0 & 0 & A_2[3] & A_2[4] \\ 1 & A_1[2] & A_1[3] & A_1[4] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ A_1[2] & A_1[3] & A_1[4] & 1 \\ A_2[3] & A_2[4] & 0 & 0 \\ A_3[4] & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (69)$$

отсюда получаем (60). □

6. Выводы

1. Применение формулы расщепления и метода отражений позволяет свести задачу об уголковом отражателе к задаче о нахождении краевых функций Грина на четырехлистной поверхности $\mathbb{S}$. Рассматривается поверхность, имеющая точки ветвления с координатами $(a_1, 0)$, $(0, a_2)$, $(-a_3, 0)$ и $(0, -a_4)$. Такая постановка является более общей по отношению к задаче об уголке, поскольку игнорирует геометрические симметрии задачи.

Отыскание диаграмм направленности краевых функций Грина может быть выполнено в два шага: а) находятся коэффициенты спектрального уравнения; б) решается спектральное уравнение (8). При этом в качестве решений, имеющих периоды 2π и 6π следует выбрать решения $\mathbf{U}_1^{\mathrm{up}}(1,1,1,1;\varphi)$ и $\mathbf{U}_1^{\mathrm{up}}(-1,0,0,-1;\varphi)$.

Наиболее трудная часть решения дифракционной задачи предлагаемым методом — первый шаг, т.е. подбор коэффициентов спектрального уравнения (или координатных уравнений). Эти коэффициенты содержатся в матрицах $\mathbf{C}_-^+$, $\mathbf{C}_+^-$, $\widehat{\mathbf{C}}_+^+$ и $\widehat{\mathbf{C}}_-^-$.

2. Соотношения (4), (5) и (6) приводят к тому, что коэффициенты спектрального и координатных уравнений выражаются через 12 скалярных комплексных параметров.

Первые 6 параметров позволяют построить матрицу $\mathbf{C}_-^+$. Соотношения (4) и (6) означают, что $\mathbf{C}_-^+$ представляет собой ортогональную матрицу, умноженную на $\mathrm{i}\,k_0/4$. Ортогональная матрица может рассматриваться как матрица ортогонального преобразования. Шесть свободных параметров представляют собой углы поворота базисных векторов (три степени свободы для первого вектора, две для второго и одна для третьего). Матрица $\mathbf{C}_+^-$ находится из (6).

Оставшиеся шесть параметров определяют произвольную кососимметрическую матрицу $\widehat{\mathbf{C}}_{+}^{+}$. Матрица $\widehat{\mathbf{C}}_{-}^{-}$ находится из (5).

Подставляя 12 произвольных параметров в координатные уравнения и выбирая произвольные начальные условия, находим некоторое решение $\mathbf{u}$. Это решение, вообще говоря, не удовлетворяет условию излучения и не является однозначным на поверхности $\mathbb{S}$. Именно поэтому приходится накладывать на коэффициенты уравнения определенные глобальные ограничения.

3. Предлагаемые глобальные ограничения строятся на основе асимптотик решений спектрального уравнения. Выполнение всех соотношений проверяется по единой схеме. Вычисляются четыре линейно независимых решения спектрального уравнения, и для этих решений строятся асимптотические последовательности $\{\sigma_m[j]\}$ и $\{\beta_m[j]\}$. Данные последовательности представляют собой набор коэффициентов, стоящих при доминирующих асимптотиках в соответствующих полосах.

Все глобальные ограничения имеют вид

$$f_i(\{\sigma_m[j]\}, \{\beta_m[j]\}) = 0, \quad i = 1 \dots 12, \tag{70}$$

где f_i – некоторые многочлены от конечного числа элементов последовательностей $\{\sigma_m[j]\}$ и $\{\beta_m[j]\}$. Последовательности являются бесконечными в обе стороны, однако для проверки соотношений необходимы только элементы с индексами $j = -3 \dots 4$. При практическом отыскании коэффициентов спектрального уравнения необходимо численно решать задачу отыскания нулей выражений (70).

4. Первые шесть ограничений сформулированы в Утверждении 11. Они имеют вид

$$T_1^2 = T_1^3 = T_2^3 = T_1^4 = T_2^4 = T_3^4 = 0, \tag{71}$$

где матрица $\mathbf{T}$ определяется из (47). Как следует из Утверждения 12, если выполняются соотношения (71), то спектральное уравнение сбалансированно. Если $\mathbf{U}$ – решение сбалансированного спектрального уравнения, а $\mathbf{u}$ – соответствующее ему решение координатного уравнения, то все продолжения $\mathbf{u}$ на (действительной) многолистной поверхности удовлетворяют условию излучения. Это доказано в Утверждении 9.

Сбалансированное уравнение может принадлежать к одному из нескольких классов по виду констант λ_m (они могут быть равны $+1$ и

-1). Необходимо проводить процедуру оптимизации таким образом, чтобы уравнение на каждом шаге принадлежало классу, для которого все константы λ_m равны $+1$.

5. Оставшиеся шесть ограничений представлены соотношениями (59), для которых коэффициенты $A_m[j]$ определяются в (56). В соответствии с Утверждением 13 и формулой (58), из ограничений (59) следует формула (41). В соответствии с Утверждением 11, если выполняется формула (41), то у координатных уравнений есть решение $\mathbf{u}(x, y)$, которое удовлетворяет условиям излучения на всех листах и имеет нужную структуру многолистной поверхности.

Литература

1. А. В. Шанин, *Краевые функции Грина на многолистной поверхности. Асимптотики решений координатных и спектральных уравнений.* — Зап. науч. сем. ПОМИ **342** (2007), 233–256,
2. Ф. Олвер, *Асимптотика и специальные функции.* Мир, М. (1990).

Shanin A. V. Edge Green's functions on branched surfaces. Formulation of the problem for finding unknown constants.

Current work is the continuation of [1], where the coordinate and the spectral equations were derived for finding the edge Green's functions on a branched surface having branch points of second order. The coefficients of the equations contain unknown numerical parameters. To find these parameters one has to formulate a set of restrictions, which should be obeyed by the solutions of the equations. After that, the unknown constants can be found numerically.

Current work is dedicated to the formulation of the problem for finding the unknown constants. The consideration is held for the branched surface corresponding to the problem of diffraction by an angle reflector with a gap.

As a result of using a subtle property of the spectral equation, namely a symmetry corresponding to the reciprocity, it becomes possible to construct a set of restrictions, in which the number of restrictions is equal to the number of unknown parameters.

МГУ им. М.В.Ломоносова,
физический факультет
E-mail: e-mail: andrey_shanin@mail.ru

Поступило 2 января 2008 г.