Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 354, 2008 г.

В. Б. Филиппов

ПОЛЕ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА ВБЛИЗИ ВОГНУТОЙ ГРАНИЦЫ

Комбинированный метод (см., например, [1, 2]) дает возможность получить простое представление для коротковолновой асимптотики в широком круге задач, в которых имеет место волноводное распространение. В данной работе показывается, как с помощью комбинированного метода может быть получена асимптотика для задачи с точечным источником, расположенным вблизи идеально отражающей вогнутой границы.

1. Рассмотривается случай двумерной задачи Дирихле:

$$(\Delta + k^2)u = -\delta(P - P_0), \quad P,\, P_0 \in \Omega, \tag{1}$$

$$u = 0, \quad P \in \Gamma \tag{2}$$

Вблизи источника введем полугеодезические координаты (n, s), а также растянутые координаты (σ_1, ν_1):

$$\sigma_1 = \left[\frac{k\rho(0)}{2}\right]^{1/3} \frac{s}{\rho(0)},$$

$$\nu_1 = \left[\frac{k\rho(0)}{2}\right]^{2/3} \frac{2n}{\rho(0)},$$

где $\rho(0)$ – есть радиус кривизны кривой Γ в источнике $P_0 = (0, \nu_{10})$.

Будем искать решение в области $\nu_1 = O(k^{\varepsilon})$, $\varepsilon < 1/6$ для $k \to \infty$. Будем предполагать, что координаты источники тоже удовлетворяют этим условиям.

Сначала найдем решение в промежуточной области:

$$k^{-\delta_1} < \sigma_1 < k^{\delta_2}, \quad \delta_1,\, \delta_2 < 1/6,$$

Выделим главную осцилляцию:

$$u = e^{iks} U(\sigma_1, \nu_1). \tag{3}$$

Функцию $U(\sigma_1, \nu_1)$ будем искать в виде суперпозиции волн шепчущей галереи.

Анализ точного решения показывает, что в указанной области функция $U(\sigma_1, \nu_1)$ имеет следующий вид:

$$U(\sigma_1, \nu_1) = \int\limits_L e^{i\sigma_1\zeta} \frac{V(\nu_1, \zeta)V(\nu_{10}, \zeta)}{v(\zeta)w_2(\zeta)} f(\zeta)d\zeta,$$

где

$$V(\nu_1, \zeta) = v(\zeta + \nu_1)w_2(\zeta) - v(\zeta)w_2(\zeta + \nu_1),$$

Контуром интегрирования L является прямая $(e^{-i2\pi/3}\infty, e^{i\pi/3}\infty)$, $v()$ – интеграл Эйри, $w_2()$ – вторая функция Эйри, $f()$ – пока неизвестная функция, будет определена позднее из условия сшивания с решением в окрестности источника.

2. Рассмотрим решение в окрестности источника. Введем растянутые координаты:

$$\sigma_0 = ks,$$

$$\nu_0 = kn.$$

Записывая оператор Лапласа в координатах (s, n) и переходя к растянутым координатам (σ_0, ν_0) (точка источника $P_0 = (0, \nu_{00})$), получим следующую задачу:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\sigma_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial\nu_0^2} + 1\right)u = -\delta(\sigma_0)\delta(\nu_0 - \nu_{00}), \quad u = 0, \quad \nu_0 = 0.$$

Решение задачи известно:

$$u = \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma_0\alpha}\left[e^{i\sqrt{1-\alpha^2}|\nu_0-\nu_{00}|} - e^{i\sqrt{1-\alpha^2}(\nu_0+\nu_{00})}\right]\frac{d\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}. \tag{5}$$

Контур интегрирования обходит разрез из точки $\alpha = 1$ снизу и из точки $\alpha = -1$ сверху, регулярная ветвь определяется условием $\sqrt{1-\alpha^2} > 0$ для $-1 < \alpha < 1$.

Удобно проводить сшивание с внешним разложением (3), (4) для тока $\psi(\sigma_0) = \frac{\partial u}{\partial n}$ для $n = 0$. Получаем из (5) следующее выражение для тока:

$$\psi(\sigma_0) = \frac{k}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i(\sigma_0\alpha + \sqrt{1-\alpha^2}\nu_{00})}d\alpha. \tag{6}$$

При $\sigma_0 \gg 1$ существенная область интегрирования состоит из малой окрестности точки $\alpha = 1$. Имеем в этой области следующее разложение для переменных:

$$\alpha = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{k\rho(0)}{2}\right)^{-2/3}\zeta.$$

Тогда выражение для тока приобретет следующий вид:

$$\psi(s) = \left(\frac{k\rho(0)}{2}\right)^{1/3}\frac{1}{2\pi\rho(0)}e^{iks}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma_1\zeta - \sqrt{\zeta}\nu_{10}}d\zeta. \tag{7}$$

Контур, по которому ведется интегрирование, обходит разрез, проведенный из точки $\zeta = 0$ снизу, регулярная ветвь определяется условием $\sqrt{\zeta} > 0$ для $\zeta > 0$.

3. Рассмотрим выражение для тока в области $\sigma_1 \ll 1$. Из (4) получаем:

$$\psi(s) = \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{n=0} = e^{iks}\Psi(\sigma_1) \tag{8}$$

или

$$\Psi(\sigma_1) = \frac{2}{\rho(0)}\left[\frac{k\rho(0)}{2}\right]^{2/3}\int\limits_L e^{i\sigma_1\zeta}\frac{V(\nu_{10},\zeta)}{v(\zeta)w_2(\zeta)}f(\zeta)d\zeta. \tag{9}$$

Здесь мы использовали выражение для вронскиана для функций Эйри:

$$W(v, w_2) = v(\zeta)w_2'(\zeta) - v'(\zeta)w_2(\zeta) = 1.$$

Запишем интеграл в другом виде:

$$\Psi(\sigma_1) =$$
$$= \frac{2}{\rho(0)}\left[\frac{k\rho(0)}{2}\right]^{2/3}\int\limits_L e^{i\sigma_1\zeta}\left[\frac{v(\zeta+\nu_{10})}{v(\zeta)} - \frac{w_2(\zeta+\nu_{10})}{w_2(\zeta)}\right]f(\zeta)d\zeta, \tag{10}$$

Для того чтобы получить асимптотику интеграла (10) при $\sigma_1 \ll 1$, продеформируем исходный контур L. Для этого воспользуемся асимптотикой функций Эйри для больших значений аргумента:

$$v(\zeta) = \frac{1}{2}\zeta^{-1/4}e^{-2/3\zeta^{-3/2}}\left[1 + O(\zeta^{-3/2})\right], \quad -\pi < \arg\zeta < \pi, \tag{11}$$

$$w_2(\zeta) = \zeta^{-1/4} e^{2/3\zeta^{-3/2}} \left[1 + O(\zeta^{-3/2})\right], \quad -1/3\pi < \arg\zeta < 5/3\pi. \quad (12)$$

Контур интегрирования можно продеформировать в область $|\zeta| \gg 1$. В этой области (для $\nu_{10} = O(1)$) имеем следующее выражение для фазы:

$$\frac{2}{3}(\zeta + \nu_{10})^{3/2} = \frac{2}{3}\zeta^{3/2} + \sqrt{\zeta}\nu_{10} + O(\zeta^{-1/2}). \quad (13)$$

Разделим исходный интеграл (10) на два интеграла, в соответствии с суммой в подынтегральном выражении. В первом интеграле продеформируем исходный контур L в L_1 и во втором в L_2 (контур L_1 идет по лучу $\arg\zeta < -2/3\pi$, по дуге большого радиуса, и затем по лучу $\arg\zeta < 1/3\pi$, аналогично, контур L_2 идет по лучу $\arg\zeta < -2/3\pi$, по дуге большого радиуса и затем по лучу $\arg\zeta < 2/3\pi$).

Заметим, что мы воспользовались тем фактом, что линией корней интеграла Эйри $v(\zeta)$ является линия $\arg\zeta = \pi$, а линией корней второй функции Эйри $w_2(\zeta)$ является луч $\arg\zeta = -\pi/3$.

Интегралы по нижней части контуров L_{12} (где $\mid \zeta \mid > \delta$) можно отбросить, поскольку подынтегральное выражение $F(\zeta)$ там имеет оценку:

$$\mid F(\zeta) \mid < \text{const } e^{-3|\zeta|^{3/2}} < \text{const } e^{-3\delta^{3/2}}.$$

Тогда для тока (10) получим выражение, аналогичное (7):

$$\psi(s) = \frac{2}{\rho(0)} \left[\frac{k\rho(0)}{2}\right]^{2/3} e^{iks} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma_1\zeta - \sqrt{\zeta}\nu_{10}} f(\zeta) d\zeta. \quad (14)$$

Видим, что выражения (7) и (14) совпадут, если взять $f(\zeta) = f_1$ равным:

$$f_1 = \left(\frac{k\rho(0)}{2}\right)^{-1/3} \frac{1}{4\pi}.$$

4. Рассмотрим решение в области $\sigma_1 \gg 1$, $\nu_1 = O(1)$. Из определения интеграла Эйри:

$$v(\zeta) = \frac{1}{2i}[w_1(\zeta) - w_2(\zeta)],$$

имеем тождество:

$$\frac{1}{v(\zeta)} = -\frac{1}{2i} w_2(\zeta) \sum_{m=0}^{M-1} \left[\frac{w_1(\zeta)}{w_2(\zeta)}\right]^m + \frac{1}{v(\zeta)} \left[\frac{w_1(\zeta)}{w_2(\zeta)}\right]^M. \quad (15)$$

Тогда для волнового поля (3), (4) получим следующее представление:

$$u = \sum_{m=0}^{M-1} u_m^g + u^r \tag{16}$$

или

$$u = e^{iks}\left[\sum_{m=0}^{M-1} U_m^g + U^r\right], \tag{17}$$

где

$$U_m^g(\sigma_1,\nu_1) = -2if_1 \int\limits_L e^{i\sigma_1\zeta}\frac{V(\nu_1,\zeta)V(\nu_{10},\zeta)}{w_2^2(\zeta)}\left[\frac{w_1(\zeta)}{w_2(\zeta)}\right]^m d\zeta, \tag{18}$$

$$U^r(\sigma_1,\nu_1) = f_1 \int\limits_L e^{i\sigma_1\zeta}\frac{V(\nu_1,\zeta)V(\nu_{10},\zeta)}{v(\zeta)w_2(\zeta)}\left[\frac{w_1(\zeta)}{w_2(\zeta)}\right]^M d\zeta. \tag{19}$$

В области $\sigma_1 \gg 1$, $\nu_1 = O(1)$ асимптотика интеграла $U_m^g(\sigma_1,\nu_1)$ может быть получена с помощью метода стационарной фазы. Нетрудно показать, что $u = e^{iks}U_m^g$ представляет сумму четырех геометрооптических волн, испытавших m отражений от границы Г. Максимальное число отражений M определяется следующим условием:

$$\left(\frac{\sigma_1}{M}\right)^2 \gg 1.$$

Рассмотрим интеграл $U^r(\sigma_1,\nu_1)$. Продеформируем исходный контур L следующим образом: сначала, в нижней полуплоскости, он совпадает с исходным, затем идет вверх по вертикальной прямой и пересекает ось $\mathrm{Re}(\zeta) = 0$ в точке $\zeta = -a$, затем идет по горизонтольной прямой до пересечения с контуром L. Обозначим этот контур через $\widetilde{L}$.

При этом выделится сумма N вычетов в корнях интеграла Эйри $v(\zeta)$ и мы получим следующее выражение для функции $U^r(\sigma_1,\nu_1)$:

$$U^r(\sigma_1,\nu_1) = \sum_{n=1}^{N} U_n^{norm}(\sigma_1,\nu_1) + \widetilde{U}^r(\sigma_1,\nu_1),$$

где $\widetilde{U}^r$ есть интеграл U^r по контуру $\widetilde{L}$. Положение этого контура, а следовательно и числа N, определяется из условия, чтобы подынтегральное выражение в интеграле $\widetilde{U}^r$ убывало при удалении от вещественной оси. При $\sigma_1 \gg 1$ существенная область интегрирования располагается в области $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$ and $|\zeta| \gg 1$, где функции Эйри могут быть заменены на их асимптотические представления:

$$v(-\widetilde{\zeta}) = \widetilde{\zeta}^{-1/4} \sin\xi \left[1 + O(\widetilde{\zeta}^{-3/2})\right], \tag{20}$$

$$w_1(-\widetilde{\zeta}) = \widetilde{\zeta}^{-1/4} e^{i\xi} \left[1 + O(\widetilde{\zeta}^{-3/2})\right], \tag{21}$$

$$w_2(-\widetilde{\zeta}) = \widetilde{\zeta}^{-1/4} e^{-i\xi} \left[1 + O(\widetilde{\zeta}^{-3/2})\right] \tag{22}$$

для

$$|\arg\widetilde{\zeta}| < 2\pi/3, \xi(\widetilde{\zeta}) = 2/3\widetilde{\zeta}^{3/2} + \pi/4.$$

Пусть $\zeta = -\widetilde{\zeta} = -(a + it)$ на контуре $\widetilde{L}$ в существенной области интегрирования (где $\zeta = -a$ есть точка пересечения контура $\widetilde{L}$ и вещественной оси). Легко видеть, что в существенной области интегрирования выполняется условие $|t| \ll a$.

Заменяя в интеграле $\widetilde{U}^g$ функции Эйри на их асимптотики (20)–(22) и, учитывая разложение для фазы ξ

$$\xi(\widetilde{\zeta}) = \xi(a) + i\sqrt{a}t + O(a^{-1/2})),$$

получим следующее представление для интеграла $\widetilde{U}^r$:

$$\widetilde{U}^r = \frac{f_1 \widetilde{V}(\nu_1)\widetilde{V}(\nu_{10}) e^{\theta_M(\sigma_1, a)}}{2i\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(2M\sqrt{a}-\sigma_1)t}}{\left(e^{i\xi(a)} e^{-\sqrt{a}t} - e^{-i\xi(a)} e^{\sqrt{a}t}\right) e^{-i\xi(a)} e^{\sqrt{a}t}} dt, \tag{23}$$

где

$$\widetilde{V}(\nu) = e^{\sqrt{a}\nu} - e^{-\sqrt{a}\nu},$$

$$\theta_m(\sigma, a) = -\sigma a + \frac{4ma^{3/2}}{3} + \frac{m\pi}{2}.$$

Разделим интеграл две части (для $t > 0$ и $t < 0$) и заменим разность в знаменателе на следующие выражения:

$$e^{i\xi(a)} e^{-\sqrt{a}t} - e^{-i\xi(a)} e^{\sqrt{a}t} = -e^{-i\xi(a)} e^{\sqrt{a}t} \left[1 - e^{i2\xi(a)} e^{-2\sqrt{a}t}\right]$$

и

$$e^{i\xi(a)}e^{-\sqrt{a}t} - e^{-i\xi(a)}e^{\sqrt{a}t} = e^{i\xi(a)}e^{-\sqrt{a}t}\left[1 - e^{-i2\xi(a)}e^{2\sqrt{a}t}\right].$$

Тогда для этих интегралов получим следующие выражения:

$$U_+^r(\sigma_1, \nu_1) = -\frac{f_1 \widetilde{V}(\nu_1)\widetilde{V}(\nu_{10})e^{\theta_{M+1}(\sigma_1, a)}}{2i\sqrt{a}} \int\limits_0^\infty \frac{e^{(2(M+1)\sqrt{a}-\sigma_1)t}}{1 - e^{i2\xi(a)}e^{-2\sqrt{a}t}} dt \qquad (24)$$

и

$$U_-^r(\sigma_1, \nu_1) = \frac{f_1 \widetilde{V}(\nu_1)\widetilde{V}(\nu_{10})e^{\theta_M(\sigma_1, a)}}{2i\sqrt{a}} \int\limits_{-\infty}^0 \frac{e^{(2M\sqrt{a}-\sigma_1)t}}{1 - e^{-2i\xi(a)}e^{2\sqrt{a}t}} dt. \qquad (25)$$

Подынтегральные выражения в них будет убывать при росте $|t|$, если величина a будет лежать в интервале:

$$\left[\frac{\sigma_1}{2(M+1)}\right]^2 < a < \left[\frac{\sigma_1}{2M}\right]^2.$$

Число мод N при этом будет удовлетворять неравенствам:

$$-\zeta_N < a < -\zeta_{N+1},$$

где ζ_n – n-ый корень интеграла Эйри.

Интегралы (24), (25) можно записать подобным образом. Для этого сделаем в первом интеграле замену переменной:

$$e^{-2\sqrt{a}t} = x$$

и во втором –

$$e^{2\sqrt{a}t} = x.$$

Тогда интегралы (24), (25) можно записать следующим образом:

$$U_+^r = -\frac{1}{2ia}\widetilde{V}(\nu_1)\widetilde{V}(\nu_{10})f_1\left[e^{\theta_{M+1}(\sigma_1, a)}F(\gamma, 2\xi(a)) - e^{\theta_M(\sigma_1, a)}F(\gamma+1, 2\xi(a))\right], \qquad (26)$$

$$U_-^r = \frac{1}{2ia}\widetilde{V}(\nu_1)\widetilde{V}(\nu_{10})f_1\left[e^{\theta_M(\sigma_1,a)}F(1-\gamma,2\xi(a))\right.$$
$$\left.-e^{\theta_{M+1}(\sigma_1,a)}F(2-\gamma,2\xi(a))\right], \quad (27)$$

где $\gamma = M+1-\sigma_1/(2\sqrt{a})$,

$$F(\gamma,\beta) = \int\limits_0^1 \frac{x^{\gamma-1}}{1-2cos(\beta)x+x^2}dx.$$

Таким образом мы можем сделать вывод, что в промежуточной области вблизи границы (для $\nu_1 = O(1)$), решение задачи (1), (2) может быть представлено в виде:

$$u = \sum_{m=0}^{M-1} u_m^{\text{geom}} + \sum_{n=1}^{N} u_n^{\text{norm}} + u^r, \quad (28)$$

где первая член представляет собой сумму геометро-оптических волн, второй – сумму нормальных мод, и третий – остаток (выражение типа (24) или (26). Можно показать, что выражение (28) может быть продолжено вдоль границы на произвольное расстояние, поскольку каждый член в (28) может соответствующим образом быть обобщен.

Заметим, что аналогичное представление может быть получено для задачи Неймана и задачи с импедансной границей.

Литература

1. V. B. Philippov, *Diffraction by a nonplanar screen.* — Wave Motion **3** (1981), 78–81.
2. В. Б. Филиппов, *Об одном методе расчета поля точечного источника в волноводе.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **99** (1980), 115–130.

Philippov V. B. Point source field near concave boundary.

By hybrid method new representation for field emitted by short-wave source placed near a concave boundary is received. It is conceded a Dirichlet problem. Received representation submit the effective algorithm for numerical experiments.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: filippov@pdmi.ras.ru

Поступило 19 мая 2008 г.