Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 354, 2008 г.

Л. А. Молотков

ЭФФЕКТИВНАЯ МОДЕЛЬ ПОРИСТО-ЖИДКОЙ СРЕДЫ

Предлагаемая работа посвящена исследованию распространения волн в тонкослоистой среде, в которой чередуютя пористые слои Био и жидкие слои. Для изучения распространения волн строится специальная эффективная модель этой среды. Подобные эффективные модели были построены для ряда сред с чередующимися тонкими слоями [1–3] методом матричного осреднения. При использовании этого метода делается предположение о бесконечном уменьшении толщин чередующихся слоев при постоянном отношении толщин этих слоев.

Построенная эффективная модель для рассматривемой среды является однородной и описывается уравнениями закона Гука и уравнениями сплошной среды. На основании этих уравнений устанавливаются выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий в эффективной модели и для вектора, определяющего поток энергий. С помощью интегральных преобразований решаются уравнения эффективной модели и строится волновое поле. Анализ этого поля показывает, что в эффективной модели распространяются три объемных волны: волна с передним фронтом и две волны с "треугольными фронтами". Для этих волн строятся фронты в случае точечного источника и выводятся выражения или уравнения, определяющие скорости волн вдоль оси.

В частном случае, когда толщины жидких слоев устремлены к нулю, а условия на границах сохраняются один из треугольных фронтов превращается в вогнутый фронт, а вдоль слоев распространяется медленная волны. Такая волна представляет особый интерес [4], так как она образуется при гидравлическом разрыве и дает информацию о слоях. Рассматриваемая эффективная модель сравнивается с моделью среды в случае чередования упругих и жидких слоев [1]. Качественное различие между моделями состоит в том, что эффективная модель пористо-жидкой среды имеет два "треугольных фронта", а

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, гранты 08-05-00285, 06-05-65301 .

модель упруго-жидкой среды – один “треугольный фронт”. Последняя эффективная модель получила хорошее экспериментальное подтверждение в работе [5], и такое подтверждение следует ожидать и при изучении модели пористо-жидкой среды.

В целом работа пополняет группу эффективных моделей, описывающих слоистые упругие, жидкие и пористые среды [2]. Эти эффективные модели были построены для комплексного исследования волновых процессов в природных резервуарах, содержащих, в частности, нефть и газ.

§1. Слоистая пористо-жидкая среда

Пусть задана двумерная периодическая среда $0 \leqslant z \leqslant \widetilde{H}$, состоящая из чередующихся пористых слоев Био с толщиной h_1 и жидких слоев с толщиной h_2 (рис. 1). Жидкие и пористые слои предполагаются однородными и изотропными. Пористые слои описываются уравнениями [6, 7]

$$
\begin{aligned}
\tau_{xx1} &= H\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + B\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + C\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\right),\\
\tau_{zz1} &= B\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + H\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + C\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\right),\\
-p_1 &= C\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}\right) + M\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial w_{z1}}{\partial z}\right),\\
\tau_{xz1} &= L\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial z} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial x}\right),\\
&\frac{\partial \tau_{xx1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial z} = \rho_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \tau_{xz1}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z} = \rho_1\frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_{z1}}{\partial t^2},\\
-\frac{\partial p_1}{\partial x} &= \rho_f\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p_1}{\partial z} = \rho_f\frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2 w_{z1}}{\partial t^2},
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

в которых u_{x1}, u_{z1} – смещения в твердой фазе, τ_{xx1}, τ_{zz1}, τ_{xz1} – полные напряжения, p_1 – давление, w_{x1}, w_{z1} являются относительными смещениями жидкой фазы и представляются равенствами

$$
w_{x1} = \varepsilon(U_{x1} - u_{x1}), \quad w_{z1} = \varepsilon(U_{z1} - u_{z1}), \tag{1.2}
$$

где ε – пористость среды Био, U_{x1} и U_{z1} – смещения в жидкой фазе. Среды Био характеризуются средней плотностью ρ_1, плотностью жидкой фазы ρ_f и коэффициентом

$$m = \rho_f \widetilde{\alpha}/\varepsilon, \tag{1.3}$$

определяющим изгиб пор. Также среды Био определяются модулями P, H, B, C, M и L, связанными равенством

$$P = H + 2L. \tag{1.4}$$

Коэффициенты, входящие в уравнения (1.1), образуют две положительно определенные матрицы

$$\begin{pmatrix} P & H & C & 0 \\ H & P & C & 0 \\ C & C & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & m \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

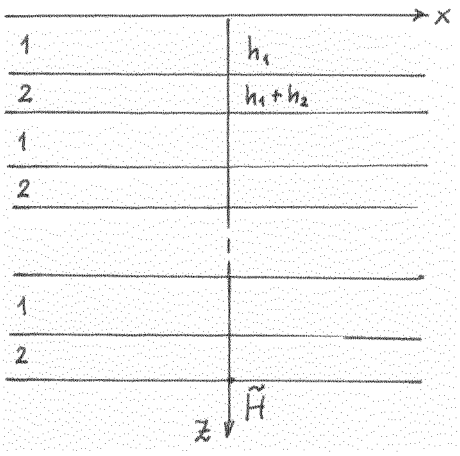

Рис. 1.

Жидкие слои описываются уравнениями

$$\begin{gathered} -p_2 = \lambda_2\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z2}}{\partial z}\right), \\ -\frac{\partial p_2}{\partial x} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p_2}{\partial z} = \rho_2 \frac{\partial^2 u_{z2}}{\partial t^2}, \end{gathered} \tag{1.6}$$

в которых u_{x2}, u_{z2} – смещения в жидкости, p_2 – давление, ρ_2 – плотность и λ_2 – модуль. На границах между жидкими и пористыми слоями выполняются условия

$$u_{z1} = u_{z2}, \quad U_{z1} = u_{z2}, \quad \tau_{xz1} = 0, \quad \tau_{zz1} = -p_2. \tag{1.7}$$

С учетом второго равенства (1.2) граничные условия (1.7) заменяются на условия

$$u_{z1} = u_{z2}, \quad w_{z1} = 0, \quad \tau_{xz1} = 0, \quad \tau_{zz1} = -p_2. \tag{1.8}$$

Внешние границы $z = 0$ и $z = \widetilde{H}$ будем рассматривать свободными от напряжений и давлений. Будем предполагать, что вся среда возбуждается некоторым линейным источником, который может быть точечным или распределенным и расположенным в любом из слоев или на границе. Для этого источника с помощью матричного метода [8] может быть построено волновое поле. Явные выражения для этого поля мы не будем выписывать, но в этом поле мы совершим предельный переход.

§2. Вывод уравнений эффективной модели

Предельный переход в волновом поле выполняется при условиях

$$\begin{gathered} h_1 \to 0, \quad h_2 \to 0, \quad \widetilde{H} = \mathrm{const}, \\ \theta = \frac{h_2}{h_1 + h_2} = \mathrm{const}, \quad 1 - \theta = \frac{h_1}{h_1 + h_2} = \mathrm{const}\,. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Строгое осуществление такого предельного перехода было проведено в работе [8] методом матричного осреднения. На основании этого исследования можно сделать ряд предположений, облегчающих осуществление предельного перехода и оправданных в работе [9]. Первое предположение состоит в том, что условия на внутренних границах (1.8) можно считать выполняющимися во всей среде. Используя это предположение, положим $\tau_{xz1} = 0$ и $w_{z1} = 0$ во всех уравнениях (1.1). Второе предположение позволяет отбросить те уравнения (1.1), в которые входят производные по z от функций, разрывных на границах. Такими производными являются $\partial u_{x1}/\partial z$ и $\partial p_1/\partial z$, и четвертое и восьмое уравнения (1.1) следует отбросить. В результате уравнения

(1.1) заменяются равенствами

$$
\begin{aligned}
\tau_{xx1} &= H\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + B\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + C\frac{\partial w_{x1}}{\partial x},\\
\tau_{zz1} &= B\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + H\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + C\frac{\partial w_{x1}}{\partial x},\\
-p_1 &= C\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial u_{z1}}{\partial z}\right) + M\frac{\partial w_{x1}}{\partial x};
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau_{xx1}}{\partial x} = \rho_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t^2},\\
&\frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z} = \rho_1\frac{\partial^2 u_{z1}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p_1}{\partial x} = \rho_f\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t^2}.
\end{aligned}
\tag{2.3}
$$

Третье предположение сводится к установлению производных по z от непрерывных вдоль оси z функций u_z и τ_{zz}

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_z}{\partial z} &= (1-\theta)\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} + \theta\frac{\partial u_{z2}}{\partial z},\\
\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= (1-\theta)\frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z} + \theta\frac{\partial(-p_2)}{\partial z}.
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

Из уравнений (1.6), (2.2)–(2.4) необходимо исключить производные

$$
\frac{\partial u_{z1}}{\partial z}, \quad \frac{\partial u_{z2}}{\partial z}, \quad \frac{\partial \tau_{zz1}}{\partial z}, \quad \frac{\partial p_2}{\partial z}
\tag{2.5}
$$

и в полученной системе уравнений учесть равенства

$$
\tau_{zz1} = -p_2 = \tau_{zz}, \quad u_{z1} = u_{z2} = u_z,
\tag{2.6}
$$

следующие из первого предположения.

Чтобы учесть равенства (2.4) и исключить производные (2.5), решим систему уравнений закона Гука (2.2) относительно производных смещений и получим уравнения

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta}\Big[(HM-C^2)\tau_{xx1} + (C^2-BM)\tau_{zz} + C(H-B)p_1\Big],\\
\frac{\partial u_{z1}}{\partial z} &= \frac{1}{\Delta}\Big[(C^2-BM)\tau_{xx1} + (HM-C^2)\tau_{zz} + C(H-B)p_1\Big],\\
\frac{\partial w_{x1}}{\partial x} &= \frac{1}{\Delta}\Big[-C(H-B)\tau_{xx1} - C(H-B)\tau_{zz} - (H^2-B^2)p_1\Big],
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

где

$$\Delta = (H^2 - B^2)M - 2C^2(H - B) = (H - B)(HM + BM - 2C^2). \quad (2.8)$$

Из первого уравнения (1.6) выразим

$$\frac{\partial u_{z2}}{\partial z} = -\left(\frac{p_2}{\lambda_2} + \frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right). \quad (2.9)$$

После подстановки в равенства (2.4) уравнения (2.9), вторых уравнений (2.7), (2.3) и третьего уравнения (1.6) получим

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_z}{\partial z} &= \frac{1-\theta}{\Delta}\Big[(C^2 - BM)\tau_{xx1} + (HM - C^2)\tau_{zz} + C(H-B)p_1\Big] \\
&+\theta\left(\frac{\tau_{zz}}{\lambda_2} - \frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right), \\
\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \big[(1-\theta)\rho_1 + \theta\rho_2\big]\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}.
\end{aligned} \quad (2.10)$$

Первое уравнение (2.10) полезно заменить соотношением

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u_z}{\partial z} + \theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} = \frac{1-\theta}{\Delta}(C^2 - BM)\tau_{xx1} \\
&+\left[\frac{\theta}{\lambda_2} + \frac{(1-\theta)}{\Delta}(HM - C^2)\right]\tau_{zz} + \frac{1-\theta}{\Delta}C(H-B)p_1.
\end{aligned} \quad (2.11)$$

Решая систему, состоящую из первого, третьего уравнений (2.7) и уравнения (2.11), получим новую систему уравнений Гука

$$\begin{aligned}
\tau_{xx1} &= \frac{1}{d}\left\{\left[H + \frac{\theta(H^2 - B^2)}{\lambda_2(1-\theta)}\right]\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \frac{B}{1-\theta}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)\right. \\
&\quad\left. + C\left[1 + \frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right]\frac{\partial w_{x1}}{\partial x}\right\}, \\
\tau_{zz} &= \frac{1}{d}\left\{B\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \frac{H}{1-\theta}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right) + C\frac{\partial w_{x1}}{\partial x}\right\}, \\
-p &= \frac{1}{d}\left\{C\left[1 + \frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right]\frac{\partial u_{x1}}{\partial x} + \frac{C}{1-\theta}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)\right. \\
&\quad\left. + \left[M + \frac{\theta(HM - C^2)}{\lambda_2(1-\theta)}\right]\frac{\partial w_{x1}}{\partial x}\right\},
\end{aligned} \quad (2.12)$$

где

$$d = 1 + \frac{\theta H}{\lambda_2(1-\theta)}. \tag{2.13}$$

К уравнениям (2.12) следует присоединить четыре уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} = \overline{\rho}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}, \quad \overline{\rho} = \rho_1(1-\theta) + \rho_2\theta, \\
&\frac{\partial \tau_{xx1}}{\partial x} = \rho_1\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + \rho_f\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t^2}, \\
&\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial x} = \rho_2\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p_1}{\partial x} = \rho_f\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t^2}.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Семь уравнений (2.12) и (2.14) относительно семи величин u_{x1}, u_{x2}, u_z, w_{x1}, τ_{xx1}, u_{zz} и $-p$ описывают рассматриваемую среду после предельного перехода и являются уравнениями эффективной модели этой среды. Область применимости этой эффективной модели, как и подобных моделей, определяется неравенством

$$h \ll \widetilde{\lambda}, \tag{2.15}$$

в котором h – толщина периода, а $\widetilde{\lambda}$ – преимущественная длина волны. Эффективная модель является трехфазной. Смещение u_z и напряжение τ_{zz} являются общими для трех фаз. Упругая фаза дополнительно характеризуется смещением u_{x1} и напряжением τ_{xx1}. Жидкая фаза пористых слоев определяется относительным смещением w_{x1} и давлением p_1, а жидкая фаза, связанная с жидким слоем, – смещением u_{x2}.

§3. Энергетические исследования

Для проведения энергетических исследований волнового поля в эффективной модели помножим обе части четырех уравнений (2.14) соответственно на

$$\frac{\partial u_z}{\partial t}, \quad (1-\theta)\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}, \quad \theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}, \quad (1-\theta)\frac{\partial w_{x1}}{\partial t} \tag{3.1}$$

и после ряда преобразований получим уравнения

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{zz}\frac{\partial u_z}{\partial t}\right) = \frac{\overline{\rho}}{2}\;\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2 + \tau_{zz}\frac{\partial^2 u_z}{\partial t \partial z}, \\
&(1-\theta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{xx1}\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right) = \frac{(1-\theta)\rho_1}{2}\;\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right)^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+(1-\theta)\rho_f \frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t^2}\ \frac{\partial u_{x1}}{\partial t}+(1-\theta)\tau_{xx1}\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t\partial x},\\
&\theta\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_{zz}\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)=\frac{\theta\rho_2}{2}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2+\theta\tau_{zz}\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial t\partial x},\\
&(1-\theta)\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\frac{\partial w_{x1}}{\partial t}\right)=\frac{m(1-\theta)}{2}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial t}\right)^2\\
&+(1-\theta)\rho_f\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t^2}\ \frac{\partial w_{x1}}{\partial t}-(1-\theta)\rho\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t\partial x}.
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Сложим почленно уравнения (3.2) и придем к уравнению

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left[(1-\theta)\tau_{xx1}\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}+\theta\tau_{zz}\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}-(1-\theta)p\frac{\partial w_{x1}}{\partial t}\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(\tau_{zz}\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)\\
&=\frac{1}{2}\ \frac{\partial}{\partial t}\left[(1-\theta)\rho_1\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right)^2+(1-\theta)m\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial t}\right)^2\right.\\
&\left.+2(1-\theta)\rho_f\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\ \frac{\partial w_{x1}}{\partial t}\right)+\overline{\rho}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2+\theta\rho_2\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2\right]\\
&+(1-\theta)\tau_{xx1}\frac{\partial u_{x1}}{\partial t\partial x}-(1-\theta)\frac{\partial w_{x1}}{\partial t\partial x}p+\tau_{zz}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right),
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

которое представляет собой уравнений энергетического баланса

$$
\frac{\partial p_x}{\partial x}+\frac{\partial p_z}{\partial z}=\frac{\partial W_k}{\partial t}+\frac{\partial W_p}{\partial t}.
\tag{3.4}
$$

В равенстве (3.4)

$$
\begin{aligned}
&p_x=(1-\theta)\tau_{xx1}\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}+\theta\tau_{zz}\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}-(1-\theta)p\frac{\partial w_{x1}}{\partial t},\\
&p_z=\tau_{zz}\frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

– потоки энергии вдоль осей x и z.

$$
\begin{aligned}
&W_k=\frac{1-\theta}{2}\rho_1\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\right)^2+\frac{(1-\theta)m}{2}\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial t}\right)^2\\
&+(1-\theta)\rho_f\frac{\partial u_{x1}}{\partial t}\ \frac{\partial w_{x1}}{\partial t}+\frac{\overline{\rho}}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial t}\right)^2+\frac{\theta\rho_2}{2}\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial t}\right)^2
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

– плотность кинетической энергии. Сумму трех последних членов в (3.3) обозначим через $\partial W_p/\partial t$ и подставим в нее выражения (2.12) для τ_{xx1}, τ_{zz} и $-p$. В результате получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial W_p}{\partial t} &= \frac{(1-\theta)}{d}\left[H+\frac{\theta(H^2-B^2)}{\lambda_2(1-\theta)}\right]\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t\partial x}\ \frac{\partial u_{x1}}{\partial x}+\frac{B}{d}\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t\partial x}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)\\ &+\frac{C}{d}(1-\theta)\left[1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right]\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial t\partial x}\ \frac{\partial w_{x1}}{\partial x}+\frac{B}{d}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\\ &+\frac{H}{d(1-\theta)}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)+\frac{C}{d}\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)\\ &\times\frac{\partial w_{x1}}{\partial t}+\frac{C}{d}(1-\theta)\left[1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right]\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t\partial x}\ \frac{\partial u_{x1}}{\partial x}+\frac{C}{d}\ \frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t\partial x}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)\\ &+\frac{(1-\theta)}{d}\left[M+\frac{\theta(HM-C^2)}{\lambda_2(1-\theta)}\right]\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial t\partial x}\ \frac{\partial w_{x1}}{\partial x}. \qquad (3.7)\end{aligned}$$

После преобразования выражения (3.7) придем к формуле

$$\begin{aligned}W_p = \frac{1}{d}\Bigg[&\frac{1-\theta}{2}\left(H+\frac{\theta(H^2-B^2)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\right)^2+\frac{H}{2(1-\theta)}\left(\frac{\partial z}{\partial z}+\theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)^2\\ &+\frac{(1-\theta)}{2}\left(M+\frac{\theta(HM-C^2)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial x}\right)^2+B\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial z}+\theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)\\ &+C(1-\theta)\left(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\ \frac{\partial w_{x1}}{\partial x}+C\frac{\partial w_{x1}}{\partial x}\left(\frac{\partial u_z}{\partial z}+\theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}\right)\Bigg].\end{aligned} \qquad (3.8)$$

Величина W_p, входящая в уравнение (3.4), является плотностью потенциальной энергии и представляется положительно определенной формой относительно аргументов

$$\frac{\partial u_{x1}}{\partial x},\quad \frac{\partial w_{x1}}{\partial x},\quad \frac{\partial u_z}{\partial z}+\theta\frac{\partial u_{x2}}{\partial x}. \qquad (3.9)$$

Чтобы оправдать второе утверждение, докажем, что соответствующая матрица

$$\begin{vmatrix} H(1-\theta)+\frac{\theta}{\lambda_2}(H^2-B^2) & B & C\left[(1-\theta)+\frac{\theta}{\lambda_2}(H-B)\right]\\ B & \frac{H}{1-\theta} & C\\ C\left[(1-\theta)+\frac{\theta}{\lambda_2}(H-B)\right] & C & M(1-\theta)+\frac{\theta}{\lambda_2}(HM-C^2)\end{vmatrix} \qquad (3.10)$$

является положительно определенной. Для доказательства покажем, что все главные определители матрицы (3.10) являются положительными, так как первая матрица (1.5) является положительно определенной.

В заключение рассмотрим выражение (3.8) в предельных случаях. При $\theta = 0$ приходим к соотношению

$$\begin{aligned} W_p(0) = \frac{H}{2}\left[\left(\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{M}{2}\left(\frac{\partial w_{x1}}{\partial x}\right)^2 \\ + B\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\,\frac{\partial u_z}{\partial z} + C\frac{\partial u_{x1}}{\partial x}\,\frac{\partial w_{x1}}{\partial x} + C\frac{\partial w_{x1}}{\partial x}\,\frac{\partial u_z}{\partial z}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

соответствующему плотности потенциальной энергии пористой среды Био. При $\theta \to 1$ величина d, согласно формуле (2.13), представляется приближенным равенством

$$d \approx \frac{H}{(1-\theta)\lambda_2}. \tag{3.12}$$

В пределе при $\theta \to 1$ получаем соотношение

$$W_p(1) = \lambda_2\left(\frac{\partial u_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2, \tag{3.13}$$

определяющее плотность потенциальной энергии жидкой среды.

§4. Решение уравнений эффективной модели

Исключим из уравнений (2.12) и (2.14) напряжения τ_{xx1}, τ_{zz} и давление p и получим для эффективной модели уравнения Ламе

$$
\begin{aligned}
&\left[\left(H+\frac{\theta(H^2-B^2)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-d\rho_1\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u_{x1}+\frac{B}{1-\theta}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+\theta\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x^2}\right)\\
&\quad+\left[C\left(1+\frac{\theta(H-\theta)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-d\rho_f\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]w_{x1}=0,\\
&B\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x\partial z}+\left(\frac{H}{1-\theta}\ \frac{\partial^2}{\partial z^2}-d\overline{\rho}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_z+\frac{H\theta}{1-\theta}\ \frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x\partial z}+C\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial x\partial z}=0,\\
&B\frac{\partial^2 u_{x1}}{\partial x^2}+\frac{H}{1-\theta}\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+\left(\frac{H\theta}{1-\theta}\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}-d\rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u_{x2}+C\frac{\partial^2 w_{x1}}{\partial x^2}=0,\\
&\left[C\left(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-d\rho_f\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u_{x1}+\frac{C}{1-\theta}\left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x\partial z}+\theta\frac{\partial^2 u_{x2}}{\partial x^2}\right)\\
&\quad+\left[\left(M+\frac{\theta(HM-C^2)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}-dm\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]w_{x1}=0.
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

Решение уравнений (4.1) представляется равенствами

$$
\begin{aligned}
u_{x1}&=\int\limits_0^\infty\frac{\sin kx dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[U_{x1}^{(+)}e^{kz\alpha}+U_{x1}^{(-)}e^{-kz\alpha}\right]e^{kt\eta}d\eta,\\
w_{x1}&=\int\limits_0^\infty\frac{\sin kx dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[W_{x1}^{(+)}e^{kz\alpha}+W_{x1}^{(-)}e^{-kz\alpha}\right]e^{kt\eta}d\eta,\\
u_z&=\int\limits_0^\infty\frac{\cos kx dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[U_{z1}^{(+)}e^{kz\alpha}+U_{z1}^{(-)}e^{-kz\alpha}\right]e^{kt\eta}d\eta,\\
u_{x2}&=\int\limits_0^\infty\frac{\sin kx dk}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\left[U_{x2}^{(+)}e^{kz\alpha}+U_{x2}^{(-)}e^{-kz\alpha}\right]e^{kt\eta}d\eta,
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

После подстановки формул (4.2) в уравнения (4.1) приходим к соотношениям

$$
\begin{aligned}
&\left[H+\frac{\theta(H^2-B^2)}{\lambda_2(1-\theta)}+d\rho_1\eta^2\right]U_{x1}^{(+)}+\frac{B}{1-\theta}(\alpha U_z^{(+)}+\theta U_{x1}^{(+)})\\
&+\biggl[C\biggl(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}+d\rho_f\eta^2\biggr]W_{x1}^{(+)}=0,\\
&B\alpha U_{x1}^{(+)}+\left(\frac{H\alpha^2}{1-\theta}-d\overline{\rho}\eta^2\right)U_z^{(+)}+\frac{H\theta\alpha}{1-\theta}U_{x2}^{(+)}+C\alpha W_{x1}^{(+)}=0,\\
&BU_{x1}^{(+)}+\frac{H\alpha}{1-\theta}U_z^{(+)}+\left(\frac{H\theta}{1-\theta}+d\rho_2\eta^2\right)U_{x2}^{(+)}+CW_{x1}^{(+)}=0,\\
&\left[C\left(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)+d\rho_f\eta^2\right]U_{x1}^{(+)}+\frac{C}{1-\theta}(\alpha U_z^{(+)}+\theta U_{x2}^{(+)})\\
&+\left[M+\frac{\theta(HM-C^2)}{\lambda_2(1-\theta)}+dm\eta^2\right]W_{x1}^{(+)}=0.
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Система уравнений (4.3) имеет ненулевое решение при условии

$$
\begin{vmatrix}
H+\frac{\theta(H^2-B^2)}{\lambda_2(1-\theta)}+d\rho_1\eta^2 & \frac{B\alpha}{1-\theta} & \frac{B\theta}{1-\theta} & C\left(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)+d\rho_f\eta^2\\
B\alpha & \frac{H\alpha^2}{1-\theta}-d\overline{\rho}\eta^2 & \frac{H\theta\alpha}{1-\theta} & C\alpha\\
B & \frac{H\alpha}{1-\theta} & \frac{H\theta}{1-\theta}+d\rho_2\eta^2 & C\\
C\left(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)+d\rho_f\eta^2 & \frac{C\alpha}{1-\theta} & \frac{C\theta}{1-\theta} & M+\frac{\theta(HM-C^2)}{\lambda_2(1-\theta)}+dm\eta^2
\end{vmatrix}=0. \tag{4.4}
$$

Условие (4.4) определяет характеристическую функцию α, входящую в формулы (4.2). Выразим эту функцию из соотношения (4.4). После преобразований во вторых и третьих строках и столбцах придем к равенству

$$
\begin{vmatrix}
H+\frac{\theta(H^2-B^2)}{\lambda_2(1-\theta)}+d\rho_1\eta^2 & \frac{B}{1-\theta} & \frac{B\theta}{1-\theta} & C\left(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)+d\rho_f\eta^2\\
0 & \overline{\rho} & \rho_2\alpha^2 & 0\\
B & \frac{H}{1-\theta} & \frac{H\theta}{1-\theta}+d\rho_2\eta^2 & C\\
C\left(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)+d\rho_f\eta^2 & \frac{C}{1-\theta} & \frac{C\theta}{1-\theta} & M+\frac{\theta(HM-C^2)}{\lambda_2(1-\theta)}+dm\eta^2
\end{vmatrix}=0. \tag{4.5}
$$

Разлагая определитель (4.5) по элементам второй строки, получаем соотношение

$$
\alpha^2=\frac{\overline{\rho}(1-\theta)A}{p_2D}, \tag{4.6}
$$

где

$$A = \begin{vmatrix} H+\frac{\theta(H^2-B^2)}{\lambda_2(1-\theta)}+d\rho_1\eta^2 & \frac{B\theta}{1-\theta} & C\Big(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\Big)+d\rho_f\eta^2 \\ B & \frac{H\theta}{1-\theta}+d\rho_2\eta^2 & C \\ C\Big(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\Big)+d\rho_f\eta^2 & \frac{C\theta}{1-\theta} & M+\frac{\theta(HM-C^2)}{\lambda_2(1-\theta)}+dm\eta^2 \end{vmatrix}, \tag{4.7}$$

$$D = \begin{vmatrix} H+\frac{\theta(H^2-B^2)}{\lambda_2(1-\theta)}+d\rho_1\eta^2 & B & C\Big(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\Big)+d\rho_f\eta^2 \\ B & H & C \\ C\Big(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\Big)+d\rho_f\eta^2 & C & M+\frac{\theta(HM-C^2)}{\lambda_2(1-\theta)}+dm\eta^2 \end{vmatrix}.$$

После вычисления определителей запишем соотношение

$$\alpha^2 = \frac{\overline{\rho}}{\rho_2\lambda_2}\,\frac{A_1\eta^6+A_2\eta^4+A_3\eta^2+A_4}{A_5\eta^4+A_6\eta^2+A_7}, \tag{4.8}$$

в котором

$$\begin{aligned}
&A_1 = \rho_2\lambda_2 d(1-\theta)(\rho_1 m-\rho_f^2),\\
&A_2 = \lambda_2\theta H(\rho_1 m-\rho_f^2)+\rho_2\theta[(H^2-B^2)m+(HM-C^2)\rho_1-2\rho_f C(H-B)]\\
&\quad +\lambda_2\rho_2(1-\theta)(Hm+M\rho_1-2C\rho_f),\\
&A_3 = \lambda_2\theta[(H^2-B^2)m+(HM-C^2)\rho_1-2\rho_f C(H-B)]\\
&\quad +\rho_2\theta\Delta+\lambda_2\rho_2(1-\theta)(HM-C^2),\\
&A_4 = \lambda_2\theta\Delta,\\
&A_5 = H(\rho_1 m-\rho_f^2),\\
&A_6 = (H^2-B^2)m+(HM-C^2)\rho_1-2(H-B)C\rho_f,\\
&A_7 = \Delta.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Характеристическая функция полностью определяется эффективной моделью и не зависит от характера и расположения источника. Входящие в равенства (4.2) функции $U_{x1}^{(+)}$, $U_{x1}^{(-)}$, $W_{x1}^{(+)}$, $W_{x1}^{(-)}$, $U_z^{(+)}$, $U_z^{(-)}$, $U_{x2}^{(+)}$ и $U_{x2}^{(-)}$ могут быть установлены с учетом источника.

§5. Фронта от точечного источника

Согласно работам [10, 2], характеристическая функция $\alpha(\eta)$ определяет фронты волн, возбужденных точечным источником в эффективной модели. Рассмотрим участки мнимой оси $\eta = i\tau$, где $\alpha(\eta)$ является чисто мнимой, $\alpha = i\overline{\alpha}$. На этих участках фронты от точечного источника, расположенного в начале координат, определяются [9, 2] параметрическими равенствами

$$x = t\left(\tau - \frac{\overline{\alpha}(\tau)}{\overline{\alpha}\,'(\tau)}\right), \quad z = \frac{t}{\overline{\alpha}\,'(\tau)}, \tag{5.1}$$

а функция $\overline{\alpha}(\tau)$ связана с углом (n, z) между нормалью к фронту и осью z соотношением

$$\overline{\alpha}(\tau) = \operatorname{ctg}(n, z). \tag{5.2}$$

Для исследования полезно перейти от характеристической функции $\alpha(\eta)$ к $\overline{\alpha}(\tau)$ и записать соотношение

$$\overline{\alpha}^{\,2} = \frac{\overline{\rho}}{\lambda_2\rho_2}\,\frac{A_1\tau^6 - A_2\tau^4 + A_3\tau^2 - A_4}{A_5\tau^4 - A_6\tau^2 + A_7}. \tag{5.3}$$

Правая часть соотношения (5.3) представляет собой отношение двух полиномов относительно τ^2. Чтобы доказать, что эти полиномы имеют положительные корни, обратимся к условию (4.4) и после несложных преобразований заменим его равносильным соотношением

$$\begin{vmatrix} H+\frac{\theta(H^2-B^2)}{\lambda_2(1-\theta)}-d\rho_1\tau^2 & B\overline{\alpha} & B & C\left(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)-d\rho_f\tau^2 \\ B\overline{\alpha} & H\overline{\alpha}^2-d\overline{\rho}(1-\theta)\tau^2 & H\overline{\alpha} & C\overline{\alpha} \\ B & H\overline{\alpha} & H-\frac{d\rho_2(1-\theta)\tau^2}{\theta} & C \\ C\left(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right)-d\rho_f\tau^2 & C\overline{\alpha} & C & M+\frac{\theta(HM-C^2)}{\lambda_2(1-\theta)}-dm\tau^2 \end{vmatrix} = 0. \tag{5.4}$$

Равенство (5.4) можно рассматривать как уравнение для определения характеристических чисел τ^2 в случае одновременного приведения к диагональному виду двух матриц

$$\begin{vmatrix} d\rho_1 & 0 & 0 & d\rho_f \\ 0 & d\overline{\rho}(1-\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d\overline{\rho}_2(1-\theta)/\theta & 0 \\ d\rho_f & 0 & 0 & dm \end{vmatrix},$$

$$\left| \begin{array}{cccc} H+\frac{\theta(H^2-B^2)}{\lambda_2(1-\theta)} & B\overline{\alpha} & B & C\left(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right) \\ B\overline{\alpha} & H\overline{\alpha}^2 & H\overline{\alpha} & C\overline{\alpha} \\ B & H\overline{\alpha} & H & C \\ C\left(1+\frac{\theta(H-B)}{\lambda_2(1-\theta)}\right) & C\overline{\alpha} & C & M+\frac{\theta(HM-C^2)}{\lambda_2(1-\theta)} \end{array} \right|. \tag{5.5}$$

Согласно теореме [11], эти характеристические числа являются положительными, если обе матрицы симметричные, а одна из них является также и положительно определенной матрицей. В нашем случае обе матрицы при вещественных $\overline{\alpha}$ являются симметричными, при этом первая из них – положительно определенная, а вторая – неотрицательно определенная. Так как условия указанной теоремы выполнены, то при всех вещественных $\overline{\alpha}$ величина τ^2, входящая в соотношение (5.3), является положительной и оба полинома имеют только положительные корни τ^2.

Разлагая эти полиномы в произведения, получим соотношение

$$\overline{\alpha} = \sqrt{\frac{\overline{\rho} A_1(\tau^2 - v_1^2)(\tau^2 - v_2^2)(\tau^2 - v_3^2)}{A_5 \lambda_2 \rho_2 (\tau^2 - \overline{v}_1^2)(\tau^2 - \overline{v}_2^2)}}, \tag{5.6}$$

в котором v_1^2, v_2^2, v_3^2 – корни полинома в числителе, а $\overline{v}_1^2$ и $\overline{v}_2^2$ – корни полинома в знаменателе. Относительно соотношения между корнями сделаем предположение

$$v_1^2 > \overline{v}_1^2 > v_2^2 > \overline{v}_2^2 > v_3^2. \tag{5.7}$$

В этом случае график функции $\overline{\alpha}(\tau)$ при $\tau > 0$ представляется на рис 2.

Этот график может быть продолжен симметрично относительно обеих координатных осей на всю плоскость (x, z). Все возможные ветви графика функции (5.6) на плоскости (x, z) могут быть пересечены произвольной прямой

$$\overline{\alpha} = a\tau + b \tag{5.8}$$

не более чем в 6 точках. Это ограничение связано с тем, что после подстановки равенства (5.8) в уравнение (5.6) получается уравнение шестого порядка, которое не может иметь больше шести корней. Если же не будут выполняться неравенства (5.7), то графики $\overline{\alpha}(\tau)$ будут иметь максимумы и минимумы, и число пересечений ветвей графика

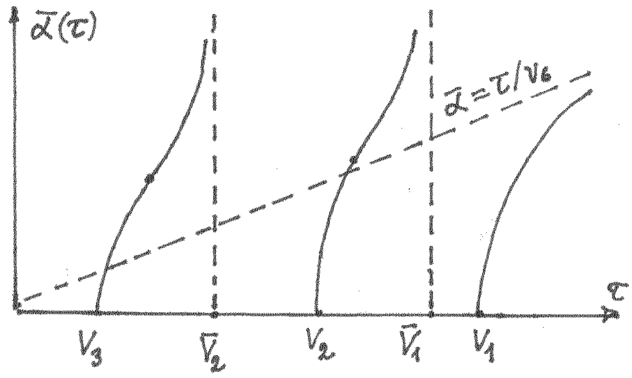

Рис. 2.

с произвольной прямой (5.8) будет превышать 6, что невозможно. Таким образом, рассматриваемые корни удовлетворяют условиям (5.7).

Перейдем теперь к построению фронтов от точечного источника, расположенного в начале координат. При этом построении используем формулы (5.1) и (5.2). Интервалы, где $\overline{\alpha}(\tau)$ является вещественной и описывает фронт, даются неравенствами

$$\tau > v_1, \quad v_2 < \tau < \overline{v}_1, \quad v_3 < \tau < \overline{v}_2, \tag{5.9}$$

которые определяют три ветви графика функции $\overline{\alpha}(\tau)$ (рис. 2). При $\tau = v_1$, $\tau = v_2$, $\tau = v_3$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} &\overline{\alpha}(v_1) = \overline{\alpha}(v_2) = \overline{\alpha}(v_3) = 0, \quad \operatorname{ctg}(n, z) = 0, \\ &\overline{\alpha}'(v_1) = \overline{\alpha}'(v_2) = \overline{\alpha}'(v_3) = \infty. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Согласно соотношениям (5.1) и (5.2), этим точкам соответствуют точки на фронтах

$$x = v_1 t, \quad z = 0; \quad x = v_2 t, \quad z = 0; \quad x = v_3 t, \quad z = 0 \tag{5.11}$$

и в них фронт перпендируля
рен оси x. При $\tau = v_2$ и $\tau = v_4$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} &\overline{\alpha}(\overline{v}_1) = \overline{\alpha}(\overline{v}_2) = \infty, \quad \overline{\alpha}'(\overline{v}_1) = \overline{\alpha}'(\overline{v}_2) = \infty, \\ &\overline{\alpha}(\overline{v}_1)/\overline{\alpha}'(\overline{v}_1) = 0, \quad \overline{\alpha}(\overline{v}_2)/\overline{\alpha}'(\overline{v}_2) = 0, \quad \operatorname{ctg}(n, z) = \infty. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Этим точкам соответствуют точки на фронтах

$$x = \overline{v}_1 t, \quad z = 0; \quad x = \overline{v}_2 t, \quad z = 0 \tag{5.13}$$

и в них фронт касается оси x.

Кривизна фронтов выражается формулой

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{(\overline{\alpha}')^3}{t\overline{\alpha}''(\tau)} \tag{5.14}$$

[9. 2] и ее знак определяется кривизной графика характеристической функции $\overline{\alpha}(\tau)$, Согласно соотношению (5.14), фронты вблизи точек (5.11) являются выпуклыми ($\overline{\alpha}'' < 0$), а вблизи точек (5.13) – вогнутыми ($\overline{\alpha}'' > 0$). Переход от выпуклого фронта к вогнутому связан с тем, что на ветвях графика $\overline{\alpha}(\tau)$ в промежутках $(v_3, \overline{v}_2)$ и $(v_2, \overline{v}_1)$ кривизна меняет знак и существуют точки перегиба, указанные на графиках (рис. 2). Этим точкам перегиба соответствуют угловые точки на ветвях фронта, начинающихся в точках $x = v_2 t$, $z = 0$ и $x = v_3 t$, $z = 0$. Эти ветви графиков образуют два "треугольных фронта" (рис. 3)

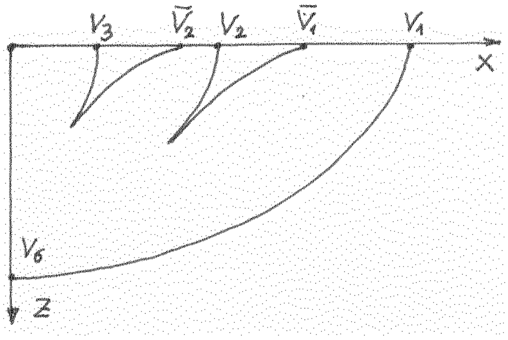

Рис. 3.

Для определения конца фронта, выходящего из точки $x = v_1 t$, $z = 0$, обратимся к ветви графика, выходящей из точки $\tau = v_1$. Эта ветвь не имеет точки перегиба и приближается асимптотически к прямой

$$\overline{\alpha} = \tau \sqrt{\frac{\overline{\rho} A_1}{\lambda_2 \rho_2 A_5}} = \tau \sqrt{\frac{d\overline{\rho}(\theta - 1)}{H}} \tag{5.15}$$

при больших $\overline{\alpha}$ и τ. После подстановки соотношений (5.15) в (5.1) приходим к равенствам

$$x = 0, \quad z = v_6 t; \quad v_6 = \sqrt{\frac{H}{\overline{\rho} d(1-\theta)}}, \tag{5.16}$$

определяющим конец фронта на оси z. Этот фронт является передним. Другие фронты при конечных θ не выходят на ось z,

Величины v_1, v_2, v_3, $\overline{v}_1$, $\overline{v}_2$, v_6 являются скоростями распространения волн вдоль координатных осей. Скорости v_1, v_2 и v_3 – положительные корни уравнения

$$A_1\tau^6 - A_2\tau^4 + A_3\tau^2 - A_4 = 0, \tag{5.17}$$

а скорости $\overline{v}_1$ и $\overline{v}_2$ – положительные корни уравнения

$$A_5\tau^4 - A_6\tau^2 + A_7 = 0. \tag{5.18}$$

Скорости $\overline{v}_2$ и $\overline{v}_4$ представляются равенствами

$$\begin{aligned}\overline{v}_{1,2}^2 = \Big\{ \pm \sqrt{[m(H^2-B^2) + \rho_1(HM-C^2) - 2\rho_f C(H-B)]^2 - 4H(\rho_1 m - \rho_1^2)\Delta} \\ + m(H^2-B^2) + \rho_1(HM-C^2) - 2\rho_f C(H-B)\Big\} \Big/ [2H(\rho_1 m - \rho_f^2)]\end{aligned} \tag{5.19}$$

и совпадают со скоростями продольных симметричных волн в изолированном пористом слое с закрытыми порами на границах. Скорость v_6 определяется третьей формулой (5.16).

В заключение отметим, что сравнение фронтов от точечных источников в рассматриваемой эффективной модели и в эффективной модели, описывающей чередующиеся упругие и жидкие слои [10], показывает большое сходство в расположении фронтов. Основная разница состоит в том, что в пористо-жидкой модели существуют два “треугольных фронта”, а в упруго-жидкой модели – только один “треугольный фронт”. Таким образом, если упругие слои, расположенные между жидкими слоями, заменяются пористыми слоями Био, то в этом случае появляется второй “треугольный фронт”,

§6. Эффективная модель в случае $\theta \ll 1$

Рассмотрим случай, когда в рассматривемой эффективной модели относительная толщина жидких слоев устремляется к нулю и в пределе мы получаем среду Био, перерезанную границами, где выполняются условия (1.8). Волновое поле в этом случае по-прежнему представляется соотношениями (4.2), а характеристическая функция $\alpha(\eta)$ выражается формулой

$$\alpha^2 = \rho_1\eta^2 \frac{(\rho_1 m - \rho_f^2)\eta^4 + (mH + \rho_1 M - 2\rho_f C)\eta^2 + HM - C^2}{H(\rho_1 m - \rho_f^2)\eta^4 + [(H^2 - B^2)m + (HM - C^2)\rho_1 - 2\rho_f C(H - B)]\eta^2 + \Delta}, \tag{6.1}$$

соответствующей равенству (4.8).

Так как построение фронтов будет проводиться теми же методами как и в §5, то изложение этого построения будет довольно кратким. Фронты описываются соотношениями (5.1), в которых

$$\overline{\alpha}^2 = \rho_1\tau^2 \frac{(\rho_1 m - \rho_f^2)\tau^4 - (mH + M\rho_1 - 2\rho_f C)\tau^2 + HM - C^2}{H(\rho_1 m - \rho_f^2)\tau^4 - [(H^2 - B^2)m + (HM - C^2)\rho_1 - 2\rho_f C(H - B)]\tau^2 + \Delta}. \tag{6.2}$$

График функции $\overline{\alpha}(\tau)$ представляется на рис. 4

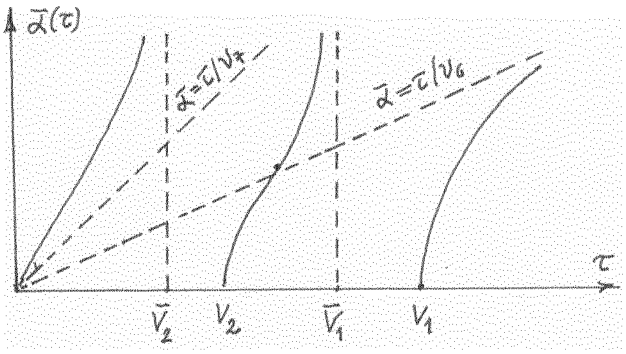

Рис. 4.

Точки пересечения графика с осью τ определяются формулами

$$v_{1,2}^2 = \frac{(H_m + M\rho_1 - 2\rho_f C) \pm \sqrt{(H_m + M\rho_1 - 2\rho_f C)^2 - 4(\rho_1 m - \rho_f^2)(HM - C^2)}}{2(\rho_1 m - \rho_f^2)}, \tag{6.3}$$

которые совпадают с выражениями для скоростей продольных объемных волн в однородной среде Био. Этим точкам графика соответствуют точки

$$x = v_1 t, \quad z = 0; \quad x = v_2 t, \quad z = 0 \tag{6.4}$$

на фронтах. Точки $\tau = \overline{v}_1$ и $\tau = \overline{v}_2$, где $\overline{\alpha}(\tau) = \infty$, определяются по-прежнему формулами (5.19). В соответствующих точках

$$x = \overline{v}_1 t, \quad z = 0; \quad x = \overline{v}_2 t, \quad z = 0 \tag{6.5}$$

фронт касается оси x. На средней ветви графика также находится точка перегиба. Точке перегиба соответствует угловая точка на “треугольном фронте”, соединяющем точки $x = \overline{v}_1 t$, $z = 0$ и $x = v_2 t$, $z = 0$. На крайних ветвях графика сохраняются знаки кривизны, при этом одна из этих ветвей, является выпуклой, а другая вогнутой. К крайним ветвям графика можно провести касательные

$$\overline{\alpha} = v_6 \tau, \quad \overline{\alpha} = v_7 \tau, \tag{6.6}$$

где

$$v_6^2 = \frac{H}{\rho_1}, \quad v_7^2 = \frac{\Delta}{\rho_1 (HM - C^2)}. \tag{6.7}$$

Первая касательная (6.6) соответствует точке на фронте $x = 0$, $z = v_6 t$, в которой фронт перпендикулярен к оси z. Вторая касательная связана с точкой на фронте $x = 0$, $z = v_7 t$, где фронт касается оси z.

В результате исследований строятся фронты (рис. 5), состоящие из трех ветвей: переднего выпуклого фронта, “треугольного фронта” и заднего выпуклого фронта.

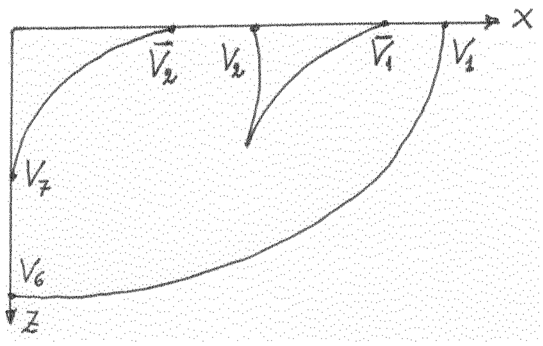

Рис. 5.

При предельном переходе $\theta \to 0$ существенно меняется только второй "треугольный фронт" (рис. 3 и 5). Точка $x = v_5 t$, $z = 0$ стремится в начало координат (к точке источника), а угловая точка выходит на ось z. Выпуклая часть фронта распрямляется, в пределе лежит на оси z и сокращается с аналогичным отрезком фронта, который выходит на ось z слева.

Аналогичное изменение фронта имеет место и в эффективной модели, описывающей чередующиеся упругие и жидкие слои, когда толщина жидких слоев устремляется к нулю. В этом случае "треугольный фронт" также превращается в задний вогнутый фронт. Сравнение фронтов в моделях пористо-жидких и упруго-жидких слоистых сред после указанных предельных переходов показывает, что в первой модели существует "треугольный фронт", а во второй модели он отсутствует.

В заключение укажем, что при малых относительных толщинах жидких слоев в обеих моделях вдоль оси x распространяется низкоскоростная волна, представляющая большой интерес при сейсморазведке. Экспериментальные данные показывают [4], что после гидравлического разрыва, связанного с закачиванием в скважину жидкости под большим давлением, возникают зоны, в которых могут распространяться низкоскоростные волны. Такими зонами являются тонкие жидкие слои, образовавшиеся в результате гидравлического разрыва.

Литература

1. Л. А. Молотков, *Об эквивалентности слоисто-периодических и трансверсально-изотропных сред*, — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89** (1979), 219–233
2. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* Наука, СПб, 2001.
3. Л. А. Молотков, А. В. Бакулин, *Эффективная модель слоистой упруго-жидкой среды как частный случай модели Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **230** (1995), 172–195.
4. K. D. Mahrer, F. J. Mauk, *Seismic wave motion for a new model of hydraulic fracture with an induced low velocity zone.* — J. Geophys. Res. **92**, No. 2 (1987), 9293–9309.
5. T. J. Plona, K. W. Winkler, M. Schoenberg, *Acoustic waves in alternating fluid/solid layers.* — J. Acoust. Soc. Amer **81**, No. 5 (1987), 1227–1234.
6. M. A. Biot, *Theory of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range.* — J. Acoust. Soc. Amer. **28** (1956), 168–178.
7. M. A. Biot, *Theory of elastic waves in fluid-saturated porous solid. II. High frequency range.* — J. Acoust. Soc. Amer. **28** (1956), 179–191.

8. Л. А. Молотков, *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах.* Л., 1984.
9. Л. А. Молотков, *О методах вывода уравнений, описывающих эффективные модели слоистых сред.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **250** (1998), 219–243.
10. Л. А. Молотков, А. Е. Хило, *Исследование однофазных и многофазных эффективных моделей, описывающих периодические среды.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 105–123.
11. Ф. Р. Гантмахер, *Теория матриц*, М., 1967.

Molotkov L. A. Effective model of a porous-fluid medium.

For the medium containing alternating porous Biot layers and fluid layers, the effective model is established by the method of matrix averaging. The investigation of equations of this effective model shows that the wave field consists of the leading front and two triangular fronts. The velocities of these fronts along the axes are determined. If thicknesses of the fluid layers are very small then the second triangular front turns into back concave front and a slow wave arises. This slow wave is of interest for seismics.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 29 апреля 2008 г.