Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 354, 2008 г.

Л. А. Молотков

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ИЗОЛИРОВАННОМ ПОРИСТОМ СЛОЕ БИО С ЗАКРЫТЫМИ ПОРАМИ НА ГРАНИЦАХ

Предлагаемая работа посвящена исследованию распространения волн в изолированном пористом слое Био с закрытыми порами на границах. Рассмотрение изолированных слоев представляет большой интерес, как основа для изучения слоев, окруженных упругими или жидкими средами. Изолированные упругие слои исследовались в работах [1, 2]. Пористые слои Био рассматривались в статье [3] и монографии [4]. В отличие от предлагаемой работы в [3, 4] на границах пористого слоя ставились условия отсутствия напряжений и давления на границах. В настоящей работе вместо отсутствия давления на границах ставится условие равенства нулю относительных смещений. Такое граничное условие оправдывается тем, что, например, на границах пористой и упругой сред разность между нормальными смещениями в жидкой и упругой фазах также обращается в нуль.

В характеристиках волновых полей в обоих сравниваемых пористых слоях имеет место много общего. Три объемных волны (две продольных и одна поперечная) имеют одинаковые скорости. Фазовые скорости большинства нормальных волн уменьшаются с ростом волнового числа от бесконечно большой величины до наименьшей из скоростей объемных волн. В обоих сравнимаемых слоях распространяются изгибные волны и их скорости при малых волновых числах имеют сходные выражения.

В то же время волновые поля в изолированных пористых слоях Био в случаях открытых и закрытых пор на границах заметно отличаются. Главное различие состоит в том, что в пористом слое с закрытыми на границах порами распространяются две пластинчатые волны, а в пористом слое с открытыми границами распространяется только одна пластинчатая волна. Другое различие связано с волной Релея, которая в слое с открытыми порами на границах может от-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ) гранты 08-01-00511, 08-05-00285 .

сутствовать при некоторых параметрах. В случае слоя с закрытыми порами на границах эта волна существует при всех параметрах.

Для всех нормальных волн, распространяющихся в пористом слое с закрытыми порами на границах, устанавливается зависимость от волнового числа. Результаты этих исследований представляются в виде схем дисперсий, относящихся к трем основным случаям соотношений между параметрами. Дисперсия всех нормальных волн представляет большой интерес при исследовании волновых поцессов в природных резервуарах, содержащих, в частности, нефть и газ.

§1. Уравнения и граничные условия для пористого слоя Био с закрытыми порами на границах

Пусть задан изолированный однородный изотропный пористый слой Био $-h \leqslant z \leqslant h$ с закрытыми порами на границах. В слое рассматривается волновое осесимметрическое поле, удовлетворяющее граничным условиям

$$\tau_{zz}\Big|_{z=\pm h} = \tau_{zr}\Big|_{z=\pm h} = 0, \quad w_z\Big|_{z=\pm h} = 0, \tag{1.1}$$

в которых τ_{zz}, τ_{zr} – компоненты полного напряжения, а w_z – составляющая относительного смещения в жидкой фазе. Согласно уравнениям среды Био, эти величины выражаются соотношениями [5, 6, 4]

$$\begin{gathered}
\tau_{zz} = (\rho + B_1\rho_f)\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial t^2} + (\rho + B_2\rho_f)\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial t^2} - 2L\biggl(\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} \\
+ \frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}\biggr), \\
\tau_{zz} = L\biggl(2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial r\partial z} + 2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial r\partial z} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2}\biggr), \\
w_z = B_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial z} + B_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\rho_f}{m}\left(\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r}\right)
\end{gathered} \tag{1.2}$$

через потенциалы φ_1, φ_2 и ψ, удовлетворяющие уравнениям

$$\Delta\varphi_i = \frac{1}{v_i^2}\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial t^2}\ (i = 1, 2),\ \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2} = \frac{1}{v_3^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}. \tag{1.3}$$

Величины v_1 и v_2 – скорости распространения продольных волн, v_3 – скорость поперечной волны, Эти скорости выражаются равенствами

$$v_{1,2}^2 = \frac{Hm + M\rho - 2C\rho_f \pm \sqrt{(Hm + M\rho - 2C\rho_f)^2 - 4(\rho m - \rho_f^2)(HM - C^2)}}{2(\rho m - \rho_f^2)},$$
$$v_3^2 = \frac{L_m}{\rho m - \rho_f^2}, \tag{1.4}$$

а скорости v_1 и v_2 удовлетворяют биквадратному уравнению

$$(\rho_m - \rho_f^2)v^4 - (H_m + M_\rho - 2C\rho_f)v^2 + (HM - C^2) = 0. \tag{1.5}$$

Модули H, M, C, B, $L = 0.5(H - B)$ образуют положительно определенную матрицу

$$\begin{pmatrix} H & B & C & 0 \\ B & H & C & 0 \\ C & C & M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

определяющую закон Гука для пористой изотропной среды Био. Средняя плотность среды Био ρ, плотность жидкой фазы ρ_f и коэффициент m с размерностью плотности являются коэффициентами в уравнениях сплошной пористой среды и элементами положительно определенной матрицы

$$\begin{pmatrix} \rho & \rho_f \\ \rho_f & m \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Безразмерные коэффициенты B_1 и B_2 разделяют поля потенциалов φ_1 и φ_2 и представляются равенствами

$$B_i = \frac{C - \rho_f v_i^2}{m v_i^2 - M} = \frac{H - \rho v_i^2}{\rho_f v_i^2 - C} \quad (i = 1, 2). \tag{1.8}$$

Заданная уравнениями (1.2) и (1.3) среда возбуждается некоторым осесимметрическим источником, действующим с момента $t = 0$. Задание и расположение этого источника не являются существенными для нашей задачи. Само волновое поле полезно представить в виде суммы симметричной и антисимметричной относительно плоскости $z = 0$ частей.

§2. Вывод дисперсионных уравнений

В симметричном случае потенциалы φ_i и ψ представляются равенствами

$$\varphi_i = \int\limits_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma+i\infty}^{\sigma+i\infty} X_i(k,\eta)\operatorname{ch} kz\alpha_i e^{kt\eta} d\eta \quad (i=1,2),$$

$$\psi = \int\limits_0^\infty \frac{J_1(kr)dk)}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Z(k,\eta)\operatorname{sh} kz\beta e^{kt\eta} d\eta, \tag{2.1}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{1+\frac{\eta^2}{v_1^2}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{1+\frac{\eta^2}{v_2^2}}, \quad \beta = \sqrt{1+\frac{\eta^2}{v_3^2}}. \tag{2.2}$$

Полные напряжения и относительное смещение в этом случае выражаются соотношениями

$$\tau_{zz} = \int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{zz}(k,\eta) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$\tau_{zz} = -L\int\limits_0^\infty \frac{k^2 J_1(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} T_{zr}(k,\eta) e^{kt\eta} d\eta,$$

$$w_z = \int\limits_0^\infty \frac{kJ_0(kr)dk}{2\pi i} \int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} W_z(k,\eta) e^{kt\eta} d\eta, \tag{2.3}$$

где

$$T_{zz} = (\rho + B_1\rho_f)\eta^2 \operatorname{ch} kz\alpha_1 X_1 + (\rho + B_2\rho_f)\eta^2 \operatorname{ch} kz\alpha_2 X_2 + 2L\beta \operatorname{ch} kz\beta Z,$$

$$T_{zr} = 2\alpha_1 \operatorname{sh} kz\alpha_1 X_1 + 2\alpha_2 \operatorname{sh} kz\alpha_2 X_2 + g \operatorname{sh} kz\beta Z, \ g = 2 + \frac{\eta^2}{v_3^2}, \tag{2.4}$$

$$W_z = B_1\alpha_1 \operatorname{ch} kh\alpha_1 X_1 + B_2\alpha_2 \operatorname{sh} kz\alpha_2 X_2 - (\rho_f/m)\operatorname{sh} kz\beta Z.$$

После удовлетворения граничным условиям (1.1) при $z = \pm h$ приходим к системе уравнений

$$
\begin{gathered}
[2L+(\rho+B_1\rho_f)\eta^2]\operatorname{ch} kh\alpha_1 X_1+[2L+(\rho+B_2\rho_f)\eta^2]\operatorname{ch} kh\alpha_2 X_2 \\
+2L\beta\operatorname{ch} kh\beta Z=0, \\
2\alpha_1\operatorname{sh} kh\alpha_1 X_1+2\alpha_2\operatorname{sh} kh\alpha_2 X_2-g\operatorname{sh} kh\beta Z=0, \qquad (2.5)\\
B_1\alpha_1\operatorname{sh} kh\alpha_1 X_1+B_2\alpha_2\operatorname{sh} kh\alpha_2 X_2-(\rho_f/m)\operatorname{sh} kh\beta Z=0
\end{gathered}
$$

относительно X_1, X_2 и Z. Система уравнений (2.5) имеет ненулевое решение при условии

$$
\begin{gathered}
[2L+(\rho+B_2\rho_f)\eta^2][2\frac{\rho_f}{m}+B_1 g]\alpha_1\operatorname{sh} kh\alpha_1\operatorname{ch} kh\alpha_2\operatorname{sh} kh\beta \\
-[2L+(\rho+B_1\rho_f)\eta^2][\frac{2\rho_f}{m}+B_2 g]\alpha_2\operatorname{sh} kh\alpha_2\operatorname{ch} kh\alpha_1\operatorname{sh} kh\beta \\
+4L\alpha_1\alpha_2\beta(B_2-B_1)\operatorname{sh} kh\alpha_1\operatorname{sh} kh\alpha_2\operatorname{ch} kh\beta=0, \qquad (2.6)
\end{gathered}
$$

которое является симметричным дисперсионным уравнением.

В антисимметричном случае потенциалы φ_i и ψ представляются равенствами

$$
\begin{gathered}
\varphi_i=\int_0^\infty\frac{J_0(kr)dk}{2\pi i}\int_{\sigma+i\infty}^{\sigma+i\infty}X_i(k,\eta)\operatorname{sh} kz\alpha_i e^{kt\eta}d\eta \quad (i=1,2), \\
\psi=\int_0^\infty\frac{J_1(kr)dk)}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}Z(k,\eta)\operatorname{ch} kz\beta e^{kt\eta}d\eta
\end{gathered} \qquad (2.7)
$$

Полные напряжения и относительные смещения выражаются формулами (2.3), где

$$
\begin{gathered}
T_{zz}=(\rho+B_1\rho_f)\eta^2\operatorname{sh} kz\alpha_1 X_1+(\rho+B_2\rho_f)\eta^2\operatorname{sh} kz\alpha_2 X_2+2L\beta\operatorname{sh} kz\beta Z, \\
T_{zr}=2\alpha_1\operatorname{ch} kz\alpha_1 X_1+2\alpha_2\operatorname{ch} kz\alpha_2 X_2+g\operatorname{ch} kz\beta Z, \qquad (2.8)\\
W_z=B_1\alpha_1\operatorname{ch} kz\alpha_1 X_1+B_2\alpha_2\operatorname{ch} kz\alpha_2 X_2-(\rho_f/m)\operatorname{ch} kz\beta Z.
\end{gathered}
$$

После удовлетворения граничным условиям приходим к системе уравнений, которая имеет ненулевое решение при условии

$$
\begin{gathered}
[2L+(\rho+B_2\rho_f)\eta^2](2\frac{\rho_f}{m}+B_1 g)\alpha_1\operatorname{sh} kh\alpha_2\operatorname{ch} kh\alpha_1\operatorname{ch} kh\beta \\
-[2L+(\rho+B_1\rho_f)\eta^2](2\frac{\rho_f}{m}+B_2 g)\alpha_2\operatorname{sh} kh\alpha_1\operatorname{ch} kh\alpha_2\operatorname{ch} kk\beta \qquad (2.9)\\
+4L\alpha_1\alpha_2\beta(B_2-B_1)\operatorname{sh} kh\beta\ \operatorname{ch} kh\alpha_1,\operatorname{ch} kh\alpha_2=0.
\end{gathered}
$$

Равенство (2.9) является антисимметричным дисперсионным уравнением.

§3. Преобразование дисперсионных уравнений

Для исследования дисперсионных уравнений (2.6) и (2.9) предварительно преобразуем их. Используя равенства (1.8), выведем соотношения

$$\rho + B_1\rho_f = \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C},\ \rho + B_2\rho_f = -\frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2},$$
$$\rho_f + mB_1 = \frac{mC - \rho_f M}{mv_1^2 - M}, \rho_f + mB_2 = -\frac{mC - \rho_f M}{M - mv_2^2}. \tag{3.1}$$

С учетом формул (3.1) запишем равенства

$$[2L+(\rho + B_2\rho_f)\eta^2]\left(\frac{2\rho_f}{m} + B_1 g\right) = \left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{C-\rho_f v_2^2}\eta^2\right)\left(\frac{2}{m}\frac{mC - \rho_f M}{mv_1^2 - M} + \frac{B_1\eta^2}{v_3^2}\right),$$
$$[2L+(\rho+B_1\rho_f)\eta^2]\left(\frac{2\rho_f}{m} + B_2 g\right) = \left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C}\eta^2\right)\left(-\frac{2}{m}\frac{mC-\rho_f M}{M - mv_2^2} + \frac{B_2\eta^2}{v_3^2}\right). \tag{3.2}$$

Подставляя выражения (1.4) и (1.8) для v_3^2, B_1 и B_2, приходим к соотношениям

$$\frac{2}{m}\frac{mC - \rho_f M}{mv_1^2 - M} + \frac{B_1\eta^2}{v_3^2} = \frac{mC - \rho_f M}{Lm(mv_1^2 - M)}\left[2L - \frac{(\rho_f v_1^2 - C)(\rho m - \rho_f^2)}{mC - \rho_f M}\right],$$
$$-\frac{2}{m}\frac{mC-\rho_f M}{M - mv_2^2} + \frac{B_2\eta^2}{v_3^2} = \frac{mC-\rho_f M}{Lm(M - mv_2^2)}\left[2L + \frac{(C-\rho_f v_2^2)(\rho m-\rho_f^2)}{mC-\rho_f M}\eta^2\right]. \tag{3.3}$$

При использовании формул Виета для уравнения (1.5)

$$v_1^2 + v_2^2 = \frac{Hm + M\rho - 2C\rho_f}{\rho m - \rho_f^2}, \quad v_1^2 v_2^2 = \frac{HM - C^2}{\rho m - \rho_f^2} \tag{3.4}$$

доказываются равенства

$$\frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} = \frac{(\rho_f v_1^2 - C)(\rho m - \rho_f^2)}{mC - \rho_f M}, \ \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} = \frac{(C - \rho_f v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)}{mC - \rho_f M}. \tag{3.5}$$

На основании соотношений (3.2), (3.3) и (3.5) выводятся формулы

$$\begin{gathered}
[2L+(\rho+B_2\rho_f)\eta^2]\Bigl(\frac{2\rho_f}{m}+B_1 g\Bigr)=\frac{mC-\rho_f M}{Lm(mv_1^2-M)}\Bigl(2L-\frac{\rho_f H-\rho C}{C-\rho_f v_2^2}\eta^2\Bigr)^2,\\
[2L+(\rho+B_1\rho_f)\eta^2]\Bigl(\frac{2\rho_f}{m}+B_2 g\Bigr)=-\frac{mC-\rho_f M}{Lm(M-mv_2^2)}\Bigl(2L+\frac{\rho_f H-\rho C}{\rho_f v_1^2-C}\eta^2\Bigr)^2.
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Для разности B_2-B_1, входящей в уравнения (2.6) и (2.9), получаем соотношение

$$B_2-B_1=-\frac{(Cm-M\rho_f)(v_1^2-v_2^2)}{(M-mv_2^2)(mv_1^2-M)}. \tag{3.7}$$

После подстановки формул (3.6) и (3.7) в уравнения (2.6) и (2.9) приходим к дисперсионным уравнениям

$$\begin{gathered}
(M-mv_2^2)\Bigl(2L-\frac{\rho_f H-\rho C}{C-\rho_f v_2^2}\eta^2\Bigr)^2\alpha_1\operatorname{sh}kh\alpha_1\operatorname{ch}kh\alpha_2\operatorname{sh}kh\beta\\
+(mv_1^2-M)\Bigl(2L+\frac{\rho_f H-\rho C}{\rho_f v_1^2-C}\eta^2\Bigr)^2\alpha_2\operatorname{sh}kh\alpha_2\operatorname{ch}kh\alpha_1\operatorname{sh}kh\beta\\
-4L^2m\alpha_1\alpha_2\beta(v_1^2-v_2^2)\operatorname{sh}kh\alpha_1\operatorname{sh}kh\alpha_2\operatorname{ch}kh\beta=0,
\end{gathered} \tag{3.8}$$

$$\begin{gathered}
(M-mv_2^2)\Bigl(2L-\frac{\rho_f H-\rho C}{C-\rho_f v_2^2}\eta^2\Bigr)^2\alpha_1\operatorname{sh}kh\alpha_2\operatorname{ch}kh\alpha_1\operatorname{ch}kh\beta\\
+(mv_1^2-M)\Bigl(2L+\frac{\rho_f H-\rho C}{\rho_f v_1^2-C}\eta^2\Bigr)^2\alpha_2\operatorname{sh}kh\alpha_1\operatorname{ch}kh\alpha_2\operatorname{ch}kh\beta\\
-4L^2m\alpha_1\alpha_2\beta(v_1^2-v_2^2)\operatorname{ch}kh\alpha_1\operatorname{ch}kh\alpha_2\operatorname{sh}kh\beta=0,
\end{gathered}$$

относящимся к симметричному и антисимметричному случаям.

Для величин mv_1^2-M и $M-mv_2^2$, входящих в уравнения (3.8) и (3.9), выполняются соотношения

$$mv_1^2-M\geqslant 0, \tag{3.10}$$

$$M-mv_2^2\geqslant 0, \tag{3.11}$$

которые доказываются при использовании подстановки формул (1.4). Неравенство (3.10) переходит в равенство только при одновременном выполеннии двух условий

$$Hm - M\rho > 0, \quad Cm - M\rho_f = 0 \tag{3.12}$$

неравенство (3.11) становится равенством, если одновременно выполняются два условия

$$Hm - M\rho < 0, \quad Cm - M\rho_f = 0. \tag{3.13}$$

§4. Исследование корней дисперсионных уравнений при $kh \ll 1$

Уравнения (3.8) и (3.9) имеют двойные корни $\eta = 0$ при всех вещественных kh. В этом легко убедиться, если в левые части этих уравнений подставить $\eta = 0$. Все корни уравнений (3.8) и (3.9) расположены на мнимой оси, где левые части этих уравнений являются или вещественными, или мнимыми. Если предположить, что существует корень уравнения (3.8) или (3.9) в левой полуплоскости, то по принципу симметрии должен существовать симметричный ему корень в правой полуплоскости. Так как волновое поле должно удовлетворять нулевым начальным условиям, то в правой полуплоскости не должно быть корней. Вследствие симметрии корней относительно начала координат, мы ограничимся рассмотрением корней только на положительной части мнимой оси.

Корни уравнений (3.8) и (3.9) будем рассматривать как функции от kh и исследование начнем со случая $kh \ll 1$. После ряда преобразований и использования формул (3.4) приходим к уравнениям

$$H(\rho m - \rho_f^2)\eta^4 + [(H^2 - B^2)m + (HM - C^2)\rho - 2C(H - B)\rho_f]\eta^2 + \widetilde{\Delta} = 0, \tag{4.1}$$

$$\rho\eta^2 + \frac{k^2h^2\widetilde{\Delta}}{3(HM - C^2)} = 0, \tag{4.2}$$

относящимся соответственно к симметричному и антисимметричному случаям. В уравнениях (4.1) и (4.2) использовано обозначение

$$\widetilde{\Delta} = (H - B)(HM + BM - 2C^2). \tag{4.3}$$

Из положительной определенности матриц (1.5) и (1.6) следуют неравенства

$$\rho m - \rho_f^2 > 0, \quad HM - C^2 > 0, \quad \widetilde{\Delta} > 0. \tag{4.4}$$

Корни уравнения (4.1) представляются соотношениями

$$\eta = i\bar{v}_1, \quad \eta = i\bar{v}_2,$$

$$\bar{v}_{1,2}^2 = \{\pm\sqrt{[m(H^2-B^2)+\rho(HM-C^2)-2\rho_f C(H-B)]^2 - 4H(\rho m-\rho_f^2)\widetilde{\Delta}}$$
$$+m(H^2-B^2)+\rho(HM-C^2)-2\rho_f C(H-B)\}/[2H(\rho m-\rho_f^2)]. \qquad (4.5)$$

Величины $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$ – низкочастотные скорости продольных симметричных волн, распространяющихся в рассматриваемом слое. Эти волны аналогичны продольной пластинчатой волне, распространяющейся в изолированных упругом слое и в пористом слое с открытыми порами. В отличие от изолированного упругого слоя и от изолированного пористого слоя с открытыми порами, в рассматриваемом слое распространяются две продольные пластинчатые волны. Таким образом, закрытие пор на границе приводит к образованию дополнительной продольной пластинчатой волны.

Со скоростями (4.5) распространяются объемные волны в эффективных моделях, описывающих среды с чередующимися пористыми и жидкими слоями [7]. Используя результаты работы [7], приходим к выводу, что скорости $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, v_1 и v_2 объемных продольных волн в пористой среде Био удовлетворяют неравенствам

$$v_1 > \bar{v}_1 > v_2 > \bar{v}_2, \qquad (4.6)$$

оценивающим скорости $\bar{v}_1$ и $\bar{v}_2$.

Согласно уравнению (4.2). в антисимметричной части волнового поля распространяется изгибная волна со скоростью

$$v = kh\sqrt{\frac{\widetilde{\Delta}}{3\rho(HM-C^2)}}. \qquad (4.7)$$

Аналогичная волна распространяется в изолированных упругих и пористых слоях. Для описания этой волны в рассматриваемом слое может быть использовано уравнение Кирхгофа

$$\rho\frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2} + \frac{h^2\widetilde{\Delta}}{3(HM-C^2)}\Delta^2 w_z = 0. \qquad (4.8)$$

Все остальные корни уравнений (3.8) и (3.9) при $kh = 0$ находятся в бесконечно далекой точке $\eta = i\infty$ и при $kh \ll 1$ удовлетворяют условию

$$\tau \gg v_1. \tag{4.9}$$

В области, где $\tau > v_1$, уравнения (3.8) и (3.9) представляются равенствами

$$\begin{gathered}(M - mv_2^2)\bigl(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2}\tau^2\bigr)^2 \overline{\alpha}_1 \operatorname{ctg} kh\overline{\alpha}_2 \\ +(mv_1^2 - M)\bigl(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C}\tau^2\bigr)^2 \overline{\alpha}_2 \operatorname{ctg} kh\overline{\alpha}_1 \\ +4L^2 m(v_1^2 - v_2^2)\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2\overline{\beta} \operatorname{ctg} kh\overline{\beta} = 0,\end{gathered} \tag{4.10}$$

$$\begin{gathered}(M - mv_2^2)(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2}\tau^2\bigr)^2 \overline{\alpha}_1 \operatorname{tg} kh\overline{\alpha}_2 \\ +(mv_1^2 - M)\bigl(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C}\tau^2\bigr)^2 \overline{\alpha}_2 \operatorname{tg} kh\overline{\alpha}_1 \\ +4L^2 m(v_1^2 - v_2^2)\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2\overline{\beta} \operatorname{tg} kh\overline{\beta} = 0,\end{gathered} \tag{4.11}$$

в которых

$$\overline{\alpha}_i = \sqrt{\tau^2/v_i^2 - 1}\ (i = 1, 2),\ \overline{\beta} = \sqrt{\tau^2/v_3^2 - 1}. \tag{4.12}$$

Так как коэффициенты при котангенсах в области (4.9) являются величинами разных порядков, то уравнение (4.10) распадается на три приближенных уравнения

$$\operatorname{ctg} kh\overline{\alpha}_1 = 0, \quad \operatorname{ctg} kh\overline{\alpha}_2 = 0, \quad \operatorname{tg} kh\overline{\beta} = 0. \tag{4.13}$$

Аналогичным образом уравнение (4.11) переходит в три других приближенных уравнения

$$\operatorname{tg} kh\overline{\alpha}_1 = 0,\ \operatorname{tg} kh\overline{\alpha}_2,\ \operatorname{ctg} kh\overline{\beta} = 0. \tag{4.14}$$

Решая уравнения (4.13) и (4.14), получим асимптотические формулы

$$\tau = \frac{(2n-1)\pi v_i}{2kh}, \quad \tau = \frac{n\pi v_3}{kh}\ (i = 1, 2; n = 1, 2, 3, \dots), \tag{4.15}$$

$$\tau = \frac{m\pi v_i}{kh}, \quad \tau = \frac{(2m-1)\pi v_3}{2kh} \ (i = 1, 2; m = 1, 2, 3, \dots) \tag{4.16}$$

для корней соответствующих уравнений (4.10) и (4.11). Из соотношний (4.15) и (4.16) следует, что все корни τ в области (4.9) с ростом kh движутся в сторону начала координат. Анализ уравнений (4.10) и (4.11) показывает, что корни уравнения (4.10) разделены полюсами и в каждом интервале, ограниченном соседними полюсами, находится один корень уравнения (4.10). В этом же интервале находится также и один корень уравнения (4.11), и оба корня не совпадают.

§5. Дисперсионные кривые для всех нормальных волн

Дальнейшие исследования движения корней с ростом kh будем проводить в двух случаях:

$$v_1 > v_2 > v_3 \quad \text{(случай а)}, \tag{5.1}$$

$$v_1 > v_3 > v_2 \quad \text{(случай в)}. \tag{5.2}$$

Неравенства (5.1) выполняются при условии

$$(MH + BM - 2C^2)\rho m + 4CLm\rho_f > 2L(H-L)m^2 + 2(MH - C^2)\rho_f^2, \tag{5.3}$$

а неравенства (5.2) справедливы при условии, обратном неравенству (5.3). В случае a рассматриваются интервалы

$$\tau > v_1, \ v_2 < \tau < v_1, \ v_3 < \tau < v_2, \tag{5.4}$$

а в случае в) исследуются интервалы

$$\tau > v_1, \ v_3 < \tau < v_1, \ v_2 < \tau < v_3. \tag{5.5}$$

В интервале $\tau > v_1$ оба дисперсионных уравнения представляются равенствами (4.10) и (4.11), из которых видно, что с ростом kh вне полюсов левая часть симметричного дисперсионного уравнения (4.10) монотонно убывает, а левая часть антисимметричного дисперсионного уравнения (4.11) возрастает.

С помощью преобразований во всех остальных интервалах (5.4) и (5.5) дисперсионные уравнения могут быть представлены в виде аналогичных равенств, в которых левые части с ростом kh монотонно убывают в случае симметричного дисперсионного уравнения и монотонно возрастают в случае антисимметричного дисперсионного уравнения. Для доказательства убывания или возрастания левых частей используются неравенства

$$\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{ctg} ax}{\operatorname{cth} bx} < 0, \quad \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{tg} ax}{\operatorname{th} bx} > 0 \tag{5.6}$$

при любых $a > 0$ и $b > 0$ и

$$\frac{d}{dx}\frac{\operatorname{cth} ax}{\operatorname{cth} bx} = \frac{d}{dx}\frac{\operatorname{th} bx}{\operatorname{th} ax} > 0 \tag{5.7}$$

при $a > b > 0$.

Обозначим левые части симметричного и антисимметричного дисперсионных уравнений соответственно через Δ_1 и Δ_2 и получим уравнения

$$\Delta_1(\mathrm{kh}, \tau) = 0, \quad \Delta_2(\mathrm{kh}, \tau) = 0. \tag{5.8}$$

Используя соотношения для производных неявных функций, запишем соотношения

$$\frac{d\tau}{dkh} = -\frac{\partial\Delta_1}{\partial kh}\bigg/\frac{\partial\Delta_1}{\partial\tau}, \frac{d\tau}{dkh} = -\frac{\partial\Delta_2}{\partial kh}\bigg/\frac{\partial\Delta_2}{\partial\tau}. \tag{5.9}$$

Нами было показано, что

$$\frac{\partial\Delta_1}{\partial kh} < 0, \quad \frac{\partial\Delta_2}{\partial kh} > 0. \tag{5.10}$$

Уравнения (5.8) не могут иметь двойных корней, так как в случае двойных корней имеет место самовозбуждение. Так как самовозбуждение невозможно, то из этого факта следует, что производные $\partial\Delta_1/\partial\tau$ и $\partial\Delta_2/\partial\tau$ являются знакопостоянными. Эти производные не меняют знаки при переходе корней через полюса левых частей уравнений (5.8) и удовлетворяют неравенствам

$$\frac{\partial\Delta_1}{\partial\tau} < 0, \quad \frac{\partial\Delta_2}{\partial\tau} > 0. \tag{5.11}$$

Из неравенств (5.10) и (5.11) следует, что во всех интервалах (5.4) и (5.5) для корней обоих дисперсионных уравнений выполняется неравенство

$$\frac{d\tau}{dkh} < 0. \tag{5.12}$$

Неравенство (5.12) показывает, что с ростом kh корни двигаются в сторону начала координат. Все корни, выходящие из бесконечно далекой точки, удовлетворяют неравенству (5.12). Эти корни двигаются медленно перед точками $\eta = iv_1$, $\eta = iv_2$ и $\eta = iv_3$, образуя в этих областях сгущение корней. Конечной точкой перемещения этих корней при $kh = \infty$ является $\eta = iv_3(v_3 < v_2)$ или $\eta = iv_2(v_2 < v_3)$.

Остановимся на перемещении корней, выходящих при $kh = 0$ из точек $\eta = i\bar{v}_1$ и $\eta = i\bar{v}_2$. Первый из этих корней двигается впереди корней, выходящих из точки $\eta = i\infty$, и также подходит при $kh = \infty$ к указанной предельной точке $\eta = i\min(v_2, v_3)$. Начальное положение корня $\eta = iv_2$ оказывается различным в случаях а) и в). В случае в на основании (4.6) выполняются неравенства

$$\bar{v}_2 < v_2 < v_3. \tag{5.13}$$

Случай а полезно разделить на два случая a_1 и a_2. В случае a_1 при условии

$$\begin{aligned} &L(H+2B)m^2 + 2(HM + BM - 2C^2)\rho_f^2 \\ &-(HM + 2BM - 3C^2)\rho m - 4LCm\rho_f > 0 \end{aligned} \tag{5.14}$$

выполняются неравенства

$$\bar{v}_2 < v_3 < v_2. \tag{5.15}$$

Таким образом, в случаях a_1 и в скорость $\bar{v}_2$ лежит вне интервалов (5.4) и (5.5). Корень $\bar{v}_2$ находится в интервале

$$v_3 < \bar{v}_2 < v_2 \tag{5.16}$$

(случай a_2) при выполнении условия

$$\begin{aligned} &(HM + 2BM - 3C^2)\rho m + 4LC\rho_f m - L(H+2B)m^2 \\ &-2(HM + BM - 2C^2)\rho_f^2 > 0. \end{aligned} \tag{5.17}$$

С ростом kh этот корень двигается к точке $\eta = iv_3$. В отличие от остальных корней, движущихся к этой точке, этот корень является самым первым и проходит через точку $\eta = iv_3$. Последнее утверждение доказывается на основании рассмотрения функции $\Delta_1(kh, v_3)$ при условии (5.17) и при малых kh и $kh=\infty$. Других корней, проходящих через точку $\eta = i\min(v_2, v_3)$ и удовлетворяющих симметричному или антисимметричному уравнениям, не существует.

Остановимся теперь на исследовании корней в интервале

$$0 < \tau < \min(v_2, v_3). \tag{5.18}$$

В этом интервале расположен один корень симметричного уравнения, выходящий из точки $\eta = iv_2$. В случаях a_1 и в этот корень при $kh=0$ находится в промежутке (5.18). В случае a_2 корень приходит в интервал (5.18) при некотором значении kh. Антисимметричное уравнение имеет в интервале (5.18) изгибный корень, определенный уравнением (4.2).

Симметричное и антисимметричное уравнения в интервале (5.18) переходят при $kh=\infty$ в уравнение

$$(M-mv_2^2)\left(2L+\frac{\rho_f H-\rho C}{C-\rho_f v_2^2}\tau^2\right)^2\alpha_1+(mv_1^2-M)\left(2L-\frac{\rho_f H-\rho C}{\rho_f v_1^2-C}\tau^2\right)^2\alpha_2$$
$$-4L^2m(v_1^2-v_2^2)\alpha_1\alpha_2\beta=0. \tag{5.19}$$

Это уравнение имеет нечетное число корней в интервале (5.18), так как левая часть уравнения представляется при малых τ выражением

$$-\frac{L(v_1^2-v_2^2)(\rho m-\rho_f^2)(HM+BM-2C^2)\tau^2}{HM-C^2}<0, \tag{5.20}$$

а при $\tau=v_2$ или $\tau=v_3$ является положительным. К этим корням уравнения (5.19) должны подходить корни дисперсионных уравнений при $kh=\infty$. Так как в интервале (5.18) находятся только два корня, то корень уравнения (5.19) является единственным. Обозначим его через v_R. В точке $\tau=v_R$ оканчивается изгибный корень антисимметричного уравнения и указанный корень симметричного уравнения.

Сравнивая уравнение (5.19) и уравнение

$$(M-mv_2^2)\left(2L+\frac{\rho_f H-\rho C}{C-\rho_f v_2^2}\tau^2\right)\alpha_1^2+(mv_1^2$$
$$-M)\left(2L-\frac{\rho_f H-\rho C}{\rho_f v_1^2-C}\tau^2\right)\alpha_2^2-4L^2m(v_1^2-v_2^2)\alpha_1^2\alpha_2^2=0, \tag{5.21}$$

определяющее скорость $\bar{v}_2$, приходим к выводу, что в случае a_1

$$v_R < \bar{v}_2. \tag{5.22}$$

Из неравенства (5.22) следует, что оба корня подходят к предельной точке $\tau = v_R$ с разных сторон. Движения этих корней являются монотонными, так как в области (5.18) каждое уравнение имеет только один корень, и поэтому не могут быть двойные корни и производные $\partial\Delta_1/\partial(kh)$, $\partial\Delta_1/\partial\tau$, $\partial\Delta_2/\partial(kh)$ и $\partial\Delta_2/\partial\tau$ в формулах (5.9) сохраняют знаки в интервале (5.18).

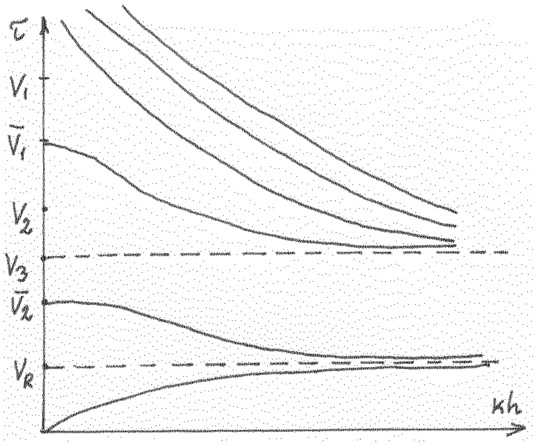

Рис. 1. (случай a_1)

Результаты исследований зависимостей фазовых скоростей нормальных волн от kh представлены на рис. 1–3. Эти скорости соответствуют трем случаям соотношений параметров a_1, a_2 и b, которые определяются неравенствами (5.1), (5.2), (5.15) и (5.16). Для простоты из бесконечного множества корней, выходящих из точки $\tau = \infty$, на рис. 1–3 показаны только три первые ветви и не показаны сгущения корней в окрестностях точек $\tau = v_1$, $\tau = v_2$ и $\tau = v_3$. Точки $\tau = \min(v_2, v_3)$ и $\tau = v_R$, к которым подходят корни при $kh = \infty$, показаны на рисунках прерывистыми линиями. Фазовые скорости τ с ростом волнового числа k, как правило, убывают. Исключение представляет изгибная волна, у которой фазовая скорость возрастает с ростом kh. Такая же зависимость фазовых скоростей нормальных волн

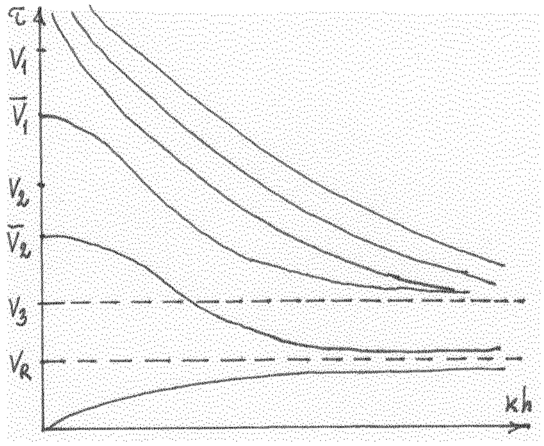

Рис. 2. (случай a_2)

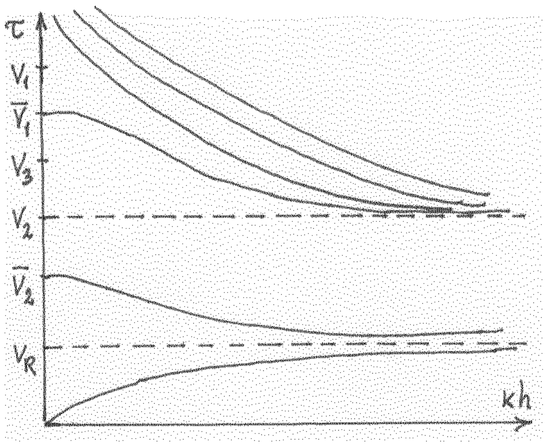

Рис. 3. (случай b)

от волногого числа имеет место и в случаях изолированных упругого слоя [1, 2] и пористого слоя с открытыми порами на границах [3].

Литература

1. Н. С. Смирнова, Л. А. Молотков, *Об исследовании антисимметричных колебаний в упругом слое.* — Вопр. динам. теор. распр. сейсм. волн. **9** (1968), 97–107.

2. Л. А. Молотков, У. Баймагамбетов, Н. С. Смирнова, *Об исследовании дисперсионных уравнений свободного трансверсально-изотропного слоя.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ. **99** (1980), 85–103.
3. Л. А. Молотков, *О распространении нормальных волн в изолированном флюидонасыщенном слое Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ. **257** (1999), 165–183.
4. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* С-Петербург (2001), 348.
5. M. A. Biot, *Theory of elastic waves in fluid-saturated porous solid.* — I. Low-frequency range. J. Acoust. Soc. Amer. **28** (1956), 168–178.
6. M. A. Biot, *Theory of elastic waves in fluid-saturated porous solid.* — II Higher frequency range. J. Acoust. Soc. Amer. **28** (1956), 179–191.
7. Л. А. Молотков, *Эффективная модель пористо-жидкой среды.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **354** (2008), 190–211.

Molotkov L. A. Wave propagation in an isolated porous Biot layer with closed pores on the boundaries.

On the boundaries of this isolated porous Biot layer, the total stresses and normal relative displacement are equal to zero. For this layer, the symmetric and antisymmetric dispersion equations are established and investigated. The wave field consists of normal waves. In this layer one bend wave, two plate waves, and infinitely many normal waves propagate. For all these waves, we determine by analytical methods dispersion curves. The velocities of the bend wave and of the second plate wave for the infinite frequency are equal to the Rayleigh velocity.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 28 апреля 2008 г.