Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 354, 2008 г.

А. А. Мацковский

ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПРОЗРАЧНОМ КЛИНЕ

1. Постановка задачи

В работе рассматривается задача рассеяния плоской волны прозрачным "клином".

$$0 < \Phi \leq \phi \leq 2\pi - \Phi, \quad r \leq 0, \tag{1}$$

где r, ϕ — классическая полярная система координат, $0 < \phi < \pi$. Волновой процесс описывается уравнением Гельмгольца

$$\triangle u + k^2 u = 0, \tag{2}$$

и волновое число k внутри и вне клина одно и тоже.

Функция u гладкая в замыкании областей, занятых клином и внешней по отношению к клину области $-\Phi < \phi < \Phi$ за вычетом вершины клина $x = y = 0$, где мы требуем выполнения условия Мейкснера, которое запишем в виде:

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{r_0} \Big(\Big|\frac{\partial u}{\partial r}\Big|^2 + \frac{1}{r^2}\Big|\frac{\partial u}{\partial \phi}\Big|^2 + k^2|u|^2\Big) r dr d\phi < \infty, \quad \forall r_0 : \ 0 < r_0 < \infty. \tag{3}$$

Внутри клина волновое поле $u(x,y)$ будем обозначать u^I, во внешней среде u^O. Предполагаем, что на сторонах клина выполнены условия сопряжения:

$$\alpha_I u_I(\Phi) = \alpha_O u_O(\Phi), \quad \beta_I \frac{\partial u_I}{\partial n}(\Phi) = \beta_O \frac{\partial u_O}{\partial n}(\Phi), \tag{4}$$

$$\alpha_I u_I(-\Phi) = \alpha_O u_O(-\Phi), \quad \beta_I \frac{\partial u_I}{\partial n}(-\Phi) = \beta_O \frac{\partial u_O}{\partial n}(-\Phi).$$

The research was supported by NATO's public diplomatic division in the framework of "Science for Piece" under grant CBPMDSFPP 982376 .

Пусть на клин падает плоская волна $u_0^{\mathrm{inc}} = e^{-ik(x\cos\,\alpha + y\sin\,\alpha)}$. Таким образом направление распространения плоской волны описывается единичным вектором $-\cos\,\alpha e_x - \sin\,\alpha e_y$, где e_x и e_y — орты осей координат. Предположим, что $-\Phi < \alpha - \pi < \Phi$. Это условие того, что падающая волна идет "из бесконечности" к клину, а не наоборот. Построим отраженные и преломленные плоские волны от сторон клина. Каждая из этих волн отлична от нуля лишь в какой-то угловой области. Это так и для падающей волны. Несмотря на то, что этих волн может быть много, известно что их всегда конечное число. Подробнее об отраженных и преломленных волнах см. [3]. Сумму всех этих "неполных" плоских волн обозначим u_g. Функция u_g – разрывная.

Возвратимся к постановке задачи. Обозначим через u_d – разность

$$u - u_g := u_d. \tag{5}$$

Предполагается, что u_d удовлетворяет условиям излучения в интегральной форме:

$$\int_0^{2\pi} \left| \frac{\partial u_d}{\partial r} - \imath k u_d \right|^2 R d\phi \to 0, \quad (R \to \infty). \tag{6}$$

Теперь поставим четко задачу дифракции плоской волны на прозрачном клине:

1) Искомое волновое поле $u(r,\phi)$ в областях In и Out является дважды непрерывно дифференцируемой функцией и удовлетворяет там уравнению Гельмгольца.

2) На границе клина выполняются краевые условия (4).

3) В окрестности вершины клина(т.е. при $r \to 0$) выполняется условие Мейкснера.

4) Дифрагированное поле u_d удовлетворяет условиям излучения в форме (6).

2. О поведении решения в окрестности сингулярности границы

В дальнейшем мы увидим, что в окрестности вершины угла ($r \approx 0$) мы можем написать асимптотическое разложение решения по однородным функциям вида $u_\mu = r^\mu f_\mu(\phi)$. Подставим u_μ в уравнение

Гельмгольца и приравняем нулю старшие при $r \to 0$ члены (порядка $r^{\mu-2}$). В результате получим уравнение для $f(\phi)$:

$$f''(\phi) + \mu^2 f(\phi) = 0. \tag{7}$$

От функции $f(\phi)$ надо потребовать выполнения граничных условий, соответствующих нашей задаче. Также при поиске возможных значений μ необходимо учесть, что искомое решение задачи вблизи начала координат должно удовлетворять условиям Мейкснера. В итоге оказывается, что минимальным из возможных значений μ_n является $\mu_0 = 0$. Все остальные возможные значения μ_n в силу требования выполнения условий Мейкснера должны быть положительными, и после вычислений мы устанавливаем, что множество всех возможных собственных значений μ_n совпадает с множеством положительных корней уравнений

$$\frac{sin(\mu(\pi - 2\Phi))}{sin(\mu\pi)} = \pm\frac{\alpha_O\beta_I + \beta_O\alpha_I}{\alpha_I\beta_O - \beta_I\alpha_O}. \tag{8}$$

Подробнее о поведении решений в окрестности точки сингулярности границы написано в пункте 6 настоящей статьи.

3. Вывод разностных уравнений

Волновое поле внутри и вне клина будем обозначать $U^I(r,\phi)$ и $U^O(r,\phi)$ соответственно. Областью определения функции $U^I(r,\phi)$ по переменной ϕ является интервал $(\Phi, 2\pi - \Phi)$. Для удобства вместо поля $U^I(r,\phi)$ будем рассматривать поле

$$\widehat{U}^I(r,\phi) = U^I(r,\phi + \pi),$$

областью определения которого по переменной ϕ является симметричный интервал $(\Phi - \pi, \pi - \Phi)$.

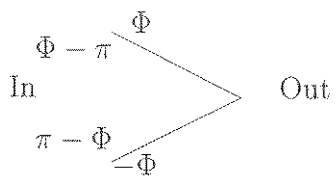

Рис. 1.

Подобно тому как и в случае решения задачи дифракции плоской волны на клине в случае краевых условий Дирихле или Неймана (см. [1]) когда волны не проходят внутрь угловой области, мы будем искать решение нашей задачи в виде интеграла Зоммерфельда

$$u(r,\phi) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi\imath}\displaystyle\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\left(s^I(z+\phi+\pi)-s^I(\phi+\pi-z)\right)dz, & \phi\in \mathrm{In} \\ \dfrac{1}{2\pi\imath}\displaystyle\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\left(s^O(z+\phi)-s^O(\phi-z)\right)dz, & \phi\in \mathrm{Out}\,, \end{cases} \tag{9}$$

где s^I и s^O мероморфные функции комплексной переменной z. Область γ_+ показана на рис. 2.

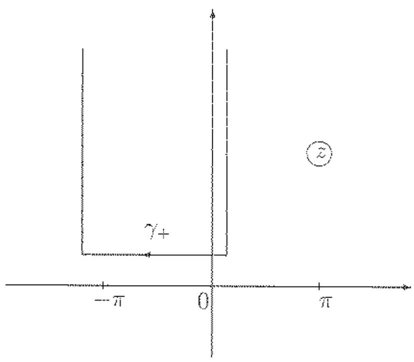

Рис. 2.

Введем также функцию $\widehat{s}^I(z) = s^I(z+\pi)$. Тогда

$$\widehat{U}^I(r,\phi) = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\left(\widehat{s}^I(z+\phi)-\widehat{s}^I(\phi-z)\right)dz. \tag{10}$$

При замене U^I на $\widehat{U}^I$ система уравнений (4) переходит в эквивалентную ей систему (11):

$$\begin{cases} \alpha_O U^O(\Phi) = \alpha_I \widehat{U}^I(\Phi - \pi), \\ \beta_O \frac{\partial U^O}{\partial \phi}(\Phi) = \beta_I \dfrac{\partial \widehat{U}^I}{\partial \phi}(\Phi - \pi), \\ \alpha_O U^O(-\Phi) = \alpha_I \widehat{U}^I(\pi - \Phi), \\ \beta_O \frac{\partial U^O}{\partial \phi}(-\Phi) = \beta_I \dfrac{\partial \widehat{U}^I}{\partial \phi}(\pi - \Phi). \end{cases} \tag{11}$$

В дальнейшем, с целью сокращения записей символ – $\widehat{}$ будем опускать, а когда найдем решение системы, сдвигом по переменной ϕ на π перейдем к искомому решению.

В двух словах, напомним о том, что интегральное представление Зоммерфельда есть преобразованное представление функции $U(r, \phi)$ в виде обратного преобразования Лапласа по переменной r (которое восстанавливает оригинал, если он сам гельдеров). Так же известно (см. [1]), что если для функции η выполнено $\eta(t)_{t\to 0} = O(t^\beta)$, $\beta > 0$, то про его образ $\widetilde{\eta}$ известно, что

$$\widetilde{\eta}(\tau) = O(|\tau|^{-1-\beta}), \quad |\tau| \to \infty, |\arg \tau| \le \mathrm{const} < \frac{\pi}{2}.$$

Ранее мы получили оценки касающиеся поведения u в окрестности $r = 0$, так что мы знаем, что в нулевом приближении $u = O(1)$. Следовательно его изображение (по r) при $|\tau| \to \infty$(и в указанной ранее полосе) есть $O(\frac{1}{\tau})$. Такого рода рассуждения наталкивают нас на предположение о том, что множитель который стоит перед $e^{-\imath kr\cos z}$ в подинтегральном выражении есть ограниченная в полосе $(z : -\pi \le \operatorname{Re} z \le 0, \operatorname{Im} z \ge 0)$ функция. Теперь потребовав от искомого поля u выполнения граничных условий (4) получим систему состоящую из четырех уравнений:

$$\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z} \left[\alpha_I \left(s^I(z+\Phi) - s^I(\Phi - z)\right) - \alpha_O \left(s^O(z+\Phi) - s^O(\Phi - z)\right)\right] dz = 0,$$

$$\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z} \left[\beta_I \left(s'^I(z+\Phi) - s'^I(\Phi - z)\right) - \beta_O \left(s'^O(z+\Phi) - s'^O(\Phi - z)\right)\right] dz = 0,$$

$$\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z} \left[\alpha_I \left(s^I(z+2\pi-\Phi) - s^I(2\pi - \Phi - z)\right)\right] dz$$

$$= \int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z} \left[\alpha_O \left(s^O(z-\Phi) - s^O(-\Phi - z)\right)\right] dz,$$

$$\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\left[\beta_I\left(s'^I(z+2\pi-\Phi)-s'^I(2\pi-\Phi-z)\right)\right]dz$$
$$=\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\left[\beta_O\left(s'^O(z-\Phi)-s'^O(-\Phi-z)\right)\right]dz.$$

Выше мы упоминали о предположении ограниченности подинтегральных выражений, в соответствии с этим мы можем переписать первое и третье уравнения с помощью теоремы Малюжинца (см. [1])

$$\alpha_O(s^O(z+\Phi)-s^O(\Phi-z))=\alpha_I(s^I(z+\Phi)-s^I(\Phi-z)),$$
$$\alpha_O(s^O(z-\Phi)-s^O(-\Phi-z))=\alpha_I(s^I(z+2\pi-\Phi)-s^I(2\pi-\Phi-z)).$$

Мы предполагаем регулярность функции s(z) в области

$$(z:-\pi-\Phi\le \operatorname{Re} z\le\Phi, \operatorname{Im} z>0)\bigcup(z:-\Phi\le\operatorname{Re} z\le\pi+\Phi, \operatorname{Im} z<0).$$

Также член $e^{-\imath kr\cos z}$, стоящий в подинтегральном выражении имеет сверхэкспоненциальное убывание при движении по контуру интегрирования γ_+ в сторону $\operatorname{Im} z\to+\infty$. Следовательно в силу сказанного можем проинтегрировать в второе и третее уравнения полученной ранее системы по частям и получим:

$$\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\left[\beta_I\left(s^I(z+\Phi)+s^I(\Phi-z)\right)\right]\sin z dz$$
$$=\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\left[\beta_O\left(s^O(z+\Phi)+s^O(\Phi-z)\right)\right]\sin z dz,$$
$$\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\left[\beta_I\left(s^I(z+2\pi-\Phi)+s^I(2\pi-\Phi-z)\right)\right]\sin z dz$$
$$=\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\left[\beta_O\left(s^O(z-\Phi)+s^O(-\Phi-z)\right)\right]\sin z dz.$$

Так как $s(z)$ при $|\operatorname{Im} z|\to\infty$ есть $O(1)$ и $|\sin z|\le \operatorname{const} e^{|\operatorname{Im} z|}$ пользуясь снова теоремой Малюжинца получаем эквивалент последних двух уравнений

$$\beta_O(s^O(z+\Phi)+s^O(\Phi-z))=\beta_I(s^I(z+\Phi)+s^I(\Phi-z))+c_+, \quad (12)$$

$$\beta_O(s^O(z-\Phi)+s^O(-\Phi-z)) = \beta_I(s^I(z+2\pi-\Phi)+s^I(2\pi-\Phi-z))+c_-. \quad (13)$$

Рассуждая точно так же как и при построении решения с краевыми условиями Неймана (см. [1, с. 46]), т.е., предполагая существование пределов у $s(z)$ при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$, получаем что константы c_+ и c_- равны, и т.к добавление константы к любому из полей s_I или s_O не меняет значения соответствующих интегралов Зоммерфельда, то сделав такой сдвиг мы приходим к окончательной системе на функции s^I и s^O:

$$\begin{cases} \alpha_O(s^O(z+\Phi)-s^O(\Phi-z)) = \alpha_I(s^I(z+\Phi)-s^I(\Phi-z)), \\ \alpha_O(s^O(z-\Phi)-s^O(-\Phi-z)) = \alpha_I(s^I(z+2\pi-\Phi)-s^I(2\pi-\Phi-z)), \\ \beta_O(s^O(z+\Phi)+s^O(\Phi-z)) = \beta_I(s^I(z+\Phi)+s^I(\Phi-z)), \\ \beta_O(s^O(z-\Phi)+s^O(-\Phi-z)) = \beta_I(s^I(z+2\pi-\Phi)+s^I(2\pi-\Phi-z)) \end{cases} \quad (14)$$

Рассмотрим случай, когда на прозрачный клин кроме плоской волны, падающей под углом $\phi_0 (0<\phi_0<\pi)$, падает еще одна плоская волна также под углом $-\phi_0$. Амплитуды этих волн предполагаются равными. Тогда волновые поля $U^{I,O}$ будут симметричными относительно нуля функциями по переменной ϕ. Если же вторая плоская волна будет отличаться знаком от первой, то в этом случае поля будут антисимметричными.

Рассмотрим сначала первый случай. Заметим, что из нечетности функций $s^{I,O}(z)$ следует четность соответствующих полей $U^{I,O}$ по переменной ϕ:

$$U^{I,O}(r,-\phi) = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\left(-s^{I,O}(\phi-z)+s^{I,O}(z+\phi)\right)dz$$
$$= U^{I,O}(r,\phi). \quad (15)$$

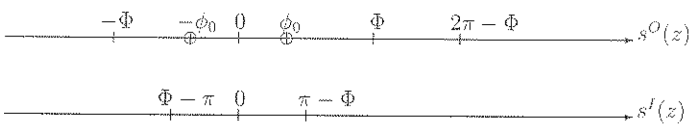

Рис. 3. Расположение полюсов функций $s^O(z)$ и $s^I(z)$.

Потребуем также, чтобы $s^O(z)$ была мероморфной в полосе $-\Phi < \operatorname{Re} z < \Phi$ и имела в ней ровно два полюса в точках ϕ_0 и $-\phi_0$ с вычетами равными единице, которые соответствуют двум падающим на клин плоским волнам, и чтобы s^I была также мероморфной и не имела особенностей в полосе $\Phi - \pi < \operatorname{Re} z < \pi - \Phi$.

Теперь напишем систему уравнений, которым должны удовлетворять искомые функции $s^{I,O}(z)$:

$$\begin{cases} \alpha_O(s^O(z+\Phi) - s^O(\Phi - z)) = \alpha_I(s^I(\Phi - \pi + z) - s^I(\Phi - \pi - z)), \\ \beta_O(s^O(z+\Phi) + s^O(\Phi - z)) = \beta_I(s^I(\Phi - \pi + z) + s^I(\Phi - \pi - z)), \\ s^I(z) = -s^I(-z); \quad s^O(z) = -s^O(-z). \end{cases} \tag{16}$$

Таким образом, найдя решения этой системы, удовлетворяющие указанным выше аналитическим свойствам, мы решим задачу о нахождении волнового поля в случае симметричного рассеяния двух плоских волн на прозрачном клине.

4. Решение системы разностных уравнений методом Фурье

Проинтегрируем полученную разностную систему по комплексной переменной z вдоль мнимой оси с весом $-\frac{e^{\imath\omega z}}{2\pi}$, постулируя законность этой операции. Зная аналитические свойства функций $s^{I,O}(z)$, приходим к новой системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_O(e^{-\imath\omega\Phi}F_0(\omega) - e^{\imath\omega\Phi}F_0(-\omega)) + \alpha_0(\imath[e^{\imath\omega(\Phi-\phi_0)} - e^{-\imath\omega(\Phi-\phi_0)}]) \\ = \alpha_I(e^{\imath\omega(\pi-\Phi)}F_I(\omega) - e^{-\imath\omega(\pi-\Phi)}F_I(-\omega)), \\ \beta_O(e^{-\imath\omega\Phi}F_0(\omega) + e^{\imath\omega\Phi}F_0(-\omega)) - \beta_0(\imath[e^{\imath\omega(\Phi-\phi_0)} + e^{-\imath\omega(\Phi-\phi_0)}]) \\ = \beta_I(e^{\imath\omega(\pi-\Phi)}F_I(\omega) + e^{-\imath\omega(\pi-\Phi)}F_I(-\omega)), \end{cases} \tag{17}$$

где

$$F_{I,O}(\omega) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\imath\infty}^{+\imath\infty} dz\, e^{\imath\omega z} s^{I,O}(z). \tag{18}$$

При этом очевидно, что из нечетности $s^{I,O}$, следует нечетность $F_{I,O}$.

Мы получили линейную систему уравнений на функции $F_{I,O}(\omega)$ и $F_{I,O}(-\omega)$ при каждом ω, которая вместе с требованием нечетности этих функций однозначно разрешима. Легко увидеть, что решение удовлетворяет условиям совместности, то есть, подставив в выражение для $F_{I,O}(-\omega)$ $\omega = -\omega'$, получим $F_{I,O}(\omega')$. В итоге получили искомые функции в виде

$$F_I(\omega) = \frac{D^I(\omega)}{P(\omega)}, \tag{19}$$

$$F_O(\omega) = \frac{D^O(\omega)}{P(\omega)}, \tag{20}$$

где

$$D^I(\omega) = -\alpha_0\beta_0 \cos(\omega\phi_0),$$

$$\begin{aligned} D^O(\omega) = \alpha_0\beta_I \sin(\omega(\pi-\Phi))\sin(\omega(\Phi-\phi_0)) \\ - \alpha_I\beta_O \cos(\omega(\pi-\Phi))\cos(\omega(\Phi-\phi_0)), \end{aligned}$$

$$P(\omega) = \alpha_I\beta_O \cos(\omega(\pi-\Phi))\sin(\omega\Phi) + \alpha_O\beta_I \cos(\omega\Phi)\sin(\omega(\pi-\Phi)).$$

Разложив числитель и знаменатель функций $F_{I,O}$ по формулам Эйлера и откинув экспоненты, дающие наименьший вклад при $\operatorname{Im} z \to \pm\infty$, получаем асимптотические выражения

$$\begin{cases} F_O(\omega) \to c_\pm e^{-|\operatorname{Im}\omega|\phi_0} & (\operatorname{Im}\omega \to \pm\infty), \\ F_I(\omega) \to c_+ e^{-|\operatorname{Im}\omega|(\phi_0+\pi)} & (\operatorname{Im}\omega \to +\infty), \\ F_I(\omega) \to c_- e^{-|\operatorname{Im}\omega|(\pi-\phi_0)} & (\operatorname{Im}\omega \to -\infty) \end{cases} \tag{21}$$

Функции $s^I(z)$ и $s^O(z)$ представляются интегралами (15) и (16) соответственно:

$$s^I(z) = v.p. \int_{-\imath\infty}^{+\imath\infty} dw\, e^{-\imath\omega z} \frac{D^I(\omega)}{P(\omega)}, \tag{22}$$

$$s^O(z) = v.p. \int_{-\imath\infty}^{+\imath\infty} dw\, e^{-\imath\omega z} \frac{D^O(\omega)}{P(\omega)}. \tag{23}$$

Подынтегральные функции $F_{O,I}(w)$ имеют полюса первого порядка в точке $\omega = 0$. Исходя из поведения этих функций в окрестности нуля, приходим к заключению, что

$$s^{I,O}(z) = \int_{-\imath\infty}^{+\imath\infty} dw\, e^{-\imath\omega z} F_{I,O}(w) \to \pm c \quad (\operatorname{Im} z \to \pm\infty). \tag{24}$$

Второй случай, когда искомое волновое поле $U^{I,O}(r,\phi)$ нечетно по переменной ϕ, рассматривается аналогично. В этом случае функции $s^{I,O}$ и $F_{I,O}$, удовлетворяющие разностной системе, являются четными. Решение систем дает

$$F_I(\omega) = \frac{K^I(\omega)}{L(\omega)}, \tag{25}$$

$$F_O(\omega) = \frac{K^O(\omega)}{L(\omega)}, \tag{26}$$

где

$$K^I(\omega) = -\imath\alpha_O\beta_O \sin(\omega\phi_0),$$

$$L(\omega) = \alpha_O\beta_I \cos(\omega(\pi-\Phi)) sin(\omega\Phi) + \alpha_I\beta_O \cos(\omega\Phi)\sin(\omega(\pi-\Phi)),$$

$$K^O(\omega) = -\imath(\alpha_0\beta_I \sin(\omega(\Phi-\phi_0))\cos(\omega(\pi-\Phi))$$
$$+\alpha_I\beta_O\cos(\omega(\Phi-\phi_0))\sin(\omega(\pi-\Phi))).$$

Данные, касающиеся поведения $F^{O,I}$ при $|\operatorname{Im} w| \to \infty$ в случае симметричного волнового поля, переносятся без изменения и на этот случай.

Что касается поведения в окрестности $\omega = 0$, то полученные функции $F^{O,I}$ не имеют полюсов в этой точке.

В итоге в случае, когда $U(r,\phi) = -U(r,-\phi)$, для функций $s^I(z)$ и $s^O(z)$ получаем интегральные выражения

$$s^I(z) = \int_{-\imath\infty}^{+\imath\infty} dw\, e^{-\imath\omega z} \frac{K^I(\omega)}{L(\omega)}, \tag{27}$$

$$s^O(z) = \int_{-\imath\infty}^{+\imath\infty} dw\, e^{-\imath\omega z} \frac{K^O(\omega)}{L(\omega)}, \tag{28}$$

5. Выделение плоских волн

Из асимптотических оценок (21) видно, что интегральное представление (16) для $s^O(z)$ применимо только для значений аргумента z таких, что $\operatorname{Re} z \in (-\phi_0, \phi_0)$. При значениях z таких, что $\operatorname{Re} z \le -\phi_0$, интеграл расходится. Эта расходимость возникает таким же образом как и расходимость ряда, представляющего функцию $\frac{1}{z-\phi_0}$ в круге $|z| < \phi_0$, при значениях $z : |z| > \phi_0$.

Для аналитического продолжения $s^O(z)$ на полосу $\mathrm{Re}\, z \in (-\Phi, \Phi)$ можно вычесть из функции F_O, стоящей в подынтегральном выражении для s^O, член вида $e^{\imath\omega\phi_0} - e^{-\imath\omega\phi_0}$, обобщенное преобразование Фурье от которого сходится при $z \in (-\phi_0, \phi_0)$ к мероморфной функции $\frac{1}{z-\phi_0} - \frac{1}{z+\phi_0}$, и затем прибавить к полученному сходящемуся в круге $\mathrm{Re}\, z \in (-\Phi, \Phi)$ интегралу сумму этих двух полюсов. Сосчитав асимптотику интеграла Зоммерфельда при $kr \to \infty$ от полюсов вида $\frac{1}{z-\phi_0}$ и $-\frac{1}{z+\phi_0}$, видно, что они соответствует плоским волнам, падающим на клин под углами ϕ_0 и $-\phi_0$ соответственно. Аналогичным образом s^O и s^I могут быть распространены на всю комплексную плоскость. При дальнейшем расширении области определения переменной z мы снова будем сталкиваться с расходимостью интегралов, что соответствует полюсам функции s^O, находящимся в соответствии с геометро-оптической структурой искомого волнового поля.

Предположим, что мы знаем значения функций s^O и s^I на интервалах $z \in (-\Phi, \Phi)$ и $z \in (\Phi - \pi, \pi - \Phi)$ соответственно. Для определенности будем считать, что мы имеем дело со случаем симметричного волнового поля, что соответствует разностной системе (6). Легко увидеть, что из первых двух уравнений этой системы можно вычислить значения функций s^O и s^I на интервалах $z \in (\Phi, \Phi + 2\alpha)$ и $z \in (\Phi - \pi, \Phi - \pi - 2\alpha)$ соответственно, где $2\alpha = 2\min[\Phi, \pi - \Phi]$ – наименьшее значение длин интервалов, на которых изначально заданы функции s^O и s^I. Теперь, воспользовавшись нечетностью этих функций, доопределяем в итоге s^O и s^I на интервалы $z \in (-\Phi - 2\alpha, \Phi + 2\alpha)$ и $z \in (\Phi - \pi - 2\alpha, \pi - \Phi + 2\alpha)$. Теперь размер областей определения функций увеличен, и мы снова можем повторить проделанную процедуру. Таким образом s^O и s^I распространяются на всю вещественную ось.

6. Поведение волнового поля вблизи вершины клина

Как уже говорилось ранее, вблизи вершины клина волновое поле асимптотически представляется в виде ряда однородных функций (x, y) $(x = y = 0$ – вершина клина) возрастающей степени однородности. Некоторые выводы, касающиеся поведения поля в этой области, были получены во втором параграфе, однако локальными рассмотрениями вопрос решается не до конца: коэффициенты при соответствующих выражениях $r^\mu \sin(\mu\phi)$ зависят от глобального поведения волнового поля (см. [1, 2.8]). Получив явное выражение для волнового поля, мы имеем возможность определить и эти коэффициенты. Для определенности будем исследовать случай симметричного волнового поля $U^O(kr,\phi)$ в Out области. Искомая асимптотика определяется поведением функции $s^O(z)$ при $\mathrm{Im}\, z \to_{-}^{+} \infty$, где $s^O(z)$ дается интегральным выражением (16), при этом основной вклад при $\mathrm{Im}\, z \to +\infty$ вносится интегрированием в области малых значений ω. В силу известных нам аналитических свойств функции $s^O(z)$, контур интегрирования может быть продеформирован так, как это показано на рис. 4.

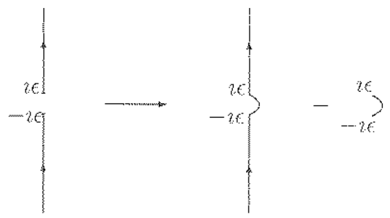

Рис. 4.

Интеграл вдоль полуокружности, охватывающей точку $\omega = 0$, в пределе равен полувычету подынтегрального выражения в этой точке

$$-\frac{\pi\imath\alpha_I\beta_O}{\alpha_O\beta_I(\pi-\Phi)+\alpha_I\beta_O\Phi}. \tag{29}$$

Оставшийся интеграл мы снова можем взять по продеформированному контуру, показанному на следующем рисунке.

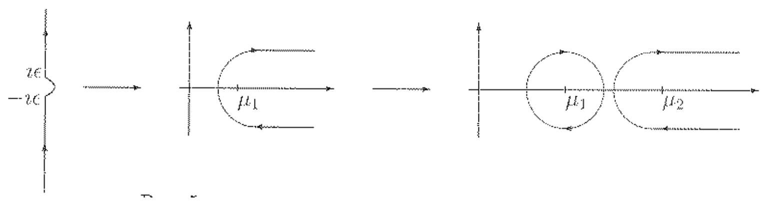

Рис. 5.

Здесь точки μ_1 и μ_2 являются полюсами подынтегрального выражения, совпадающими с нулями знаменателя выражения, представляющего функцию $F^O(\omega)$. Нетрудно сосчитать, что эти нули принадлежат множеству

$$\Pi = \left[\mu : \frac{\sin(\mu(\pi - 2\Phi))}{\sin(\mu\pi)} = \frac{\alpha_O \beta I + \beta_O \alpha_I}{\alpha_I \beta_O - \beta_I \alpha_O}\right], \tag{30}$$

о котором шла речь в разделе 2. Следует заметить, что корни этого уравнения расположены симметрично относительно нуля. При этом все это время мы деформировали контур в сторону $\operatorname{Re} z > 0$. Такая процедура из соображений о сходимости интеграла допустима в случае, если мы исследуем асимптотику $s^O(z)$ при $\operatorname{Im} z \to -\infty$. В случае $\operatorname{Im} z \to +\infty$ контур нужно деформировать в противоположном направлении. При этом зацепления будут происходить в полюсах подынтегрального выражения, лежащих на отрицательной части полуоси, которые, как уже было сказано, отличаются от лежащих на положительной полуоси лишь знаком.

Вычет функции F^O в точке $\omega = \mu_1$ равен

$$C^{\mathrm{Out}}_{\mu_1}(\Phi, \phi_0, \alpha, \beta) = \frac{D^I(\omega)}{G(\omega)}, \tag{31}$$

где

$$G(\omega) = \alpha_O \beta_I (\pi \cos(\mu_1(\pi - \Phi)) \cos(\mu_1 \Phi) - \Phi \cos(\mu_1(\pi - 2\Phi)))$$
$$+ \alpha_I \beta_O (\Phi \cos(\mu_1(\pi - 2\Phi)) - \pi \sin(\mu_1 \Phi) \sin(\mu_1(\pi - \Phi))). \tag{32}$$

Тогда первые два члена, асимптотически приближающие $s^O(z)$ при $z \to -\infty$, представляются в виде

$$\frac{\pi \imath \alpha_I \beta_O}{\alpha_O \beta_I (\pi - \Phi) + \alpha_I \beta_O} - 2\pi \imath C^{\mathrm{Out}}_{\mu_1}(\Phi, \phi_0, \alpha, \beta) e^{-\imath \mu_1 z}. \tag{33}$$

Аналогично исследуется поведение $s^O(z)$ при $z \to +\infty$.

Выделяя с помощью такой процедуры каждый полюс функции F^O, получаем представление функции $s^O(z)$ в виде ряда

$$s^O(z) = -\left(\frac{1}{2}\operatorname{res}\left[F^O(\omega)\right]_{\omega=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-i\mu_k z} \operatorname{res}\left[F^O(\omega)\right]_{\omega=\mu_k}\right),$$
$$\operatorname{Im} z < 0, \tag{34}$$

$$s^O(z) = \frac{1}{2}\mathrm{res}\,\left[F^O(\omega)\right]_{\omega=0} + \sum_{k=1}^{+\infty} e^{i\mu_k z}\mathrm{res}\,\left[F^O(\omega)\right]_{\omega=\mu_k}, \qquad \mathrm{Im}\, z > 0, \quad (35)$$

где $\mu_k \in \Pi$ и $\mu_k > 0$. Введем обозначение

$$\Sigma^O(z,\phi) = s^O(\phi + z) - s^O(\phi - z), \quad (36)$$

и пусть для определенности $\mathrm{Im}\, z > 0$. Тогда, с помощью полученных формул можем написать

$$\Sigma^O(z,\phi) = \mathrm{res}\,\left[F^O(\omega)\right]_{\omega=0} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \cos\,(\mu_k\phi)\mathrm{res}\,\left[F^O(\omega)\right]_{\omega=\mu_k}. \quad (37)$$

Воспользовавшись формулой (см. [1])

$$\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos\, z + i\mu_k z} dz = -2\pi e^{-i\mu_k \frac{\pi}{2}} J_{\mu_k}(kr), \quad (38)$$

помня, что

$$U^O(kr,\phi) = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos\, z}\Sigma(z,\phi)dz,$$

получим разложение волнового поля u^O в виде ряда

$$U^O(kr,\phi) = \frac{\pi\imath\alpha_I\beta_O}{\alpha_O\beta_I(\pi-\Phi)+\alpha_I\beta_O\Phi} J_0(kr) - 4\pi\sum_{k=1}^{+\infty}\cos\,(\mu_k\phi)C^O_{\mu_k}J_{\mu_k}(kr), \quad (39)$$

где

$$C^O_{\mu_k} = \mathrm{res}\,\left[F^O(\omega)\right]_{\omega=\mu_k}.$$

Функцию Бесселя $J_\mu(kr)$ можно разложить в ряд

$$J_\mu(kr) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{\Gamma(i+\mu+1)\Gamma(i+1)}\left(\frac{kr}{2}\right)^{2i+\mu},$$

при этом

$$J_\mu(kr) = \frac{(kr)^\mu}{2^{mu}\Gamma(\mu+1)}\left[1+O(kr)^2\right], \quad kr\to 0, \quad \mu \neq \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Следовательно в окрестности вершины клина ($kr \approx 0$) волновое поле $u^O(kr,\phi)$ можно разложить по однородным функциям $r^\mu f(\phi)$:

$$u^O(kr,\phi) = c_0 + f_1(\phi)r^{\nu_1} + f_2(\phi)r^{\nu_2} + \dots, \qquad (40)$$

где

$$\nu_i \in [\mu_1, \mu_1+2, \dots, \mu_1+2n, \dots, \mu_l, \mu_l+2, \dots, \mu_l+2d, \dots],$$

$$\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n < \dots .$$

7. Асимптотический анализ волнового поля при $kr \to \infty$

Теперь мы имеем представление искомого волнового поля в виде интеграла Зоммерфельда:

$$U^{I,O}(r,\phi) = \frac{1}{2\pi\imath}\int\limits_{\gamma_+} e^{-\imath kr\cos z}\left(s^{I,O}(z+\phi) - s^{I,O}(\phi - z)\right)dz,$$

где $s^{I,O}(z)$ представляют собой сумму ранее полученных нами функций соответствущих симметричному и антисимметричному случаям. Асимптотическое исследование этого интеграла осуществляется при помощи метода перевала. Для получения асимптотики поля при $kr \to \infty$ совершим переход от интеграла по контуру изображенному на рис. к интегралам по стационарным контурам (рис.6) (см. [1, глава 2]).

При этом выделяются вычеты в полюсах, соответствующие отраженным и преломленным волнам, а интегралы по стационарным контурам дают волну, рассеянную вершиной. Результаты этих рассмотрений имеют тот же вид, что и в монографии [1]. Обозначим волну, рассеянную вершиной угла через U_c. В первом приближении

$$u_c^{I,O}(kr,\phi) \approx \frac{e^{-\imath\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{\imath kr}}{\sqrt{kr}}(s^{I,O}(-\pi+\phi) - s^{I,O}(\pi-\phi)), \quad (kr\to\infty). \quad (41)$$

Формула (37) определяет часть волны, физический смысл которой – это цилиндрическая волна, рассеянная вершиной клина, которая расходится от вершины как из центра.

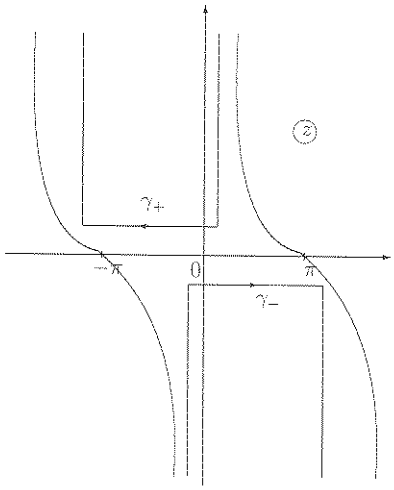

Рис. 6.

Литература

1. В. М. Бабич, М. А. Лялинов, В. Э. Грикуров, *Метод Зоммерфельда–Малюжинца в задачах дифракции.* С.-Петербург, 2003.
2. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики.* Т. IV, Ч. II, Гостехиздат, М.-Л., 1951.
3. J.-P. Croisille, G. Lebeau, *Diffraction by an immersed elastic wedge.* — Lect. Notes Math. **1723** Springer, 1999.
4. А. Н Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа.* Наука, М., 1989.

Matskovskiy A. A. Diffraction of plane wave by a transparent wedge: Sommerfeld–Malyuzhinets approach.

We consider a time-harmonic diffraction of a plane wave by a transparent wedge of an arbitrary opening by the Sommerfeld–Malyuzhinets approach, see, e.g., [1]. The wave propagation velocity inside the wedge and outside are equal. An explicit solution is presented, which is studied asymptotically as $kr \to \infty$ and $kr \to 0$.

С.-Петербургский государственный университет

E-mail: : keenonph@rambler.ru

Поступило 19 апреля 2008 г.