Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 354, 2008 г.

Н. Я. Кирпичникова

ВОЛНЫ РЕЛЕЯ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА НА СВОБОДНОЙ ОТ НАПРЯЖЕНИЙ ГРАНИЦЕ

При подземных и подводных взрывах уже на сравнительно небольших расстояниях от источника основная часть упругой энергии приходится на поверхностные волны. Это связано в первую очередь с более слабым затуханием поверхностных волн по сравнению с объемными. Волны, у которых как продольное, так и поперечное возмущение являются комплексными плоскими волнами с ограниченными смещениями, называются поверхностными волнами Релея. Они имеют большое значение в сейсмологии и наблюдаются неизменно при каждом землетрясении.

В 1887 году Релей [1] указал для случая полупространства со свободной границей некоторое синусоидальное решение, удовлетворяющее предельным условиям и затухающее с глубиной. Эта работа послужила источником целой серии работ, в которых аналогичные решения даются для более сложных граничных условий и для случая слоистых упругих сред. Однако во всех этих решениях присутствовало лишь распространение фазы некоторого синусоидального решения, удовлетворяющего предельным условиям.

Самым крупным явлением в этом направлении явилась работа Лэмба [2] (1904 г.), в которой во всей полноте рассматривалась задача о распространении колебаний в полупространстве со свободной границей. В этой работе впервые была выяснена роль поверхностной волны.

В 1937 году вышел русский перевод с немецкого языка книги [3], в которой (глава XII) С. Л. Соболев построил так называемые "плоские" волны Релея. Это волны, у которых как продольное, так и поперечное возмущение являются комплексными плоскими волнами с ограниченными смещениями.

Далее были построены "обобщенные" волны Релея, распространяющиеся вдоль поверхности однородного [4] и неоднородного [5] упругого тела произвольной формы в соответствии с принципом Ферма

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 08-01-00511 .

(т.е. вдоль поверхностных лучей). Для этих волн был развит аналог известного лучевого метода вычисления интенсивности волновых фронтов (см. [6, 7]).

Дальнейшее развитие математических методов для описания волн Релея связано с работой Номофилова [9], где в предположении анизотропной линейной упругости волна представлена в виде суперпозиции трех волн с комплексными фазами, и с работой [10]. Методом пограничного слоя в [10] изучена аналогичная задача.

В настоящей статье рассматриваются решения уравнений теории упругости, имеющие разрыв только на свободной от напряжений границе (волны Релея). Находятся начальные данные для комплексной интенсивности поверхностных волн Релея в двух простейших средах. Первая упругая среда заполняет полупространство, параметры Ламе и плотность которой зависят от глубины. Вторая среда ограничена кривой, заданной естественным уравнением. Параметры этой среды зависят от длины дуги вдоль кривой.

Точечный источник расположен на границе в точке $(x_0 = 0, z_0 = 0)$ для первой среды и в точке $(s_0 = 0, n = 0)$ для второй среды, параметр n является расстоянием вдоль нормали к кривой от данной точки (s, n) внутри среды до точки основания нормали s к кривой.

1. Волна Релея для неоднородной по глубине упругой полуплоскости

Рассмотрим упругую полуплоскость (x, z) такую, что $\{-\infty < x < \infty,\ z \geqslant 0\}$, параметры Ламе λ, μ и плотность среды ρ которой зависят от координаты z. Граница $z = 0$ считается свободной от напряжений. Вектор смещений волнового поля волны Релея представляет решение следующей задачи при $z > 0$

$$(\lambda + 2\mu)u_{xx} + \mu u_{zz} + (\lambda + \mu)w_{xz} + \rho\omega^2 u + \mu_z(w_x + u_z) = 0, \qquad (1.1)$$

$$(\lambda+\mu)u_{xz} + \mu w_{xx} + (\lambda+2\mu)w_{zz} + \rho\omega^2 w + \lambda_z(u_x + w_z) + 2\mu_z w_z = 0, \qquad (1.2)$$

с граничными условиями на линии $z = 0$:

$$\sigma_{xz} \equiv \mu(u_z + w_x)|_{z=0} = -\delta(x), \quad (\vee = 0), \quad x > 0, \qquad (1.3)$$

$$\sigma_{zz} \equiv (\lambda + 2\mu)w_z + \lambda u_x|_{z=0} = 0, \quad (\vee = -\delta(x)). \qquad (1.4)$$

Здесь символ $\vee$ означает тот факт, что будут рассмотрены точечные источники двух видов.

В соответствии с физическим смыслом для однозначной разрешимости рассматриваемой задачи к уравнениям (1.1)–(1.2) следует добавить условие излучения вектора напряжений $\mathbf{u}$ при $r = \sqrt{x^2 + z^2} \to \infty$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r} - ik\mathbf{u}\right) = 0, \quad k = \frac{\omega}{c}. \tag{1.5}$$

Здесь c есть поверхностная скорость волны, которая удовлетворяет известному уравнению Релея.

Решение $\mathbf{u}$ проблемы (1.1)–(1.5) будем искать в виде асимптотического лучевого разложения (см. [5]) суммы продольного и поперечного векторов смещений вида

$$\mathbf{u} = e^{i\omega\tau_a(x,z)} \begin{pmatrix} U_a \\ W_a \end{pmatrix} + e^{i\omega\tau_b(x,z)} \begin{pmatrix} U_b \\ W_b \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

Здесь амплитуды U и W имеют вид асимптотических разложений по обратным степеням большого параметра ω

$$U = \sum_{k=0} \frac{U_k}{(i\omega)^k}, \quad W = \sum_{k=0} \frac{W_k}{(i\omega)^k}. \tag{1.7}$$

Подставив вектор смещений заданного вида (1.6)–(1.7) в уравнения теории упругости (1.1)–(1.2) при $z \geq 0$, получим систему рекуррентных операторных уравнений (см. [7])

$$N(\tau, \mathbf{U}_{k+2}) + M(\tau, \mathbf{U}_{k+1}) + L(\tau, \mathbf{U}_k) = 0. \tag{1.8}$$

Операторы N, M и L имеют следующие выражения:

$$N(\tau, \mathbf{U}) = (\lambda + \mu)\nabla\tau(\nabla\tau \cdot \mathbf{U}) + [\mu(\nabla\tau)^2 - \rho]\mathbf{U}; \tag{1.9}$$

$$M(\tau, \mathbf{U}) = (\lambda + \mu)[\nabla(\nabla\tau \cdot \mathbf{U}) + \nabla\tau(\nabla \cdot \mathbf{U})] + \mu[\Delta\tau \cdot \mathbf{U}$$
$$+2(\nabla\tau \cdot \nabla U_i)\mathbf{e}_i] + \nabla\lambda(\nabla\tau \cdot \mathbf{U}) + (\nabla\mu \cdot \mathbf{U})\nabla\tau + (\nabla\mu \cdot \nabla\tau)\mathbf{U}; \tag{1.10}$$

$$L(\tau, \mathbf{U}) = (\lambda + \mu)\nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{U}) + \mu\Delta\mathbf{U} + \nabla\lambda(\nabla \cdot \mathbf{U})$$
$$+\nabla\mu\left(\nabla U_i + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i}\right)\mathbf{e}_i. \tag{1.11}$$

Применяя приемы классического лучевого метода, окончательно для вертикальной и горизонтальной компонент вектора продольных и поперечных смещений находим серию уравнений.

Итак, решение системы уравнений упругости (1.1)–(1.2) имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b = e^{i\omega\tau_a}\left(\mathbf{U}_{0a} + \frac{\mathbf{U}_{1a}}{i\omega} + \cdots\right) + e^{i\omega\tau_b}\left(\mathbf{U}_{0b} + \frac{\mathbf{U}_{1b}}{i\omega} + \cdots\right).$$

Дальнейшие приближения нам не потребуются. Для вектора продольных смещений получены следующие выражения

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{0a} &= \varphi_0(x,z)\nabla\tau_a; \\ \mathbf{U}_{1a} &= \varphi_1(x,z)\nabla\tau_a + \frac{a^2}{\lambda+\mu}M(\tau_a, \varphi_0\nabla\tau_a); \end{aligned} \tag{1.12}$$

Компонента $\mathbf{U}_{1a}^0$ вектора смещений $\mathbf{U}_{1a}$ равная оператору M

$$\mathbf{U}_{1a}^0 = \frac{a^2}{\lambda+\mu}M(\tau_a, \varphi_0\nabla\tau_a),$$

ортогональна асимптотически главной составляющей $\mathbf{U}_{0a}$, т.е. вектору $\nabla\tau_a$. Она называется примесной составляющей волны $\mathbf{u}_a$.

Мы рассматриваем случай, когда скорость продольных $a = a(z)$ и поперечных волн $b = b(z)$ зависит от z, а скорость распространения волны Релея $c = c(x) = \mathrm{const}$ есть величина постоянная. Тогда эйконал $\tau_a(x,z)$ будет равен

$$\begin{aligned} i\omega\tau_a &= i\omega\left[\frac{x}{c} + i\int_0^z \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2(z)}}dz\right] \\ &\approx i\omega\left[\frac{x}{c}\right] - \omega\, z\left[\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2(0)}} + O(z)\right]. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Вектор поперечных смещений получен в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{0b} &= \psi_0(x,z)\boldsymbol{\xi}; \quad (\nabla\tau_b\cdot\boldsymbol{\xi}) = 0; \\ \mathbf{U}_{1b} &= \psi_1(x,z)\boldsymbol{\xi} - \frac{b^2}{\lambda+\mu}M(\tau_b, \psi_0\boldsymbol{\xi}); \end{aligned} \tag{1.14}$$

где вектор $\boldsymbol{\xi}$ ортогонален $\nabla\tau_b$ и имеет следующие компоненты

$$\boldsymbol{\xi} = \left(\frac{\partial\tau_b}{\partial z}, -\frac{\partial\tau_b}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial\tau_b}{\partial z}, -\frac{1}{c}\right); \quad \frac{\partial\tau_b}{\partial z} = i\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2(z)}}.$$

Примесная составляющая $\mathbf{U}^0_{1b}$ волны $\mathbf{u}_b$ ортогональна асимптотически главной составляющей $\mathbf{U}_{0b}$, т.е. вектору $\boldsymbol{\xi}$, и равна

$$\mathbf{U}^0_{1b} = -\frac{b^2}{\lambda+\mu} M(\tau_b, \psi_0\boldsymbol{\xi}).$$

Итак, получено решение в виде суммы продольной и поперечной волн, распространяющихся вдоль границы с фазовой скоростью, близкой к скорости c релеевской волны. Это решение удовлетворяет условию излучения (1.5), что следует из выбора поперечных составляющих эйконала в виде:

$$\frac{\partial\tau_a}{\partial z} = i\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2(z)}}, \quad \frac{\partial\tau_b}{\partial z} = i\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2(z)}}.$$

Остается удовлетворить условиям отсутствия напряжений на границе (1.3)–(1.4). Построим решение с однородными граничными условиями. На границе $z = 0$ имеем из первого уравнения (1.3)

$$\frac{\partial\tau_a}{\partial x}W_{1a} + \frac{\partial\tau_b}{\partial x}W_{1b} + \frac{\partial\tau_a}{\partial z}U_{1a} + \frac{\partial\tau_b}{\partial z}U_{1b} + \frac{\partial W_{0a}}{\partial x} + \frac{\partial W_{0b}}{\partial x} + \frac{\partial U_{0a}}{\partial z} + \frac{\partial U_{0b}}{\partial z} = 0.$$

Второе уравнение (1.4) дает следующую связь:

$$(\lambda+2\mu)\Big[\frac{\partial\tau_a}{\partial z}W_{1a} + \frac{\partial\tau_b}{\partial z}W_{1b}\Big] + \lambda\Big[\frac{\partial\tau_a}{\partial x}U_{1a} + \frac{\partial\tau_b}{\partial x}U_{1b}\Big]$$

$$+(\lambda+2\mu)\Big[\frac{\partial W_{0a}}{\partial z} + \frac{\partial W_{0b}}{\partial z}\Big] + \lambda\Big[\frac{\partial U_{0a}}{\partial x} + \frac{\partial U_{0b}}{\partial x}\Big] = 0.$$

Компоненты U_{ia}, Wia продольного и компоненты U_{ib}, Wib, $i = 0, 1$, поперечного векторов найдены из уравнений (1.1)–(1.2) в виде

$$U_{0a} = \frac{\varphi_0}{c}, \quad W_{0a} = \varphi_0\frac{\partial\tau_a}{\partial z}, \quad U_{0b} = \psi_0\frac{\partial\tau_b}{\partial z}, \quad W_{0b} = -\frac{\psi_0}{c}; \qquad (1.15)$$

$$U_{1a} = \frac{\varphi_1}{c} + \frac{a^2}{\lambda + \mu} M^x(\tau_a, \varphi_0 \nabla \tau_a),$$

$$W_{1a} = \varphi_1 \frac{\partial \tau_a}{\partial z} - \frac{a^2}{(\lambda + \mu) c \frac{\partial \tau_a}{\partial z}} M^x(\tau_a, \varphi_0 \nabla \tau_a),$$

$$U_{1b} = \psi_1 \frac{\partial \tau_b}{\partial z} - \frac{b^2}{(\lambda + \mu)} M^x(\tau_b, \psi_0 \boldsymbol{\xi}), \quad W_{1b} = -\frac{\psi_1}{c} - \frac{b^2 c \frac{\partial \tau_b}{\partial z}}{(\lambda + \mu)} M^x(\tau_b, \psi_0 \boldsymbol{\xi}).$$

Далее, граничное условие в главном приближении дает нам уравнение Релея и связь функций φ_0, ψ_0 с комплексной интенсивностью волны Релея $\chi_0(x)$. Вводя следующие обозначения

$$l_1 = \frac{2}{c^2} - \frac{1}{b^2}, \quad l_2 = \frac{2}{c^2} - \frac{1}{a^2},$$

$$\frac{\partial \tau_a}{\partial z} = i\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2(z)}}, \quad \frac{\partial \tau_b}{\partial z} = i\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2(z)}},$$

запишем уравнение Релея

$$\left(\frac{2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2 + 4\frac{1}{c^2}\frac{\partial \tau_a}{\partial z}\frac{\partial \tau_b}{\partial z} = 0; \quad l_1^2 + 4\frac{1}{c^2}\frac{\partial \tau_a}{\partial z}\frac{\partial \tau_b}{\partial z} = 0. \tag{1.16}$$

Комплексная интенсивность $\chi_0(x)$ связана с интенсивностью продольной и поперечной волн выражениями

$$\varphi_0 = l_1 \chi_0; \quad \psi_0 = \frac{2}{c}\frac{\partial \tau_a}{\partial z}\chi_0. \tag{1.17}$$

Будем следовать обозначениям статьи (см. [5]) и найдем обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее комплексную интенсивность $\chi_0(x)$ волны Релея:

$$A\frac{\partial \chi_0}{\partial x} - (E + F)\chi_0 = 0. \tag{1.18}$$

$$A = -\frac{8}{c} l_1^2 + \frac{4}{c} l_1 l_2 \frac{\frac{\partial \tau_b}{\partial z}}{\frac{\partial \tau_a}{\partial z}} + \frac{4}{c} l_1^2 \frac{\frac{\partial \tau_a}{\partial z}}{\frac{\partial \tau_b}{\partial z}}, \quad A > 0.$$

$$E = E_\rho \frac{\partial}{\partial z} \ln \rho + E_b \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{1}{b^2} + E_a \frac{\partial}{\partial z} \ln \frac{1}{a^2}.$$

$$F = F_\rho \frac{\partial}{\partial x} \ln \rho + F_a \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{a^2} F_b \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{b^2} + F_c \frac{\partial}{\partial x} \ln \frac{1}{c^2}.$$

Тогда из уравнения (1.18) получим следующее

$$\chi_0(x) = \chi_0(0) \exp\left\{ \int\limits_0^x \frac{E}{A} dx \right\} \exp\left\{ \int\limits_0^x \frac{F}{A} dx \right\}. \tag{1.19}$$

В случае полуплоскости с упругими параметрами, зависящими от z, комплексная интенсивность представляется в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых характеризует собой влияние того или иного фактора на волну Релея. Первый сомножитель $\chi_0(0)$ характеризует начальный вид волны Релея, второй сомножитель E показывает, что скорость изменения упругих параметров λ, μ, ρ с глубиной влияет только на фазу волны Релея, но не влияет на ее амплитуду. Этот коэффициент был найден в статье [5] с единственной опечаткой в четвертом слагаемом коэффициента E_b: вместо знака $-$ следует поставить знак $+$ перед слагаемым

$$\frac{4b^4}{a^2 - b^2} \frac{\frac{\partial \tau_b}{\partial z}}{c^2} \Big(\frac{1}{b^2} - \frac{2}{c^2} \Big).$$

Существенно позже статьи [5], где был найден коэффициент E, подобный комплексный экспоненциальный множитель в амплитуде волны был получен применительно к другой физической ситуации М. В. Берри (см. [8]). Впоследствии такой экспоненциальный множитель с коэффициентом E стал называться фазой Берри. Полностью коэффициент E будет приведен в конце секции.

Третий множитель F является вещественным и показывает, что скорость изменения по s упругих параметров λ, μ, ρ и релеевской скорости c вдоль S влияет только на амплитуду волны Релея, но не влияет на ее фазу. Однако для поверхностных волн Релея этот амплитудный множитель вдоль луча просто вычисляется (см. [11]) и равен:

$$\exp\left\{ \int\limits_0^x \frac{F}{A} dx \right\} = \sqrt{\frac{c}{e_0}}\,\Big|_0^x.$$

Это следует из интегрального закона сохранения энергии (см. [11, 10]), так как вдоль луча должно сохраняться инвариантным выражение

$$\frac{e_0}{c} |\chi_0(x)|^2 = \mathrm{const} = |\chi_0(0)|^2.$$

В последнем равенстве вместо множителя геометрической расходимости стоит единица, так как мы рассматриваем двумерную задачу, а функция e_0 равна:

$$e_0 = \frac{\rho}{c^2\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}}\left[\frac{6}{c^2}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{4}{a^2b^2}-\frac{6}{b^4}+\frac{c^2}{b^6}\right] = \frac{c\rho l_1 A}{8\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}},$$

где $l_1 = \frac{2}{c^2} - \frac{1}{b^2}$.

Окончательно получим выражение для главных (асимптотически) компонент вектора смещений волны Релея в виде:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b = \chi_0(0)\sqrt{\frac{e_0(0)c(x)}{e_0(x)c_0(0)}}\exp\left\{\int\limits_0^x \frac{E}{A}dx\right\}e^{i\omega x/c}$$

$$\times\left[l_1 e^{-\omega z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}\nabla\tau_a + \frac{2\tau'_{za}}{c}\boldsymbol{\xi}e^{-\omega z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}}\right]. \tag{1.20}$$

Заметим, что для упругой среды, с параметрами, зависящими только от глубины z, множитель $\sqrt{\frac{l_0(0)c(x)}{l_0(x)c_0(0)}}$ в формуле (1.20) равен единице.

Перейдем к нахождению начального значения интенсивности $\chi_0(0)$.

С этой целью будем искать решение проблемы (1.1)–(1.5) с точечным источником на границе $\sigma_{xz}|_{z=0} = -\delta(x)$. Случай другой ориентации источника рассмотрим позже. Ищем функцию Грина в виде

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega[\frac{x}{c}\zeta+\alpha(z,\zeta)]}\,\frac{\omega}{c}\,\mathbf{U}\,d\zeta. \tag{1.21}$$

Подставим решение вида (1,21) в уравнения (1.1)–(1.2) и получим из условия разрешимости системы уравнений и условий излучения значение искомых функций

$$\alpha'_{za} = \frac{\partial\alpha_a}{\partial z} = i\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{1}{a^2}},\quad \alpha'_{zb} = \frac{\partial\alpha_b}{\partial z} = i\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{1}{b^2}}$$

$$\alpha_a(z) = i\int\limits_0^z\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{1}{a^2}}\,dz,\quad \alpha_b(z) = i\int\limits_0^z\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{1}{b^2}}\,dz,$$

$$W_a = \frac{\partial \alpha_a}{\partial z} \frac{c}{\zeta} U_a; \quad U_b = -\frac{\partial \alpha_b}{\partial z} \frac{c}{\zeta} W_b.$$

Используя граничные условия (1.3)–(1.4) и связь компонент, найдем значение подинтегральных функций U_a, W_a и U_b, W_b: Горизонтальная составляющая u_a вектора продольных смещений будет выражена следующим интегралом

$$u_a = \frac{i}{2c\pi\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx\zeta} e^{-\omega z \sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}}} \times \frac{2\alpha'_{zb}}{\left[4\alpha'_{za}\alpha'_{zb} + \frac{c^2}{\zeta^2}\left(2\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2\right]} d\zeta. \quad (1.22)$$

Вертикальная компонента w_b вектора поперечных смещений функции Грина, распространяющаяся с фазовой скоростью, близкой к скорости релеевской волны, равна

$$w_b = \frac{i}{2\pi\mu} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ikx\zeta} e^{-\omega z \sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}}} \times \frac{\left(2\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)}{\zeta\left[4\alpha'_{za}\alpha'_{zb} + \frac{c^2}{\zeta^2}\left(2\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2\right]} d\zeta. \quad (1.23)$$

В знаменателях обеих формул (1.22)–(1.23) в квадратных скобках стоит выражение

$$\Delta(\zeta) = \left[4\alpha'_{za}\alpha'_{zb} + \frac{c^2}{\zeta^2}\left(2\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2\right], \quad (1.24)$$

которое при $\zeta = \pm 1$ является уравнением Релея и обращается в нуль. Найдем вычет в точке $\zeta = \pm 1$ для формулы (1.22)–(1.23). Для этого необходимо найти производную по ζ от (1.24), а затем вычислить эту производную при $\zeta = \pm 1$. Интересно отметить, что эта производная множителем отличается от определяющего коэффициента A:

$$\Delta'(\zeta)|_{\zeta=\pm 1} = 8\,l_1 - 4\,l_2\,\frac{\alpha'_{zb}}{\alpha'_{za}} - 4\,l_1\,\frac{\alpha'_{za}}{\alpha'_{zb}} = -\frac{A\,c}{l_1}.$$

Наконец, вычислим интегралы (1.22)–(1.23) по теореме о вычетах. Получаем значение составляющих

$$u_a = \frac{2\,\tau'_{zb}\,l_1}{c^2\,\mu\,A} e^{ikx} e^{-\omega z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}},$$

$$\tau'_{zb} = \frac{\partial \tau_b}{\partial z}\Big|_{z=0} = i\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}. \tag{1.25}$$

$$w_b = \frac{l_1^2}{c\,\mu\,A} e^{ikx} e^{-\omega z\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}}. \tag{1.26}$$

Сравнивая компоненты (1.25), (1.26) с соответствующими составляющими (1.15) и учитывая формулы связи (1.17), находим, что начальный вид интенсивности волны Релея $\chi(0)$ для точечного источника на границе $\sigma_{xz}|_{z=0} = -\delta(x)$, равен

$$\chi(0) = \frac{2\tau'_{zb}}{\mu\,A\,c}.$$

Другое граничное условие $\sigma_{zz}|_{z=0} = -\delta(x)$ дает начальное значение комплексной интенсивности в виде:

$$\chi(0) = -\frac{l_1}{\mu\,A}.$$

Приведем комплексный коэффициент E, влияющий на фазу волны Релея и зависящий от скорости изменения с глубиной параметров Ламе и плотности упругого полупространства

$$E = E_\rho \frac{\partial}{\partial z} \ln\,\rho + E_b \frac{\partial}{\partial z} \ln\,\frac{1}{b^2} + E_a \frac{\partial}{\partial z} \ln\,\frac{1}{a^2},$$

$$E_\rho = \Big[-l_1^2 \frac{a^2}{a^2-b^2}\frac{\partial \tau_a}{\partial z} + \frac{2\,b^2}{a^2-b^2}\frac{\partial \tau_b}{\partial z}\frac{1}{c^2} l_1$$

$$+l_1 \frac{2}{c^2}\frac{\partial \tau_a}{\partial z} - \frac{2}{a^2-b^2}\frac{1}{c^2}\frac{\partial \tau_a}{\partial z} + \frac{2}{c^2 b^2}\frac{\partial \tau_a}{\partial z}\Big];$$

$$E_b = \Bigg[\frac{\frac{\partial \tau_a}{\partial z}}{b^4 c^2\left(\frac{\partial \tau_b}{\partial z}\right)^2} + \frac{4\frac{\partial \tau_a}{\partial z}}{c^2(a^2-b^2)} - \frac{4b^2 l_1}{c^2(a^2-b^2)}\frac{\partial \tau_b}{\partial z}$$

$$-\frac{2\frac{\partial\tau_a}{\partial z}}{c^2b^2}+\frac{2b^2l_1^2}{a^2-b^2}\frac{\partial\tau_a}{\partial z}+2\,l_1^2\frac{\partial\tau_a}{\partial z}-\frac{4}{c^2}l_1\frac{\partial\tau_a}{\partial z}\Bigg];$$

$$E_a=l_1\frac{\frac{\partial\tau_b}{\partial z}}{a^2c^2\left(\frac{\partial\tau_a}{\partial z}\right)^2};\quad l_1=\frac{2}{c^2}-\frac{1}{b^2};$$

$$\frac{\partial\tau_a}{\partial z}=i\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}};\quad \frac{\partial\tau_b}{\partial z}=i\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}.$$

2. Волна Релея для упругой полуплоскости с гладкой искривленной границей

Рассмотрим упругую среду, ограниченную кривой S. Кривая S задана естественным уравнением: $R=R(s)$, где R есть радиус кривизны кривой в точке s. Координата s служит длиной дуги кривой и отсчитывается от некоторой фиксированной точки на кривой s_0. Параметры упругой среды с искривленной границей зависят от координаты s. Граница среды свободна от напряжений. Точечный источник находится на границе в точке $(s_0=0, n=0)$. Параметр n является расстоянием вдоль нормали к кривой от данной точки (s,n) внутри среды $n>0$ до точки основания нормали s к кривой.

В криволинейных координатах $q^1=s$, $q^2=n$ уравнения теории упругости запишем в виде

$$\frac{1}{2}\sigma_{ss}\frac{\partial}{\partial s}G^{ss}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial s}\left[\sigma_{ss}G^{ss}\sqrt{g}\right]+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial n}\left[\sigma_{sn}\sqrt{g}\right]+\rho\omega^2G_{ss}u=0, \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{2}\sigma_{ss}\frac{\partial}{\partial n}G^{ss}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial s}\left[\sigma_{sn}G^{ss}\sqrt{g}\right]+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial n}\left[\sigma_{nn}\sqrt{g}\right]+\rho\omega^2w=0, \quad (2.2)$$

с граничными условиями на линии $n=0$:

$$\sigma_{sn}\equiv\mu\Big(G_{ss}\frac{\partial u}{\partial n}+\frac{\partial w}{\partial s}\Big|_{n=0}\Big)=-\delta(s),\quad (\vee=0),\quad s>0, \quad (2.3)$$

$$\sigma_{nn}\equiv(\lambda+2\mu)\frac{\partial w}{\partial n}+\lambda\frac{\partial u}{\partial s}+\lambda\frac{w}{R}\Big|_{s=0}=0,\quad (\vee=-\delta(s)). \quad (2.4)$$

Символ $\vee$ означает тот факт, что будут рассмотрены точечные источники двух видов.

В соответствии с физическим смыслом для однозначной разрешимости рассматриваемой задачи к уравнениям (2.1)–(2.4) следует добавить условие излучения вектора напряжений вида (1.5).

В формулах (2.1)–(2.4) $c = c(s)$ есть поверхностная скорость волны, которая удовлетворяет уравнению Релея, метрический тензор G_{ss} найден в виде $G_{ss} = \left(1 + \frac{n}{R}\right)^2 = 1 + 2n/R(s) + n^2/R^2$, определитель метрического тензора g равен $g = G_{ss} = \left(1 + \frac{n}{R}\right)^2$, другие составляющие метрического тензора равны: $G_{sn} = 0$, $G_{nn} = 1$. Компоненты тензора напряжений σ_{ij}, $i, j = 1, 2$, связаны с компонентами вектора смещений $\mathbf{u} = (u^1, u^2) = (u, w)$ следующими соотношениями

$$\sigma_{ss} = \lambda \frac{G_{ss}}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^r}(\sqrt{g} u^r) + \mu \left[\frac{\partial G_{ss}}{\partial q^r} u^r + 2G_{ss} \frac{\partial u}{\partial s} \right];$$

$$\sigma_{sn} = \mu \left[G_{nn} \frac{\partial w}{\partial s} + G_{ss} \frac{\partial u}{\partial n} \right];$$

$$\sigma_{nn} = \lambda \frac{1}{\sqrt{g}} \left[\frac{\partial}{\partial s}(\sqrt{g} u) + \frac{\partial}{\partial n}(\sqrt{g} w) \right] + 2\mu \frac{\partial w}{\partial n};$$

Решение $\mathbf{u} = (u, w)$ проблемы (2.1)–(2.4) будем искать в виде асимптотического лучевого разложения вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b = e^{i\omega\tau_a} \left(\mathbf{U}_{0a} + \frac{\mathbf{U}_{1a}}{i\omega} + \cdots \right) + e^{i\omega\tau_b} \left(\mathbf{U}_{0b} + \frac{\mathbf{U}_{1b}}{i\omega} + \cdots \right). \quad (2.5)$$

Компоненты U_{ia}, Wia продольного и компоненты $U_{ib}, Wib, i = 0, 1,$ поперечного векторов найдены из уравнений (2.1)–(2.2) в виде

$$\begin{aligned} U_{0a} &= \varphi_0 \frac{\partial \tau_a}{\partial s} \left(1 + \frac{n}{R}\right), \quad W_{0a} = \varphi_0 \frac{\partial \tau_a}{\partial n}, \\ U_{0b} &= \psi_0 \frac{\partial \tau_b}{\partial n}, \quad W_{0b} = -\psi_0 \frac{\partial \tau_b}{\partial s} \left(1 + \frac{n}{R}\right); \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} U_{1a} &= \frac{\varphi_1}{c} + \frac{a^2}{\lambda + \mu} M^s(\tau_a, \varphi_0 \nabla \tau_a), \\ W_{1a} &= \varphi_1 \frac{\partial \tau_a}{\partial n} - \frac{a^2}{(\lambda + \mu) c \frac{\partial \tau_a}{\partial z}} M^s(\tau_a, \varphi_0 \nabla \tau_a), \end{aligned}$$

$$U_{1b} = \psi_1 \frac{\partial \tau_b}{\partial z} - \frac{b^2}{(\lambda+\mu)} M^s(\tau_b, \psi_0 \boldsymbol{\xi}), \quad W_{1b} = -\frac{\psi_1}{c} - \frac{b^2 c \frac{\partial \tau_b}{\partial z}}{(\lambda+\mu)} M^s(\tau_b, \psi_0 \boldsymbol{\xi}).$$

Здесь оператор M определен формулой (1.10), но абсолютное дифференцирование ∇ в криволинейных координатах следует вычислять по правилу:

$$\nabla_k U^i = \frac{\partial U^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kp} U^p,$$

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} G^{kl} \left(\frac{\partial G_{li}}{\partial x^j} + \frac{\partial G_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

Мы рассматриваем случай, когда скорость продольных $a = a(s)$, поперечных волн $b = b(s)$ и скорость распространения вдоль границы S волны Релея $c = c(s)$ зависят от s. Тогда эйконал $\tau_a(s,n)$ будет равен

$$\tau_a = \left[\int\limits_0^s \frac{ds}{c(s)} + i\,n \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}} \right]. \tag{2.7}$$

Аналогично найден и эйконал τ_b

$$\tau_b = \left[\int\limits_0^s \frac{ds}{c(s)} + i\,n \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}} \right], \tag{2.8}$$

причем оба эйконала на границе S равны

$$\tau_a \Big|_S = \tau_b \Big|_S = \int\limits_0^s \frac{ds}{c} = \tau.$$

Пусть точка $s = 0$ на кривой S определяет положение волнового фронта волны Релея в момент времени $t = 0$. Из теоремы И. Г. Петровского [12] следует принцип Ферма для релеевской волны: экстремаль интеграла $\int ds/c(s)$, где $c(s)$ — релеевская скорость в точке s, определяет геометрическое место точек s таких, что

$$t = \int\limits_0^s \frac{ds}{c}$$

дает положение волнового фронта волны Релея в момент времени t. Каждую точку на экстремали будем характеризовать параметром τ, где

$$\tau = \int_0^s \frac{ds}{c}, \quad (s \in S).$$

Как показал И. Г. Петровский [12], скорость в точке s на кривой S определяется только значениями упругих постоянных в этой точке и находится из уравнения Релея (1.16).

Найдем связь компонент метрического тензора G_{ss} и $G_{\tau\tau} = g_{\tau\tau} - 2nb_{\tau\tau} + O(n^2)$, где параметр τ есть время, за которое волна Релея придет из точки $s = 0$ в точку s, распространяясь со скоростью $c(s)$. Сравнив эти тензоры, получим

$$\frac{b_{\tau\tau}}{c^2} = -\frac{1}{R}.$$

Комплексная интенсивность $\chi_0(s)$ связана с интенсивностью продольной и поперечной волн выражениями

$$\varphi_0 = l_1\,\chi_0; \quad \psi_0 = \frac{2}{c}\,\frac{\partial\tau_a}{\partial n}\,\chi_0. \tag{2.9}$$

Будем следовать обозначениям статьи (см. [5]) и найдем обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее комплексную интенсивность $\chi_0(x)$. Проведя громоздкие выкладки, для комплексной интенсивности волны Релея $\chi_0(s)$ получим уравнение:

$$A\,\frac{\partial\chi_0}{\partial s} + \left(\frac{C}{R} - F\right)\chi_0 = 0. \tag{2.10}$$

$$A = -\frac{8}{c}l_1^2 + \frac{4}{c}l_1 l_2 \frac{\frac{\partial\tau_b}{\partial n}}{\frac{\partial\tau_a}{\partial n}} + \frac{4}{c}l_1^2 \frac{\frac{\partial\tau_a}{\partial n}}{\frac{\partial\tau_b}{\partial n}}, \quad A > 0.$$

$$F = F_\rho\,\frac{\partial}{\partial s}\,\ln\,\rho + F_b\,\frac{\partial}{\partial s}\,\ln\,\frac{1}{b^2} + F_a\,\frac{\partial}{\partial s}\,\ln\,\frac{1}{a^2} + F_c\,\frac{\partial}{\partial s}\,\ln\,\frac{1}{c^2}.$$

Из уравнения (2.10) получим (см. рассуждения после формулы (1.19))

$$\chi_0(s) = \chi_0(0)\sqrt{\frac{c(s)}{e_0(s)}}\,\sqrt{\frac{e_0(0)}{c(0)}}\,\exp\left\{\int_0^s \frac{C}{AR}\,ds\right\}. \tag{2.11}$$

В случае упругой среды с параметрами, зависящими от s, комплексная интенсивность представляется в виде произведения трех сомножителей, каждый из которых характеризует собой влияние того или иного фактора на волну Релея. Первый сомножитель $\chi_0(0)$ характеризует начальный вид волны Релея, второй вещественный сомножитель F показывает, что скорость изменения по s упругих параметров λ, μ, ρ и релеевской скорости c вдоль границы S влияет только на амплитуду волны Релея, но не влияет на ее фазу. Из интегрального закона сохранения энергии (см. [10, 11]) следует, что

$$\exp\int\limits_0^s \frac{F}{A}ds = \sqrt{\frac{c}{e_0}}\,\Big|_0^s.$$

Третий сомножитель C, стоящий при кривизне вдоль луча $\frac{b_{\tau\tau}}{c^2} = -\frac{1}{R}$, является чисто мнимой величиной и показывает, что кривизна вдоль луча влияет только на фазу волны Релея и не влияет на ее амплитуду. Коэффициент C будет приведен в конце раздела.

Перейдем к нахождению начального значения интенсивности $\chi_0(0)$, т.е. к нахождению первого сомножителя в формуле (2.10).

С этой целью будем искать решение проблемы (2.1)–(2.4), (1.5) с точечным источником на границе $\sigma_{sn}|_{n=0} = -\delta(s); \sigma_{nn}|_{n=0} = 0$. Другой источник на границе $\sigma_{sn}|_{n=0} = 0; \sigma_{nn}|_{n=0} = -\delta(s)$ рассмотрим ниже. Ищем функцию Грина в виде

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega[\tau\zeta+\alpha(n,\zeta)]}\,\omega\,\mathbf{U}\,d\zeta. \tag{2.12}$$

Подставим решение вида (2.12) в уравнения (2.1)–(2.2) и получим из условия разрешимости системы уравнений и условий излучения (1.5) значение искомых функций

$$\alpha'_{na} = \frac{\partial\alpha_a}{\partial n} = i\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}}, \quad \alpha'_{nb} = \frac{\partial\alpha_b}{\partial n} = i\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}},$$

$$\alpha_a(n,\zeta) = i\,n\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{a^2}}, \quad \alpha_b(n,\zeta) = i\,n\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}},$$

$$W_a = \frac{\partial\alpha_a}{\partial n}\frac{c}{\zeta}U_a; \quad U_b = -\frac{\partial\alpha_b}{\partial n}\frac{c}{\zeta}W_b.$$

Используя граничные условия (2.3)–(2.4) и связь компонент, найдем значение подынтегральных функций U_a, W_a и U_b, W_b. Горизонтальная составляющая u_a^s вектора продольных смещений $\mathbf{u}_a$ будет выражена следующим интегралом

$$u_a = \frac{i}{2c\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau\zeta} e^{-\omega n\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{1}{a^2}}} \frac{2\alpha'_{nb}}{\left[4\alpha'_{na}\alpha'_{nb}+\frac{c^2}{\zeta^2}\left(2\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\right]} d\zeta. \tag{2.13}$$

Вертикальная компонента w_b вектора поперечных смещений функции Грина, распространяющаяся с фазовой скоростью, близкой к скорости релеевской волны, равна

$$w_b = \frac{i}{2\pi\mu}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau\zeta} e^{-\omega n\sqrt{\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{1}{b^2}}} \frac{\left(2\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)}{\zeta\left[4\alpha'_{na}\alpha'_{nb}+\frac{c^2}{\zeta^2}\left(2\frac{\zeta^2}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2\right]} d\zeta. \tag{2.14}$$

В знаменателях обеих формул (2.13)–(2.14) в квадратных скобках стоит выражение

$$\Delta(\zeta) = \left[4\alpha'_{na}\alpha'_{nb} + \frac{c^2}{\zeta^2}\left(2\frac{\zeta^2}{c^2} - \frac{1}{b^2}\right)^2\right], \tag{2.15}$$

которое при $\zeta = \pm 1$ является уравнением Релея и обращается в нуль.

Вычислив интегралы (2.13)–(2.14) по теореме о вычетах, получим

$$u_a = \frac{2\,\alpha'_{nb}\,l_1}{c^2\,\mu\,A} e^{i\omega\tau} e^{-\omega n\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}. \tag{2.16}$$

$$w_b = \frac{l_1^2}{c\,\mu\,A} e^{i\omega\tau} e^{-\omega n\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}}. \tag{2.17}$$

Сравним компоненты (2.16), (2.17) с соответствующими составляющими (2.6). Из формулы связи (2.9) находим, что начальный вид интенсивности волны Релея $\chi(0)$ для точечного источника на границе $\sigma_{sn}\big|_{n=0} = -\delta(s)$; $\sigma_{nn}\big|_{n=0} = 0$, равен

$$\chi(0) = \frac{2}{\mu\,A\,c}\,\frac{\partial\tau_b}{\partial n}.$$

Другое граничное условие $\sigma_{sn}\big|_{n=0} = 0$; $\sigma_{nn}\big|_{n=0} = -\delta(s)$ дает начальное значение комплексной интенсивности в виде:

$$\chi(0) = -\frac{l_1}{\mu\,A}.$$

Приведем значение чисто мнимого коэффициента C:

$$C = \Big(\frac{1}{b^2} - \frac{2}{c^2}\Big) \frac{C_1 \tau_n^a + C_2 \tau_n^b}{\Big(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\Big)\Big(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\Big)},$$

где

$$C_1 = 2\Big(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\Big)\Big(\frac{1}{c^2 b^2} - \frac{1}{b^4} - \frac{1}{c^4}\Big),$$

$$C_2 = \Big(\frac{1}{b^2} - \frac{2}{c^2}\Big)\Big(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}\Big)\Big(\frac{1}{c^2} - \frac{3}{2b^2}\Big) + \frac{2}{c^2}\Big(\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}\Big)\Big(\frac{2}{c^2} - \frac{3}{a^2}\Big);$$

В формулах для коэффициентов введены сокращенные обозначения

$$\tau_n^a = \frac{\partial \tau_a}{\partial n}\Big|_{n=0}, \quad \tau_n^b = \frac{\partial \tau_b}{\partial n}\Big|_{n=0},$$

$$\frac{\partial \tau_a}{\partial n}\Big|_{n=0} = i\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{a^2}}, \quad \frac{\partial \tau_b}{\partial n}\Big|_{n=0} = i\sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{b^2}}.$$

Окончательный вид вектора смещений волны Релея в случае искривленной границы S и зависимости параметров среды и релеевской скорости от длины дуги s вдоль свободной от напряжений границы таков:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_a + \mathbf{u}_b = \chi_0(0)\sqrt{\frac{l_0(0)c(s)}{b(s)c(0)}}\ \exp\Big\{\int\limits_0^s \frac{C}{RA} ds\Big\} e^{i\omega\tau}$$

$$\times\Big[l_1\, e^{-\omega n\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}}}\nabla\tau_a + \frac{2\tau_n^a}{c}\boldsymbol{\xi} e^{-\omega n\sqrt{\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}}}\Big]. \tag{2.18}$$

Здесь

$$\nabla\tau_a = \Big(\frac{1}{c}, \frac{\partial\tau_a}{\partial n}\Big), \quad \boldsymbol{\xi} = \Big(\frac{\partial\tau_b}{\partial n}, -\frac{1}{c}\Big).$$

Коэффициент C влияет на фазу волны Релея, R есть радиус кривизны границы S в точке s.

Литература

1. Lord Rayleigh (Jonn William Strutt), *On waves propagated along the plane surface of an elastic solid.* — Proc. London Math. Soc. **17** (1887), 4–11.
2. H. Lamb, *On the propagation of Tremors over the surface of an elastic solid.* — Phil. Trans. **A 203**, (1904), 1–42.
3. Ф. Франк, Р. Мизес, *Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики.* Гостехиздат, М. (1937).
4. В. М. Бабич, *О распространении волн Релея по поверхности однородного упругого тела произвольной формы.* — Докл. АН СССР **137**, No. 6 (1961), 1263–1267.
5. В. М. Бабич, Н. Я. Русакова (Кирпичникова), *О распространении волн Релея по поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы.* — ЖВМ и МФ, **2**, No. 4 (1962), 652–665.
6. J. B. Keller, R. M. Lewis, B. D. Seckler, *Asymptotic solution of some diffraction problems.* — Communs Pure and Appl. Math. **9**, No. 2 (1956), 207–265.
7. А. С. Алексеев, В. М. Бабич, Б. Я. Гельчинский, *Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов.* — В сб.: Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Изд-во ЛГУ, Л. No. 5 (1961), 3–35.
8. M. V. Berry, *Quantal phase factors accompanying adiabatic changes.* — Proc. Roy. Soc. London, **A 392** (1984), 45–57.
9. В. Е. Номофилов, *О распространении квазистационарных волн Релея в неоднородной анизатропной упругой среде.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **89**, (1979), 234–245.
10. V. M. Babich, N. Ya. Kirpichnikova, *A new approach to the problem of Rayleigh wave propagation along the surface of an inhomogeneous elastic body.* — Wave Motion **2**, No. 4 (1962), 652–665.
11. П. В. Крауклис, *К оценке интенсивности поверхностных волн Релея и Стоунли на неоднородной трассе.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **15** (1969), 115–121.
12. И. Г. Петровский, *О скорости распространения разрывов производных смещений на поверхности неоднородного упругого тела произвольной формы.* — Докл. АН СССР **47**, No. 4 (1945), 258–261.

Kirpichnikova N. Ya. Raleigh waves radiated from a point source at the boundary free from tensions.

We consider such solutions of the elastic theory equations that suffer a discontinuity only at the boundary free from tensions (Raleigh waves). We find initial data for the complex intensity of the surface Raleigh waves in the two simple media. The first elastic medium fills in the half-space with Lame parameters and density depending on the depth. The second medium is bounded by a curve determined by natural equation. The parameters of the second medium depend on the arc-length along the curve.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН

Поступило 19 мая 2008 г.