Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 354, 2008 г.

Г. Л. Заворохин

О ЛУЧЕВОМ МЕТОДЕ ДЛЯ СРЕД БИО

Работа посвящена исследованию распространения волн в пористой среде Био, которая содержит упругую фазу(скелет) и жидкую фазу. Среда рассматривается трехмерной, безграничной, анизотропной и неоднородной, при этом жидкая фаза является изотропной. На основании известных уравнений среды Био строится функция Лагранжа и используется принцип наименьшего действия Гамильтона. В результате записываются уравнения Эйлера, выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий и система динамических уравнений Био. Векторы смещений в упругой и жидкой фазах представляются в виде формальных асимптотических разложений. Для нахождения членов этого разложения устанавливаются рекуррентные соотношения и определяется главный член пространственно- временного разложения. В случае изотропной неоднородной среды построенное волновое поле разлагается на две продольные волны, соответствующие упругой и жидкой фазам, и на поперечную волну. В этом случае устанавливается аналог закона Рытова, выведенного для упругой среды. В целом построение геометро-оптического разложения для системы динамических уравнений Био проводится по схеме, изложенной, например, в [2].

Основные результаты работы состоят в использовании пространственно- временного лучевого метода для исследования поля в среде Био и в выводе аналога закона Рытова.

1. Вывод уравнений среды Био

Пусть в трехмерном пространстве задана среда Био. Волновое поле будем описывать двумя векторами смещений

$$\mathbf{u}(t, x^1, x^2, x^3), \mathbf{U}(t, x^1, x^2, x^3), \qquad (1)$$

Работа выполнена при поддержке NATO's public diplomatic division in the framework of "science for peace" under grant CBP.M.D.SFPP 982376 .

соответствующими упругой и жидкой фазам. Считаем, что смещения u_k, U_k и их производные по координатам малы, то есть рассматриваются малые деформации среды.

Вначале рассмотрим анизотропный неоднородный случай. Анизотропией обладает скелет пористой среды. Жидкая фаза рассматривается изотропной.

Систему уравнений среды Био определяет задание функции Лагранжа $\mathcal{L}$. Естественно предположить, что, как и в упругости, как и в (гидро-)акустике:

$$\mathcal{L} = T - \Pi, \tag{2}$$

где T – плотность кинетической энергии среды Био, Π – плотность потенциальной энергии среды Био.

Предполагается, что имеет место принцип Гамильтона:

$$\delta \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega} \mathcal{L}\left(x^i, \frac{\partial u_k}{\partial x^\alpha}, \frac{\partial U_k}{\partial x^\alpha}\right) d\mathbf{r}dt = 0, \quad k = 1,2,3,\ \alpha = 0,1,2,3 \tag{3}$$

(δ – символ вариации, Ω – некоторая область в пространстве с декартовой системой координат (x^1, x^2, x^3), $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки среды, индекс i пробегает числа 1,2,3; считаем, что время $x^0{=}t$ непосредственно в лагранжиан не входит).

Уравнения Эйлера для лагранжиана $\mathcal{L} = T - \Pi$ имеют вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial T}{\partial \frac{\partial u_j}{\partial t}} - \dfrac{\partial}{\partial x^i}\dfrac{\partial \Pi}{\partial \varepsilon_{ij}} = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\partial T}{\partial \frac{\partial U_j}{\partial t}} - \dfrac{\partial}{\partial x^i}\dfrac{\partial \Pi}{\partial E_{ij}} = 0 \end{cases} \tag{4}$$

Выражения для плотностей кинетической T и потенциальной Π энергий являются соответственно положительно определенной и неотрицательной квадратичными формами:

$$T = \frac{\rho_{11}^{'}(\mathbf{r})}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{11}^{''}(\mathbf{r})}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{11}^{'''}(\mathbf{r})}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)^2$$

$$+\frac{\rho_{22}^{'}(\mathbf{r})}{2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{22}^{''}(\mathbf{r})}{2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial t}\right)^2 + \frac{\rho_{22}^{'''}(\mathbf{r})}{2}\left(\frac{\partial U_3}{\partial t}\right)^2 + \tag{5}$$

$$+\rho_{12}^{'}(\mathbf{r})\left(\frac{\partial u_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial U_1}{\partial t}\right)+\rho_{12}^{''}(\mathbf{r})\left(\frac{\partial u_2}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial U_2}{\partial t}\right)+\rho_{12}^{'''}(\mathbf{r})\left(\frac{\partial u_3}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial U_3}{\partial t}\right)$$

Коэффициенты в выражении для плотности кинетической энергии T образуют положительно определенную симметричную матрицу $\rho_{pq}(\mathbf{r})$ размером 6×6 $(p=1,2,3,4,5,6,\ q=1,2,3,4,5,6)$ и их значения зависят от структуры пористой среды, плотностей упругой и жидкой сред в ней(см. [1]).

$$\Pi=\frac{1}{2}c_{ijkl}(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\frac{1}{2}C_{ijkl}(\mathbf{r})E_{ij}E_{kl}+D_{ijkl}(\mathbf{r})\varepsilon_{ij}E_{kl}, \qquad (6)$$

где ε_{ij}, E_{ij}- тензоры деформаций, соответствующие упругой и жидкой фазам, $c_{ijkl}(\mathbf{r}), C_{ijkl}(\mathbf{r}), D_{ijkl}(\mathbf{r})$, – соответственно тензоры коэффициентов, отвечающие за упругую фазу, жидкую фазу и за взаимодействие обеих фаз со свойствами симметрии $c_{ijkl}=c_{klij}=c_{jikl}=c_{ijlk}$, $C_{ijkl}=C_{klij}=C_{jikl}=C_{ijlk}$, $D_{ijkl}=D_{jikl}=D_{ijlk}$; $i,j,k,l=1,2,3$.

Подставим выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий T (5) и Π (6) в систему уравнений Эйлера (4), получим систему динамических уравнений среды Био:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial c_{ijkl}}{\partial x^i}\varepsilon_{kl}+c_{ijkl}\dfrac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x^i}+\dfrac{\partial D_{ijkl}}{\partial x^i}E_{kl}+D_{ijkl}\dfrac{\partial E_{kl}}{\partial x^i}=\rho_{11}^{(j)}\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}+\rho_{12}^{(j)}\dfrac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \\ \dfrac{\partial C_{ijkl}}{\partial x^i}E_{kl}+C_{ijkl}\dfrac{\partial E_{kl}}{\partial x^i}+\dfrac{\partial D_{klij}}{\partial x^i}\varepsilon_{kl}+D_{klij}\dfrac{\partial \varepsilon_{kl}}{\partial x^i}=\rho_{12}^{(j)}\dfrac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}+\rho_{22}^{(j)}\dfrac{\partial^2 U_j}{\partial t^2} \end{cases} \qquad (7)$$

(в правых частях равенств по $j=1,2,3$ нет суммирования, а (j) означает количество штрихов равное номеру j).

2. Вывод рекуррентных уравнений

Будем искать решения системы уравнений (7) в виде формальных асимптотических разложений (ПВЛ-разложений):

$$\mathbf{u}=e^{iP\theta(t,\mathbf{r})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{u}_n(t,\mathbf{r})}{(iP)^n}, \quad \mathbf{U}=e^{iP\theta(t,\mathbf{r})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathbf{U}_n(t,\mathbf{r})}{(iP)^n}, \qquad (8)$$

где функции $\theta(t,\mathbf{r})$(пространственно-временной эйконал),$\mathbf{u}_n(t,\mathbf{r})$, $\mathbf{U}_n(t,\mathbf{r})$ (амплитудные функции) являются вещественнозначными, P – большой положительный параметр.

Введем в рассмотрение 6-компонентный вектор $\mathbf{W}$. По определению положим:

$$\mathbf{W} = (u_1, u_2, u_3, U_1, U_2, U_3)^t \equiv (W_1, W_2, W_3, W_4, W_5, W_6)^t, \tag{9}$$

$((...)^t$- операция транспонирования).

ПВЛ-разложение:

$$\mathbf{W} = e^{iP\theta(t,\mathbf{r})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{W}_n(t,\mathbf{r})}{(iP)^n}, \quad \mathbf{W}_n = (\mathbf{u}_n, \mathbf{U}_n)^t \tag{10}$$

Подставляя ПВЛ-разложения (8) в систему уравнений (7) и приравнивая члены при различных степенях P нулю, получаем рекуррентные уравнения, которые мы запишем в векторном виде (используем введенный вектор $\mathbf{W}$):

$$(N - \theta_t^2\rho)\mathbf{W}_0 = 0, \ (N - \theta_t^2\rho)\mathbf{W}_1 = -M\mathbf{W}_0,$$

$$(N - \theta_t^2\rho)\mathbf{W}_n = -M\mathbf{W}_{n-1} - L\mathbf{W}_{n-2}, \ n \geq 2. \tag{11}$$

Здесь операторы $(N - \theta_t^2\rho), M, L$ имеют вид:

$$\left((N - \theta_t^2\rho)\mathbf{W}\right)_p \equiv A_{ipkq}\theta_{x^i}\theta_{x^k}W_q - \theta_t^2\rho_{pq}W_q \tag{12}$$

$$(M\mathbf{W})_p \equiv A_{ipkq}\left(\theta_{x^i}\frac{\partial W_q}{\partial x^k}\theta_{x^k}\frac{\partial W_q}{\partial x^i}\right) + \frac{\partial A_{ipkq}}{\partial x^i}\theta_{x^k}W_q$$

$$+A_{ipkq}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^i \partial x^k}W_q - \rho_{pq}\left(\theta_{tt}W_q + 2\theta_t\frac{\partial W_q}{\partial t}\right) \tag{13}$$

$$(L\mathbf{W})_p \equiv A_{ipkq}\frac{\partial^2 W_q}{\partial x^i \partial x^k} + \frac{\partial A_{ipkq}}{\partial x^i}\frac{\partial W_q}{\partial x^k} - \rho_{pq}\frac{\partial^2 W_q}{\partial t^2}, \tag{14}$$

где тензор $A_{ipkq}(\mathbf{r}) = A_{kqip}(\mathbf{r})$ $(p, q = 1, 2, 3, 4, 5, 6; i, k = 1, 2, 3)$ – общее обозначение тензоров $c_{ijkl}(\mathbf{r}), C_{ijkl}(\mathbf{r}), D_{ijkl}(\mathbf{r})$.

В новых обозначениях лагранжиан $\mathcal{L}$ имеет вид:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho_{pq}\frac{\partial W_p}{\partial t}\frac{\partial W_q}{\partial t} - \frac{1}{2}A_{ipkq}\frac{\partial W_p}{\partial x^i}\frac{\partial W_q}{\partial x^k}. \tag{15}$$

3. Энергетическое соотношение

Иногда приходится рассматривать комплексные решения уравнений среды Био. Они являются решениями уравнений Эйлера. Если ввести лагранжиан

$$\mathcal{L}' = \frac{1}{2}\rho_{pq}\frac{\partial W_p}{\partial t}\frac{\partial \overline{W}_q}{\partial t} - \frac{1}{2}A_{ipkq}\frac{\partial W_p}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{W}_q}{\partial x^k}, \tag{16}$$

то эти комплексные решения ($\overline{W}_q$-комплексное сопряжение к W_q) обращают в ноль вариацию

$$\delta\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\mathcal{L}' d\mathbf{r}dt = \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial W_p}{\partial x^\alpha}}\delta\frac{\partial W_p}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial \overline{W}_p}{\partial x^\alpha}}\delta\frac{\partial \overline{W}_p}{\partial x^\alpha}\right)d\mathbf{r}dt, \tag{17}$$

где

$$\delta\frac{\partial W_p}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta W_p,\ \delta\frac{\partial \overline{W}_p}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta\overline{W}_p,\ \alpha = 0,1,2,3; p = 1,2,3,4,5,6,$$

а δW_p, $\delta\overline{W}_p$ – произвольные комплекснозначные функции, имеющие непрерывные производные первого порядка и равные нулю как на границе области Ω, так и при $t = t_1$ и $t = t_2$.

ПВЛ-разложение вектора $\overline{\mathbf{W}}$, комплексно сопряженного с $\mathbf{W}$:

$$\overline{W}_p = e^{-iP\theta(t,\mathbf{r})}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{W_{np}(t,\mathbf{r})}{(-iP)^n},\ W_{np} = (u_{np}, U_{np})^t, p = 1,2,3,4,5,6, \tag{18}$$

где $\theta(t,\mathbf{r})$, $W_{np}(t,\mathbf{r})$ – вещественнозначные функции.

Умножим уравнения Эйлера для лагранжиана $\mathcal{L}'$ на $\frac{\partial W_p}{\partial t}$ и $\frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}$ и просуммируем по p, после чего сложим полученные равенства.

$$\frac{\partial W_p}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial W_p}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial W_p}{\partial x^i}}\right) = 0 \tag{19}$$

$$\frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}} + \frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial \overline{W}_p}{\partial x^i}}\right) = 0 \tag{20}$$

Сумма (19) и (20):

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial W_p}{\partial t}}\frac{\partial W_p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}}\frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial W_p}{\partial x^i}}\frac{\partial W_p}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial \overline{W}_p}{\partial x^i}}\frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}=0 \tag{21}$$

Преобразование равенства (21) дает закон сохранения энергии:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial W_p}{\partial t}}\frac{\partial W_p}{\partial t}+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}}\frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}-\mathcal{L}'\right)+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial W_p}{\partial x^i}}\frac{\partial W_p}{\partial t}+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial \overline{W}_p}{\partial x^i}}\frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}\right)=0 \tag{22}$$

Выражение (22) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{E}+\operatorname{div}\mathbf{S}=0, \tag{23}$$

где вектор $\mathbf{S}=(S_1,S_2,S_3)$, который интерпретируют как вектор потока энергии, имеет компоненты

$$S_i=\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial W_p}{\partial x^i}}\frac{\partial W_p}{\partial t}+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial \overline{W}_p}{\partial x^i}}\frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}, \tag{24}$$

а через $\mathcal{E}$ обозначена функция

$$\mathcal{E}=\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial W_p}{\partial t}}\frac{\partial W_p}{\partial t}+\frac{\partial \mathcal{L}'}{\partial \frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}}\frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}-\mathcal{L}', \tag{25}$$

которую обычно называют плотностью энергии. Выражения (24), (25) для S_i, $\mathcal{E}$, очевидно, вещественны, причем $\mathcal{E}$ – неотрицательная функция.

Подстановка в (22) выражения (16) для лагранжиана $\mathcal{L}'$ дает:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho_{pq}\frac{\partial W_p}{\partial t}\frac{\partial \overline{W}_q}{\partial t}+\frac{1}{2}A_{ipkq}\frac{\partial W_p}{\partial x^i}\frac{\partial \overline{W}_q}{\partial x^k}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^i}\left(-\frac{1}{2}A_{ipkq}\frac{\partial \overline{W}_q}{\partial x^k}\frac{\partial W_p}{\partial t}-\frac{1}{2}A_{ipkq}\frac{\partial W_q}{\partial x^k}\frac{\partial \overline{W}_p}{\partial t}\right)=0 \tag{26}$$

Теперь в энергетическое соотношение (26) подставляем лучевые разложения (10), (18) и берем главные члены по большому параметру P, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}<\mathcal{E}>+\operatorname{div}<\mathbf{S}>=0 \tag{27}$$

Здесь $<\mathcal{E}>$ и $<S_i>$ – главные члены в разложении по степеням P функций $\mathcal{E}$ и S_i,

$$<\mathcal{E}>=\frac{1}{2}P^2\left(\rho_{pq}\theta_t^2 W_{0p}W_{0q}+A_{ipkq}\theta_{x^i}\theta_{x^k}W_{0p}W_{0q}\right) \tag{28}$$

$$<S_i>=-P^2A_{ipkq}\theta_{x^k}\theta_t W_{0p}W_{0q}. \tag{29}$$

4. Уравнение $(N-\theta_t^2\rho)\mathbf{W}_0 = 0$

Рассмотрим уравнение $(N-\theta_t^2\rho)\mathbf{W}_0=0$ или

$$A_{ipkq}\theta_{x^i}\theta_{x^k}W_{0q}=\theta_t^2\rho_{pq}W_{0q},\ p=1,2,3,4,5,6. \tag{30}$$

Введем матрицу

$$N_{pq}(\mathbf{r},\nabla\theta)=A_{ipkq}\theta_{x^i}\theta_{x^k}. \tag{31}$$

Тогда уравнение (30) может быть переписано в виде уравнения на собственные числа θ_t^2 и собственные векторы $\mathbf{W}_0$ матрицы $N_{pq}(\mathbf{r},\nabla\theta)$, которая является симметричной (следствие того, что рассматривались уравнения Эйлера).

$$N_{pq}(\mathbf{r},\nabla\theta)W_{0q}=\theta_t^2\rho_{pq}W_{0q},\ p=1,2,3,4,5,6. \tag{32}$$

Неотрицательность потенциальной энергии анизотропной неоднородной среды Био приводит к тому, что матрица $N_{pq}(\mathbf{r},\nabla\theta)$ положительна. Таким образом, имеем шесть неотрицательных собственных чисел $(\theta_t^2)_m\geq 0, m=1,2,3,4,5,6$ матрицы $N_{pq}(\mathbf{r},\nabla\theta)$. Мы рассматриваем невырожденный случай: фиксируем θ_t^2 такое, что этому собственному числу соответствует один с точностью до множителя собственный вектор $\mathbf{W}_{00}(\mathbf{r},t)$ (6-компонентный):

$$\mathbf{W}_0(\mathbf{r},t)=\varphi_0(\mathbf{r},t)\mathbf{W}_{00}(\mathbf{r},t) \tag{33}$$

Мы рассматриваем положительное соответствующее собственное число $\theta_t^2>0$, так как при $\theta_t^2=0$ волновой процесс отсутствует. Из двух значений θ_t традиционно выбираем отрицательное. В последующих построениях везде $\theta_t<0$. Далее, поскольку элементы матрицы $N_{pq}(\mathbf{r},\nabla\theta)$ квадратичны по $\nabla\theta$, то собственное число θ_t^2 является положительно однородной функцией по $\nabla\theta$ порядка 2. И мы можем записать $-\theta_t=H(\mathbf{r},\nabla\theta)$, то есть функция θ_t удовлетворяет классическому уравнению Гамильтона–Якоби:

$$\theta_t+H(\mathbf{r},\nabla\theta)=0 \tag{34}$$

Характеристическая система для уравнения (34) имеет вид(см., например, [2]):

$$\frac{dt}{ds} = 1,\ \frac{dx^i}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \theta_{x^i}},\ \frac{d\theta}{ds} = 0,\ \frac{d\theta_t}{ds} = 0,\ \frac{d\theta_{x^i}}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial x^i} \tag{35}$$

Пусть $\theta|_{t=0} = \vartheta(x^1, x^2, x^3)$, тогда $\theta(x^1, x^2, x^3, t)$ находится классическим методом Коши. В качестве начальных условий следует взять

$$x^j|_{s=0} = \gamma^j,\ \theta|_{s=0} = \vartheta(x^1, x^2, x^3),\ \theta_{x^j}|_{s=0} = \frac{\partial \vartheta(\gamma^1 \gamma^2 \gamma^3)}{\partial \gamma^j}|_{s=0} \tag{36}$$

Таким образом, вблизи плоскости $t = 0$ вводится система координат $(s, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ и функция $\theta = \theta(s, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3) = \vartheta(\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$. Переходя от системы координат $(s, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ к системе (t, x^1, x^2, x^3), получим искомое решение уравнения Гамильтона–Якоби (34).

Умножая (34) на P и помня об однородности первой степени H по $\nabla\theta$, получаем уравнение, эквивалентное (34), но написанное в “волновых” терминах:

$$\omega = \omega(\mathbf{k}, \mathbf{r}) = H(\mathbf{k}, \mathbf{r}), \tag{37}$$

где $\omega = -P\theta_t,\ \mathbf{k} = P\nabla\theta$.

Уравнение (37) естественно назвать дисперсионным уравнением. Первые два из равенств, входящих в (35), приводят к соотношению

$$\frac{dx^i}{dt} = \frac{\partial \omega}{\partial k_i} = v_i^{\text{г}} \tag{38}$$

Вектор $\mathbf{v}^{\text{г}} = (v_1^{\text{г}}, v_2^{\text{г}}, v_3^{\text{г}})$ с компонентами $\frac{\partial\omega}{\partial k_i}$ – это по определению вектор групповой скорости.

5. Нахождение $\mathbf{W}_n(t, \mathbf{r}),\ n > 0$.

Положим, что главный член ПВЛ – разложения $\mathbf{W}_0(t, \mathbf{r})$ найден. Тогда нетрудно найти и следующие члены, т. е. $\mathbf{W}_n(t, \mathbf{r}),\ n > 0$.

Рассмотрим уравнение

$$(N - \theta_t^2 \rho)\mathbf{W}_1 = -M\mathbf{W}_0 \tag{39}$$

Это уравнение можно рассматривать как линейную алгебраическую систему уравнений относительно компонент вектора $\mathbf{W}_1$. Соответствующее однородное уравнение имеет для каждого фиксированного собственного числа θ_t^2 нетривиальное решение $\mathbf{W}_0$, единственное с точностью до множителя.

Домножим уравнение (39) на $\mathbf{W}_0$ и, учитывая симметричность матрицы N_{pq} однородной системы уравнений (30), получим условие разрешимости системы уравнений (39):

$$(MW_0)_p W_{0p} = (\mathbf{W}_0,\ M\mathbf{W}_0) = 0, \tag{40}$$

здесь (. , .)- символ обычного евклидового скалярного произведения.

Таким образом, уравнение (39) разрешимо и мы имеем

$$\mathbf{W}_1 = \varphi_1(t,\mathbf{r})\mathbf{W}_0 + \mathbf{W}_1^0, \tag{41}$$

где $\mathbf{W}_1^0$ – известный вектор – произвольное фиксированное решение уравнения (39); $\varphi_1(t,\mathbf{r})\mathbf{W}_0$- пока произвольное решение однородного уравнения $(N-\theta_t^2\rho)\mathbf{W}=0$. Далее рассматривается уравнение

$$(N-\theta_t^2\rho)\mathbf{W}_2 =-M\mathbf{W}_1 - L\mathbf{W}_0, \tag{42}$$

Условие разрешимости уравнения (42) имеет вид:

$$(M\varphi_1\mathbf{W}_0,\mathbf{W}_0) + (M\mathbf{W}_1^0 + L\mathbf{W}_0,\mathbf{W}_0) = 0 \tag{43}$$

Равенство (43) является уравнением для функции φ_1. Учитывая формулы (13), (28), (29), мы сможем получить

$$2A_{ipkq}\theta_{x^k}W_{0p}W_{0q}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x^i} - 2\rho_{pq}\theta_t W_{0p}W_{0q}\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + (M\mathbf{W}_1^0 + L\mathbf{W}_0,\mathbf{W}_0) = 0. \tag{44}$$

Здесь мы использовали свойство $A_{ipkq} = A_{kqip}$ и замену индекса суммирования.

Докажем теперь классическое тождество

$$<\mathbf{S}>= \mathbf{v}^{\text{г}} <\mathcal{E}> . \tag{45}$$

Обратимся к формуле (16) для лагранжиана $\mathcal{L}'$. Подставляя в (16) лучевые разложения (10), (18) и выделяя главный член по большому параметру P, получаем:

$$<\mathcal{L}'>= \frac{1}{2}P^2\left(\rho_{pq}\theta_t^2 W_{0p}W_{0q} - A_{ipkq}\theta_{x_i}\theta_{x_k}W_{0p}W_{0q}\right), \tag{46}$$

где $< \mathcal{L}' >$ – главный член в разложении по степеням P лагранжиана $\mathcal{L}'$. Оказывается, что

$$< \mathcal{L}' >= 0, \tag{47}$$

Чтобы прийти к равенству (47), достаточно умножить уравнение (30) на $\frac{1}{2}P^2 W_{0p}$ и просуммировать по p.

Если отвлечься от того, что в выражении для $<\mathcal{L}'>$ вектор $\mathbf{W}_0 = (W_{0p}) = (W_{0q})$ удовлетворяет системе уравнений $(N - \theta_t^2\rho)\mathbf{W}_0 = 0$, а функция θ – уравнению (34), и считать W_{0p}, W_{0q} постоянными, а $\theta_t, \theta_{x^1}, \theta_{x^2}, \theta_{x^3}$ – независимыми параметрами, то очевидно, что

$$\theta_t \frac{\partial < \mathcal{L}' >}{\partial \theta_t} =< \mathcal{E} >, \ \theta_t \frac{\partial < \mathcal{L}' >}{\partial \theta_{x^i}} =< S_i > . \tag{48}$$

Если считать, что в формуле (46) $\theta_t = -H(\mathbf{r}, \nabla\theta)$ и $(N - \theta_t^2\rho)\mathbf{W}_0 = 0$, то $<\mathcal{L}'>$ обратится в тождественный нуль. Продифференцируем тождество (47) по θ_{x^j} с учетом того, что $\theta_t,\ W_{0q}$ зависят от θ_{x^j}:

$$\frac{\partial < \mathcal{L}' >}{\partial \theta_{x^j}} + \frac{\partial < \mathcal{L}' >}{\partial \theta t}\frac{\partial \theta_t}{\partial \theta_{x^j}} + \frac{\partial < \mathcal{L}' >}{\partial W_{0q}}\frac{\partial W_{0q}}{\partial \theta_{x^j}} = 0. \tag{49}$$

В формуле (49) последний член, содержащий $\frac{\partial W_{0q}}{\partial \theta_{x^j}}$, равен нулю, так как

$$\frac{\partial < \mathcal{L}' >}{\partial W_{0q}} = P^2 \left(\rho_{pq}\theta_t^2 W_{0p} - A_{ipkq}\theta_{x^i}\theta_{x^k} W_{0p}\right) = 0, \tag{50}$$

в силу системы уравнений $(N - \theta_t^2\rho)\mathbf{W}_0$=0. Умножая (49) на θ_t, учитывая формулы (48) и равенство

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial \theta_{x^j}} = -\frac{\partial H}{\partial \theta_{x^j}} = -v_j^{\text{г}} \tag{51}$$

где ($v_j^{\text{г}}$ – j-я компонента групповой скорости), получаем

$$< S_i >=< \mathcal{E} > v_i^{\text{г}},\ i = 1, 2, 3, \tag{52}$$

что эквивалентно равенству (45).

Вернемся к формуле (44). Перепишем формулу (44) так:

$$-2P^{-2}\theta_t^{-1}\left(-P^{-2}A_{ipkq}\theta_{x^k}\theta_t W_{0p}W_{0q}\frac{\partial \varphi_1}{\partial x^i} + P^2\rho_{pq}\theta_t^2 W_{0p}W_{0q}\frac{\partial \varphi_1}{\partial t}\right)$$
$$+(M\mathbf{W}_1^0 + L\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_0) = 0. \tag{53}$$

Используя формулы (45), (28), (29), равенству (53) можно придать вид:

$$-2P^{-2}\theta_t^{-1} < \mathcal{E} > \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} + (\mathbf{v}^{\text{г}}, \nabla\varphi_1)\right) + (M\mathbf{W}_1^0 + L\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_0) = 0. \quad (54)$$

Здесь $< \mathcal{E} >= P^2\rho_{pq}\theta_t^2 W_{0p}W_{0q}$, так как$< \mathcal{L} >= 0$. Формулы (35), (38) позволяют перейти от уравнения (54), рассматриваемому как уравнение относительно φ_1, к уравнению

$$\Gamma\frac{d\varphi_1}{ds} + (M\mathbf{W}_1^0 + L\mathbf{W}_0, \mathbf{W}_0) = 0. \quad (55)$$

Здесь $\frac{d}{ds}$ – производная вдоль ПВ-луча.

$$\Gamma \equiv -2P^{-2}\theta_t^{-1} < \mathcal{E} > . \quad (56)$$

Функция Γ отлична от нуля в случае интересных с точки зрения физики задач. Это следует из пропорциональности между Γ и $< \mathcal{E} >$ (см. (56)) и того, что для таких задач $< \mathcal{E} >> 0$. Из формулы (55) с точностью до постоянной интегрирования находится φ_1, а следовательно, и $\mathbf{W}_1$(см. (41)). Векторы $\mathbf{W}_2$, $\mathbf{W}_3, \ldots$ находятся аналогично.

6. Главный член $\mathbf{W}_0$ ПВЛ-разложения

Запишем условие разрешимости (40) системы уравнений (39) подробно, воспользовавшись равенством (13). Полученное соотношение легко преобразуется к дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(A_{ipkq}\theta_{x^k}W_{0p}W_{0q}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(-\rho_{pq}\theta_t W_{0p}W_{0q}\right) = 0 \quad (57)$$

Используя формулы (28), (29), равенство (57) можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{< \mathcal{E} >}{\theta_t}\right) + \operatorname{div}\left(\frac{< \mathbf{S} >}{\theta_t}\right) = 0 \quad (58)$$

В равенстве (58) θ_t можно опустить. Тогда (58) запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial t} < \mathcal{E} > + \operatorname{div}\left(< \mathcal{E} > \mathbf{v}^{\text{г}}\right) = 0. \quad (59)$$

Чтобы получить (59), надо заменить $< \mathbf{S} >$ по формуле (45) на $< \mathcal{E} > \mathbf{v}^{\text{г}}$ и переписать (58) в виде

$$\frac{1}{\theta_t}\left[< \mathcal{E} > + \operatorname{div}\left(< \mathcal{E} > \mathbf{v}^{\text{г}}\right)\right] + < \mathcal{E} > \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{\theta_t}\right) + \left(\mathbf{v}^{\text{г}}, \nabla\left(\frac{1}{\theta_t}\right)\right)\right] = 0. \tag{60}$$

Вторая скобка равна нулю, так как (см. (35), (38))

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v}^{\text{г}}, \nabla)\right)\left(\frac{1}{\theta_t}\right) = \frac{d}{ds}\frac{1}{\theta_t} = 0, \tag{61}$$

в силу постоянства θ_t на ПВ-луче.

Получим теперь одну из основных формул ПВЛМ:

$$< \mathcal{E} > (t, \mathbf{r}) = \frac{< \mathcal{E} > |\mathbf{v}^{\text{г}}| J|_{s=0}}{|\mathbf{v}^{\text{г}}|(\mathbf{r}) J(t, \mathbf{r})}, \tag{62}$$

где выражение $J = \frac{1}{|\mathbf{v}^{\text{г}}|}\left|\frac{D(t,x^1,x^2,x^3)}{D(s,\gamma^1,\gamma^2,\gamma^3)}\right|$ называется геометрической расходимостью поля ПВ-лучей (модуль якобиана, нормированный на модуль вектора групповой скорости).

Воспользуемся двумя известными формулами векторного анализа. Первая – это формула

$$B^{i'} = B^i \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i}, \; B^i = B^{i'} \frac{\partial x^i}{\partial x^{i'}}, \tag{63}$$

выражающая закон преобразования компонент контравариантного вектора $\mathbf{B}$ при переходе от нештрихованной системы координат к штрихованной. Вторая – формула для дивергенции. Пусть $x^\alpha, \alpha = 0, 1, 2, 3$ – обычные декартовы координаты в пространстве $\mathbf{R}^4$. Тогда дивергенция $\operatorname{div}\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\mathbf{B}^\alpha$ в штрихованной системе координат $x^{\alpha'}$ будет иметь вид

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = \frac{1}{\frac{D(x)}{D(x')}}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha'}}\left(B^{\alpha'}\frac{D(x)}{D(x')}\right), \; \frac{D(x)}{D(x')} = \frac{D(x^0,x^1,x^2,x^3)}{D(x^{0'},x^{1'},x^{2'},x^{3'})}. \tag{64}$$

Вывод формулы (62) с помощью формул (63), (64) проводится несложно. Положим $x^{0'} = s, x^{1'} = \gamma^1, x^{2'} = \gamma^2, x^{3'} = \gamma^3$. Пусть вектор $\mathbf{B}$ имеет в этой системе координат компоненты $(< \mathcal{E} >, 0, 0, 0)$.

В системе координат $x^0 \equiv t, x^1, x^2, x^3$ он будет иметь компоненты $B^0 =< \mathcal{E} >$, $B^i =< \mathcal{E} > \frac{\partial x^i}{\partial s} =< \mathcal{E} > v_i^{\text{г}}$. Соотношение (59) и формула (64) теперь приводят к равенству

$$\frac{1}{\frac{D(x)}{D(x')}} \frac{\partial}{\partial s} \left(< \mathcal{E} > \frac{D(x)}{D(x')} \right) = \frac{\partial}{\partial t} < \mathcal{E} > + \frac{\partial}{\partial x^i} (< \mathcal{E} > v_i^{\text{г}}) = 0. \qquad (65)$$

Полагая $< \mathcal{E} > |\mathbf{v}^{\text{г}}| J|_{s=0}$ за постоянную интегрирования, получаем в точности формулу (62).

Из формул (62) и (28) следует, что

$$\varphi_0(t, \mathbf{r}) = \frac{\psi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)}{\sqrt{|\mathbf{v}^{\text{г}}| J d}}, \; d = \rho_{pq} \theta_t^2 W_{00p} W_{00q}, \qquad (66)$$

где $\psi(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ зависит только от ПВ-луча. Формула (66) дает выражение для нулевого приближения лучевого метода.

7. Изотропный неоднородный случай

Выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий T и Π (5), (6) в изотропном неоднородном случае имеют вид:

$$T = \frac{\rho_{11}(\mathbf{r})}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right)^2 \right]$$

$$+ \frac{\rho_{22}(\mathbf{r})}{2} \left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial U_3}{\partial t} \right)^2 \right] \qquad (67)$$

$$+ \rho_{12}(\mathbf{r}) \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial U_1}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial u_2}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial U_2}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial u_3}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial U_3}{\partial t} \right) \right]$$

Здесь $\rho_{11} = \rho_{11}^{'} = \rho_{11}^{''} = \rho_{11}^{'''}$, $\rho_{12} = \rho_{12}^{'} = \rho_{12}^{''} = \rho_{12}^{'''}$, $\rho_{22} = \rho_{22}^{'} = \rho_{22}^{''} = \rho_{22}^{'''}$.

$$\Pi = \frac{\mathcal{P}(\mathbf{r})}{2} \left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right)^2 \right]$$

$$+ F(\mathbf{r}) \left[\frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial u_1}{\partial x^1} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} + \frac{\partial u_2}{\partial x^2} \frac{\partial u_3}{\partial x^3} \right] +$$

$$+\frac{L^{'}(\mathbf{r})}{2}\left[\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^3}\right)+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^1}\right)\right)^2+\left(\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^1}\right)\right)^2+\left(\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^3}\right)+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^2}\right)\right)^2\right]$$

$$+\frac{R^{'}(\mathbf{r})}{2}\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x^1}\right)^2+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial U_3}{\partial x^3}\right)^2\right] \tag{68}$$

$$+Q(\mathbf{r})\left[\left(\frac{\partial u_1}{\partial x^1}\right)+\left(\frac{\partial u_2}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x^3}\right)\right]\left[\left(\frac{\partial U_1}{\partial x^1}\right)+\left(\frac{\partial U_2}{\partial x^2}\right)+\left(\frac{\partial U_3}{\partial x^3}\right)\right],$$

где $\mathcal{P} > 0, R^{'} > 0, L^{'} > 0, P > F, \mathcal{P}R^{'} > Q^2, \mathcal{P}(\mathcal{P}+F) > 2Q^2$, $F = P - 2L^{'}$ (см.[1]).

Подставим выражения для плотностей кинетической и потенциальной энергий T и Π (67), (68) в систему уравнений Эйлера (4), получим систему динамических уравнений изотропной неоднородной среды Био:

$$\begin{cases} L^{'}\Delta\mathbf{u}+(F+L^{'})\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+Q\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{U}+\mathbf{grad}F\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+\mathbf{grad}Q\,\mathrm{div}\,\mathbf{U} \\ \qquad +\sum\limits_{m=1}^{3}\left(\mathbf{grad}L^{'},\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^m}+\mathbf{grad}u_m\right)\mathbf{j}_m=\rho_{11}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}+\rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2} \\ \\ Q\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{u}+R^{'}\mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\mathbf{U}+\mathbf{grad}Q\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} \\ \qquad\qquad +\mathbf{grad}R^{'}\,\mathrm{div}\,\mathbf{U}=\rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}+\rho_{22}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2} \end{cases} \tag{69}$$

($\mathbf{j}_m$ – орт оси x^m, $m = 1,2,3$). Подставляя ПВЛ-разложения (8) в систему уравнений (69) и приравнивая члены при различных степенях P нулю, получаем рекуррентные уравнения, которые мы запишем в векторном виде (используем введенный вектор $\mathbf{W}$):

$$(N-\theta_t^2\rho)\mathbf{W}_0=0,\ (N-\theta_t^2\rho)\mathbf{W}_1=-M\mathbf{W}_0,$$

$$(N-\theta_t^2\rho)\mathbf{W}_n=-M\mathbf{W}_{n-1}-L\mathbf{W}_{n-2},\ n\geq 2. \tag{70}$$

Здесь операторы $(N-\theta_t^2\rho), M, L$ имеют вид:

$$(N-\theta_t^2\rho)\mathbf{W}\equiv\begin{cases} L^{'}(\nabla\theta)^2\mathbf{u}+(F+L^{'})\nabla\theta(\nabla\theta,\mathbf{u})+Q\nabla\theta(\nabla\theta,\mathbf{U}) \\ \qquad -\rho_{11}\theta_t^2\mathbf{u}-\rho_{12}\theta_t^2\mathbf{U} \\ \\ Q\nabla\theta(\nabla\theta,\mathbf{u})+R^{'}\nabla\theta(\nabla\theta,\mathbf{U}) \\ \qquad\qquad -\rho_{12}\theta_t^2\mathbf{u}-\rho_{22}\theta_t^2\mathbf{U} \end{cases} \tag{71}$$

$$
M\mathbf{W} \equiv \begin{cases} L^{'}\Delta\theta\mathbf{u} + 2L^{'}\sum\limits_{m=1}^{3}(\nabla\theta, \nabla u_m)\mathbf{j}_m \\ \quad +(F+L^{'})\left(\nabla\left(\nabla\theta, \mathbf{u}\right) + \nabla\theta \operatorname{div}\mathbf{u}\right) \\ \quad +Q\left(\nabla\left(\nabla\theta, \mathbf{U}\right) + \nabla\theta \operatorname{div}\mathbf{U}\right) + \nabla F\left(\nabla\theta, \mathbf{u}\right) \\ \quad\quad +\nabla Q(\nabla\theta, \mathbf{U}) + \left(\nabla L^{'}, \mathbf{u}\right)\nabla\theta + \left(\nabla L^{'}, \nabla\theta\right)\mathbf{u} \\ \quad\quad -\rho_{11}\left(\theta_{tt}\mathbf{u} + 2\theta_t \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right) - \rho_{12}\left(\theta_{tt}\mathbf{U} + 2\theta_t \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}\right) \\ \\ Q\left(\nabla\left(\nabla\theta, \mathbf{u}\right) + \nabla\theta \operatorname{div}\mathbf{u}\right) + R^{'}\left(\nabla\left(\nabla\theta, \mathbf{U}\right) + \nabla\theta \operatorname{div}\mathbf{U}\right) \\ \quad +\nabla Q\left(\nabla\theta, \mathbf{u}\right) + \nabla R^{'}\left(\nabla\theta, \mathbf{U}\right) \\ \quad\quad -\rho_{12}\left(\theta_{tt}\mathbf{u} + 2\theta_t \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\right) - \rho_{22}\left(\theta_{tt}\mathbf{U} + 2\theta_t \frac{\partial\mathbf{U}}{\partial t}\right) \end{cases} \tag{72}
$$

$$
L\mathbf{W} \equiv \begin{cases} L^{'}\Delta\mathbf{u} + (F+L^{'})\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + Q\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{U} \\ \quad +\mathbf{grad}F\operatorname{div}\mathbf{u} + \mathbf{grad}Q\operatorname{div}\mathbf{U} \\ \quad\quad +\sum\limits_{m=1}^{3}\left(\mathbf{grad}L^{'}, \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial x^m} + \mathbf{grad}u_m\right)\mathbf{j}_m \\ \quad\quad -\rho_{11}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2} \\ \\ Q\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{u} + R^{'}\mathbf{grad}\operatorname{div}\mathbf{U} + \mathbf{grad}Q\operatorname{div}\mathbf{u} \\ \quad +\mathbf{grad}R^{'}\operatorname{div}\mathbf{U} - \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} - \rho_{22}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2} \end{cases} \tag{73}
$$

Рассмотрим уравнение $(N - \theta_t^2\rho)\mathbf{W}_0 = 0$ или

$$
\begin{cases} L^{'}\left(\nabla\theta\right)^2\mathbf{u}_0 + (F+L^{'})\nabla\theta(\nabla\theta, \mathbf{u}_0) + Q\nabla\theta(\nabla\theta, \mathbf{U}_0) \\ \quad -\rho_{11}\theta_t^2\mathbf{u}_0 - \rho_{12}\theta_t^2\mathbf{U}_0 = 0 \\ Q\nabla\theta(\nabla\theta, \mathbf{u}_0) + R^{'}\nabla\theta(\nabla\theta, \mathbf{U}_0) - \rho_{12}\theta_t^2\mathbf{u}_0 - \rho_{22}\theta_t^2\mathbf{U}_0 = 0 \end{cases} \tag{74}
$$

Запишем систему (74) в виде:

$$
N_{pq}(\mathbf{r}, \nabla\theta)W_{0q} = \theta_t^2\rho_{pq}W_{0q},\ p = 1,2,3,4,5,6. \tag{75}
$$

Однородная система (75) имеет ненулевое решение W_{0q} при условии

$$
\det\left(N_{pq}(\mathbf{r}, \nabla\theta) - \theta_t^2\rho_{pq}\right) = 0, \tag{76}
$$

которое дает

$$
\rho_{22}^2(\theta_t^2)^2\left(\left(L^{'}\left(\nabla\theta\right)^2 - \rho_{11}\theta_t^2\right)\rho_{22} + \rho_{12}^2\theta_t^2\right)^2\left(\left(\mathcal{P}\left(\nabla\theta\right)^2 - \rho_{11}\theta_t^2\right)\right.
$$

$$
\left.\times(R^{'}\left(\nabla\theta\right)^2 - \rho_{22}\theta_t^2) - \left(Q\left(\nabla\theta\right)^2 - \rho_{12}\theta_t^2\right)^2\right) = 0. \tag{77}
$$

Уравнение (77) распадается на случаи:

1$^\bullet$ $\left(\theta_t^2\right)^2=0$. Этот случай нам не интересен и мы его не рассматриваем, поскольку при таких значениях собственного числа отсутствует волновой процесс.

2$^\bullet$

$$\left(\left(L^{'}\left(\nabla\theta\right)^2-\rho_{11}\theta_t^2\right)\rho_{22}+\rho_{12}^2\theta_t^2\right)^2=0 \tag{78}$$

Преобразование (78) приводит к равенству

$$\frac{\theta_t^2}{\left(\nabla\theta\right)^2}=\frac{L^{'}\rho_{22}}{\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2}=v_3^2 \tag{79}$$

Здесь $v_3^2>0$ – квадрат скорости поперечной волны. В данном случае имеем собственное число θ_t^2 с кратностью равной 2 (вырожденный случай). Вектор смещений представляется в виде:

$$\mathbf{W}_0(t,\mathbf{r})=\varphi_0^1(t,\mathbf{r})\mathbf{W}_{00}^1(t,\mathbf{r})+\varphi_0^2(t,\mathbf{r})\mathbf{W}_{00}^2(t,\mathbf{r}), \tag{80}$$

$$\mathbf{W}_{00}^1=(0,1,0,0,-\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}},0)^t,\quad \mathbf{W}_{00}^2=(0,0,1,0,0,-\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}})^t, \tag{81}$$

где $\mathbf{W}_{00}^1$, $\mathbf{W}_{00}^2$ – собственные векторы матрицы N_{pq}. Из (81) получаем соотношение:

$$\mathbf{U}_0=-\frac{\rho_{12}(\mathbf{r})}{\rho_{22}(\mathbf{r})}\mathbf{u}_0, \tag{82}$$

$\rho_{22}>0$(в силу положительной определенности кинетической энергии T (67)). Интересно отметить, что в силу (82) векторы смещений, соответствующие упругой и жидкой фазам, оказываются коллинеарными в случае распространения поперечной волны.

3$^\bullet$

$$\left(\mathcal{P}\left(\nabla\theta\right)^2-\rho_{11}\theta_t^2\right)\left(R^{'}\left(\nabla\theta\right)^2-\rho_{22}\theta_t^2\right)-\left(Q\left(\nabla\theta\right)^2-\rho_{12}\theta_t^2\right)^2=0 \tag{83}$$

Преобразование (83) приводит к равенству

$$\frac{\theta_t^2}{\left(\nabla\theta\right)^2}=\left[\pm\sqrt{(\mathcal{P}\rho_{22}+R'\rho_{11}-2Q\rho_{12})^2-4(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)(\mathcal{P}R'-Q^2)}\right.$$
$$\left.+\mathcal{P}\rho_{22}+R^{'}\rho_{11}-2Q\rho_{12}\right]/\left[2(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2)\right]=v_{1,2}^2 \tag{84}$$

Здесь $v_{1,2}^2 > 0$ (см. [1]) – квадраты скоростей двух продольных волн, соответствующих упругой и жидкой фазам.

Вектор смещений, соответствующий упругой продольной волне, движущейся со скоростью v_1, представляется в виде:

$$\mathbf{W}_0(t,\mathbf{r}) = \varphi_0^3(t,\mathbf{r})\mathbf{W}_{00}^3(t,\mathbf{r}), \tag{85}$$

$$\mathbf{W}_{00}^3 = (1,0,0,\frac{(Q-\rho_{12}v_1^2)}{(\rho_{22}v_1^2 - R')},0,0)^t, \tag{86}$$

где $\mathbf{W}_{00}^3$ – собственный вектор матрицы N_{pq}. Вектор смещений, соответствующий жидкой продольной волне, движущейся со скоростью v_2, представляется в виде:

$$\mathbf{W}_0(t,\mathbf{r}) = \varphi_0^4(t,\mathbf{r})\mathbf{W}_{00}^4(t,\mathbf{r}), \tag{87}$$

$$\mathbf{W}_{00}^4 = (1,0,0,\frac{(Q-\rho_{12}v_2^2)}{(\rho_{22}v_2^2 - R')},0,0)^t, \tag{88}$$

где $\mathbf{W}_{00}^4$ – собственный вектор матрицы N_{pq}. Заметим, что выражения $(\rho_{22}v_{1,2}^2 - R^{'})$ в ноль обращаются только одновременно с выражениями $(Q-\rho_{12}v_{1,2}^2)$, что соответствует частному случаю $Q=0$, $\rho_{12}=0$, когда система уравнений Био (69) распадается на две системы уравнений, одна из которых описывает распространение упругих волн, а другая – распространение волн в жидкости (см. [1]).

Для случая $3^\bullet$ продольных волн находим, используя условие разрешимости (40):

$$\varphi_0^{3,4}(t,\mathbf{r}) = \frac{\psi_0^{3,4}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)}{\sqrt{v_{1,2}J_{1,2}d^{3,4}}},\ d^{3,4} = \rho_{pq}\theta_t^2 W_{00p}^{3,4}W_{00q}^{3,4}, \tag{89}$$

где $\psi_0^{3,4}(\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3)$ зависят только от ПВ – луча. Формула (89) дает выражение для нулевого приближения в случае продольных волн.

Вернемся к случаю $2^\bullet$ поперечной волны.

Поскольку вектор смещения поперечной волны ортогонален волновому вектору $\mathbf{k} = P\nabla\theta$, положим

$$\begin{cases} \mathbf{u}_0 &= u_{0N}\mathbf{N} + u_{0b}\mathbf{b} \\ \mathbf{U}_0 &= U_{0N}\mathbf{N} + U_{0b}\mathbf{b} \end{cases} \tag{90}$$

где $\mathbf{N}$ и $\mathbf{b}$ – главная нормаль и бинормаль к проекции ПВ – луча на гиперплоскость (x^1, x^2, x^3).

Запишем условие разрешимости (40), используя соотношение (82):

$$\left(M\mathbf{W}_0, (\mathbf{N}, -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\mathbf{N})^t\right) = 0, \ \left(M\mathbf{W}_0, (\mathbf{b}, -\frac{\rho_{12}}{\rho_{22}}\mathbf{b})^t\right) = 0 \qquad (91)$$

Пользуясь формулами Френе, можно получить полезную для нас формулу (см. [3]):

$$\sum_{m=1}^{3} (\nabla u_m, \nabla\theta)\,\mathbf{j}_m = (\nabla u_{0N}, \nabla\theta)\mathbf{N} + (\nabla u_{0b}, \nabla\theta)\mathbf{b}$$
$$-u_{0N}|\nabla\theta|\,(\tau\mathbf{b} + \kappa\mathbf{t}) + u_{0b}|\nabla\theta|\tau\mathbf{N}, \qquad (92)$$

где κ – кривизна, τ – кручение, $\mathbf{t}$ – касательный к проекции ПВ – луча вектор, $\mathbf{u} = u_{0N}\mathbf{N} + u_{0b}\mathbf{b}$.

Итак, запишем формулы (91) с учетом (92) в более подробном виде:

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\theta u_{0N} + 2\left[(\nabla u_{0N}, \nabla\theta) + u_{0b}|\nabla\theta|\tau\right] + \frac{1}{L'}\left(\nabla L', \nabla\theta\right) u_{0N} \\ \qquad -\frac{1}{v_3^2}\left(\theta_{tt}u_{0N} + 2\theta_t\frac{\partial u_{0N}}{\partial t}\right) = 0 \\ \Delta\theta u_{0b} + 2\left[(\nabla u_{0b}, \nabla\theta) - u_{0N}|\nabla\theta|\tau\right] + \frac{1}{L'}\left(\nabla L', \nabla\theta\right) u_{0b} \\ \qquad -\frac{1}{v_3^2}\left(\theta_{tt}u_{0b} + 2\theta_t\frac{\partial u_{0b}}{\partial t}\right) = 0. \end{array}\right. \qquad (93)$$

Имеет место формула:

$$2\left[(\nabla u_{0l}, \nabla\theta) - \frac{1}{v_3^2}\theta_t\frac{\partial u_{0l}}{\partial t}\right] = 2\frac{|\nabla\theta|}{v_3}\frac{du_{0l}}{ds}, \ l = \{N, b\}, \qquad (94)$$

$\frac{d}{ds}$ – производная вдоль ПВ- луча.

Принимая во внимание (94), перепишем (93):

$$\left\{\begin{array}{l} \Box\theta u_{0N} + 2\left[\frac{|\nabla\theta|}{v_3}\frac{du_{0N}}{ds} + u_{0b}|\nabla\theta|\tau\right] + \frac{1}{L'}\left(\nabla L', \nabla\theta\right) u_{0N} = 0 \\ \Box\theta u_{0b} + 2\left[\frac{|\nabla\theta|}{v_3}\frac{du_{0b}}{ds} - u_{0N}|\nabla\theta|\tau\right] + \frac{1}{L'}\left(\nabla L', \nabla\theta\right) u_{0b} = 0. \end{array}\right. \qquad (95)$$

Здесь $\Box \equiv (\Delta - \frac{1}{v_3^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2})$.

Положим в (95)

$$\begin{cases} u_{0N} &= |\mathbf{u}_0|\cos\varphi \\ u_{0b} &= |\mathbf{u}_0|\sin\varphi, \end{cases}$$

φ – угол между вектором смещения $\mathbf{u}$ и бинормалью $\mathbf{b}$.

Умножим первое уравнение в (95) на $\sin\varphi$, второе – на $\cos\varphi$ и возьмем разность полученных уравнений, получим

$$-\frac{2|\nabla\theta|}{v_3}|\mathbf{u}_0|\frac{d\varphi}{ds} + 2|\mathbf{u}_0||\nabla\theta|\tau = 0. \tag{96}$$

Поскольку $|\nabla\theta|, |\mathbf{u}_0|$ считаем отличными от нуля, то имеем

$$\frac{d\varphi}{ds} = v_3\tau \quad \text{или} \quad \frac{d\varphi}{dl} = \tau, \tag{97}$$

где $\frac{d}{ds}$ – производная вдоль ПВ – луча, а dl – дифференциал длины дуги кривой – проекции ПВ – луча на гиперплоскость (x^1, x^2, x^3).

Формула (97) – закон Рытова.

Найдем нулевое приближение для поперечной волны. Для этого умножим первое уравнение в (93) на u_{0N}, второе- на u_{0b} и сложим полученные уравнения, получим

$$\Delta\theta L^{'}|\mathbf{u}_0|^2 + L^{'}\left(\nabla|\mathbf{u}_0|^2, \nabla\theta\right) + \left(\nabla L^{'}, \nabla\theta\right)|\mathbf{u}_0|^2 - \frac{1}{v_3^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\theta_t|\mathbf{u}_0|^2\right) = 0. \tag{98}$$

Преобразуем формулу (98) к дивергентной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{L^{'}\theta_t^2|\mathbf{u}_0|^2 v_3^{-2}}{\theta_t}\right) + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{-L^{'}\theta_{x^i}|\mathbf{u}_0|^2\theta_t}{\theta_t}\right) = 0, \tag{99}$$

θ_t в формуле (99) можно опустить (см. (61)). Таким образом, имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} < \mathcal{E} > + \operatorname{div}\left(< \mathcal{E} > \mathbf{v}^{\text{г}}\right) = 0, \tag{100}$$

где

$$< \mathcal{E} >= L^{'}\theta_t^2|\mathbf{u}_0|^2 v_3^{-2}, \ v^i_{\text{г}} = -\frac{\theta_{x^i}}{\theta_t}v_3^2 \tag{101}$$

И для нулевого приближения $|\mathbf{u}_0|$, учитывая формулу (63), имеем

$$|\mathbf{u}_0| = \frac{\hat{\psi}_0(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)}{\sqrt{v_3 J_3}}, \tag{102}$$

где $\hat{\psi}_0(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ зависит только от ПВ-луча. Формула (102) дает выражение для нулевого приближения в случае поперечной волны.

Литература

1. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* Наука, СПб (2001).
2. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод. Линейные и нелинейные волны.* ЛГУ (1985).
3. А. С. Алексеев, В. М. Бабич, Б. Я. Гельчинский, *Лучевой метод вычисления интенсивности волновых фронтов.* — Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн 5, под ред. Г.И. Петрашень, ЛГУ (1961), 3–24.

Zavorokhin G. L. On the ray method for the Biot medium.

This work is devoted to investigation of wave propagation in the Biot porous medium, which consists of elastic and fluid phases. The space- time ray decay of the solutions of dynamical equations for the Biot medium is constructed (in anisotropic inhomogeneous case). In inhomogeneous isotropic case the Rytov law analogue is deduced like in elastic theory.

С.-Петербургский
государствнный университет

Поступило 21 апреля 2008 г.

E-mail: germanzavorokhin@rambler.ru